华章数学译丛

HZ BOOKS

13

THOMSON

Differential Equations with Boundary-Value Problems

(Fifth Edition)

微分方程与边界值问题

（原书第5版）

（美） Dennis G. Zill
Michael R. Cullen 著
陈启宏 张凡 郭凯旋 译



机械工业出版社
China Machine Press

（原书第5版）

微分方程与边界值问题

微分方程问题是工程和应用数学领域的重要问题。本书是作者多年教学经验的总结，示例丰富、内容全面、条理清晰。在编写的过程中，作者一直遵循便于学生理解和记忆的原则，所以本书的内容没有采用过于理论化的方式，而是以直观、易读的方式表述。本书对传统的教学方式和教学内容的各个方面都进行了革新，不仅内容更加吸引读者，同时加强理论与应用相结合，精心设计了三个项目模型，讲解微分方程的实际应用。

作 者 简 介

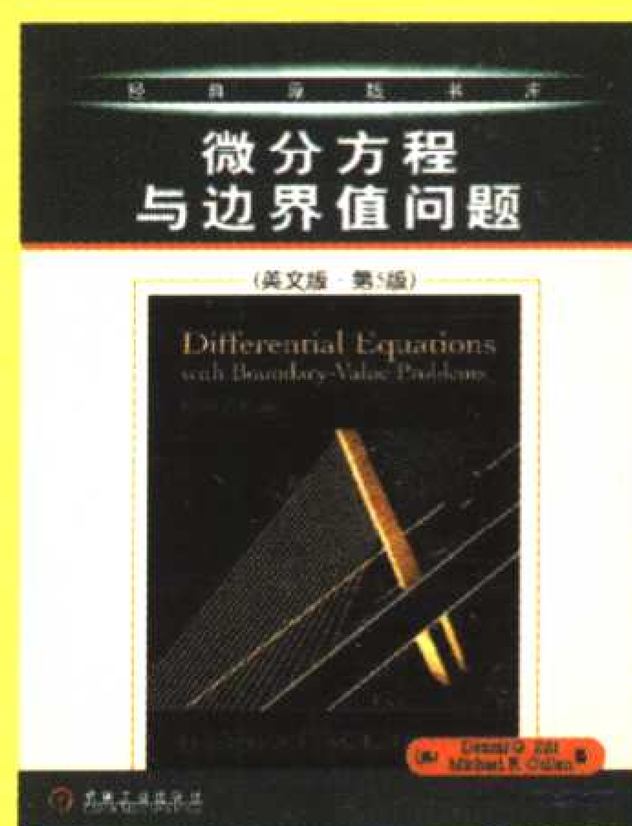


Dennis G. Zill 艾奥瓦州立大学应用数学博士，目前为洛杉矶Loyola Marymount大学数学教授，曾担任数学系主任，其研究领域包括应用数学、特殊函数和积分变换。



Michael R. Cullen(1943－1999) 杰出的教育家和学者，曾经发表过多篇数学领域的论文。两位作者合著有多本教材，除本书外，还包括《Advanced Engineering Mathematics》。

Differential Equations with Boundary-Value Problems
(Fifth Edition)



影印版

ISBN 7-111-12318-2
定价：69.00 元

THOMSON www.thomsonlearningasia.com



封面设计：杨宇梅



华章图书

华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68995259, 68995264

读者信箱：hzjsj@hzbook.com

ISBN 7-111-16874-7/O・434

定价：68.00 元



华 章 数 学 译 丛

13

Differential Equations with Boundary-Value Problems

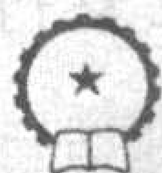
(Fifth Edition)

微分方程与边界值问题

(原书第5版)

(美) Dennis G. Zill
Michael R. Cullen 著

陈启宏 张凡 郭凯旋 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍微分方程及其应用，内容丰富，分析透彻．前半部分重点介绍常微分方程和常微分方程组，后半部分重点讲述偏微分方程的初步理论，分别从定性分析、解析分析和数值分析三个角度由浅入深、徐徐展开．另外，本书的每一章都包含丰富的范例，安排了适量的习题，并且介绍了如何使用计算机来求解微分方程，兼顾了理论性和实用性．

本书可作为数学、工程技术、自然科学、计算机科学等专业本科生的教材和参考书，也可作为广大数学爱好者的自学教材．

本书版权登记号：图字：01-2004-1646

图书在版编目(CIP)数据

微分方程与边界值问题(原书第5版)/(美)兹尔(Zill, D. G.)等著；陈启宏等译．—北京：机械工业出版社，2005.10

(华章数学译丛)

书名原文：Differential Equations with Boundary-Value Problems, Fifth Edition

ISBN 7-111-16874-7

Ⅰ.微…　Ⅱ.①兹…②陈…　Ⅲ.①微分方程-高等学校-教材②边值问题-高等学校-教材　Ⅳ.O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第075102号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：白红莉　迟振春

北京京北制版厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005年10月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 · 36.75印张

印数：0 001-4 000册

定价：68.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

我在读研究生时开始涉足微分方程的研究，至今已有 20 多年，微分方程以及相关的最优控制问题目前仍是我的主要研究领域之一．之所以翻译这本书，是因为数月前我的一个研究生偶得此书，细细阅读之下发现这本书非常适于本科生和广大数学爱好者作为入门或自学的教材．它没有采用过于理论化的方式，而是以直观、易读的方式表述，示例丰富、内容全面、条理清晰，不难看出这是作者多年教学经验的结晶．

微分方程是近代数学的一个十分重要的学科分支．随着现代社会的发展，无论是在工程、宇航等自然科学领域，还是在经济、金融等社会科学领域，微分方程都有着十分广泛的应用．尤其是在经济和金融研究领域，微分方程及其应用似乎已经是不可或缺．关于金融衍生产品定价的 Black-Scholes 方程便是一个典型的例子，在金融界这个方程几乎人所皆知，耳熟能详．另外，微分方程在保险领域的应用也在逐渐深入．不难预见，微分方程理论及其应用今后仍将在自然科学和社会经济的各个领域中发挥重要的作用．

这本教材从微分方程的基本概念讲起，前半部分重点介绍了常微分方程和常微分方程组，而后半部分(从第 12 章开始)重点讲述了偏微分方程的初步理论，分别从定性分析、解析分析和数值分析三个角度由浅入深、徐徐展开．书中在介绍完一阶和高阶常微分方程的理论后(第 2 章和第 4 章)，紧跟着开辟了新的章节(第 3 章和第 5 章)，使用大量具有不同学科背景的实例，着重讲述它们在数学建模中的应用．针对如何求解常微分方程这一问题，本书特别把方程的级数解和拉普拉斯方法分别放在第 6 章和第 7 章单独讨论，以突出重点．为了方便应用领域的读者，作者还在第 13 章专门介绍了微分方程在极坐标、柱面坐标和球面坐标下的一些特殊情形．本书的每一章都使用了丰富的范例，安排了适量的习题，并且介绍了如何使用计算机来求解微分方程，兼顾了理论性和实用性，这在数学教材中是不可多得的．此外，作者还别具匠心，安排了三个项目模型作为微分方程在实际应用中的例子，大大地丰富了本书的内容．

作为一名数学工作者，促进数学科学的教育乃是义不容辞的责任．我和张凡、郭凯旋合作翻译了这本教材，希望能有更多的人读到这本非常优秀的教材，以为振兴祖国的数学教育略尽绵力．

在本书出版的过程中，我们得到了很多人的帮助，在此要特别感谢机械工业出版社华章分社的编辑，以及张凡和郭凯旋，他们为本书的翻译和录入付出了艰辛的劳动．由于译者的水平有限，难免会有疏漏，欢迎广大读者批评指正．

陈启宏

于上海财经大学

前　言

在本书修订过程中，作者受到了多方面的影响. 作者希望能够满足评审者和编辑的要求，通过添加以及改变内容，使这本书既能够跟上时代，又具有竞争力. 同时，作者也不希望增加书的厚度(删除某些内容的要求是很少见的)并确实不愿做任何使前一版的读者感到为难的事. 所以，我试图满足这些要求，或者至少权衡这些要求. 但是事实上，我并没有背离我的原则(在我看来)：本科生的教科书应当使用学生能够理解的、浅显易懂的语言，以及对他们有帮助的方式写成，同时也要使书中的理论水平与“初级课程”的概念一致.

近几年，由于“微分方程”方法的改进以及在教学中越来越重要的地位，再加上微积分的改革，使得微分方程这门课发生了很多变化. 教师对这门课中传统的教学方法和授课内容提出质疑. 这种有益的反思非常重要，它不仅使这门课对学生来说显得更为有趣，而且使其更紧密地和他们所生活的世界相联系.

这一版有什么新内容

- 这一版对微分方程的三种主要方法进行了更清楚的描述，这三种方法是：解析法、定性分析法和数值分析法. 在阐述一阶微分方程的解析解之前，第 2 章在开头加入了新的一节. 在这一节中，用方向场和相线分析法对一阶微分方程解的定性描述进行了检验. 我认为，一定量的定性分析应该是而且也将是有代表性的初级课程的重要组成部分.
- 因为这是第 5 版，所以我努力在练习[⊖]中加入一些新类型的问题. 其中有些问题要求使用计算机代数系统，这是本版的新变化. 我意识到有些学校缺少计算机资源，无法把这些问题包含进他们的课程中，因此把这些问题的很大一部分放在“计算机实验作业”中. 这使这些问题不会成为障碍；也就是说，如果教师想跳过它们，或推迟对它们的教学的话，不必从标准习题之中清除它们. 那些要求更简单的技术(比如说图形计算器或绘图软件等的问题，已经在旁边用图标进行了标注. 最后，在大多数练习中加入了许多概念题和讨论题. 在有些情况下，我略微减少了“训练题”的数量(这些题通常要求使用常规的解法)，以便为增加新的练习留出空间. 和“计算机实验作业”一样，为方便起见，强调对概念的理解以及适合在班级或小组中讨论的问题放在练习的后面部分.
- 三种新的“项目模型”都是由 Gilbert N. Lewis 教授设计的，分别放在第 3、5、8 章后面. 这些模型分别考察了可再生资源的利用、塔科马海峡吊桥的坍塌、多层建筑在地震中的震动的数学模型. 这些模型不仅仅是论述，其中每一个都包含了一系列的问题，如果需要的话可以作为计算机实验作业.

⊖ 奇数题号的练习答案见附录 D. ——编辑注

这一版有什么变化

虽然几乎每一章中都有变化，但是变化最大的还是第 2、6、7 章.

第 2 章：一阶微分方程

这一章的论题在某些方面进行了重新安排，并增加了新的一节.

- 在解一阶微分方程之前，2.1 节中进行了一些定性分析，题目是“不求解情况下的解曲线”. 在这一节中利用方向场和相线分析法讨论了如何了解曲线的形态和曲线的形状问题，大约一半的资料是新加入的；方向场的有关资料在第 4 版的第 9 章中使用过. 在我的授课中，使用了另外一本教材《Differential Equations with Computer Lab Experiments》，我发现学生实际上比较喜欢对自治一阶微分方程定性方面的简短介绍，因为它并没有涉及复杂的过程，而仅仅是建立在对导数概念解释的基础上，这个概念对他们来说在微分计算的学习过程中已经非常熟悉. 这里简短地介绍了临界点、均衡解，以及吸引子、排斥子和半稳定的临界点的稳定性，这种简短的介绍不是从纯理论的角度进行的，也不是以非常复杂的方式来介绍的.
- 在本版中，我把关于线性方程的讨论(2.3 节)移到了对恰当方程的讨论(2.4 节)之前. 在 2.3 节中，我保留了“性质、过程和常数变易法”的格式，尽管这种介绍线性一阶微分方程的方法在第 4 版中并没有得到读者的一致赞同. 有些教科书在处理线性一阶运算(比如说，求积分因子的一般形式)时似乎说明线性一阶方程在某些方面不同于线性高阶方程. 请记住，本书第 4 章中试图阐述求解线性高阶方程的过程也适用于线性一阶方程.
- 在第 4 版对恰当方程的讨论中，积分因子的概念在练习中占据了次要的地位. 求解某些类型的非恰当方程的积分因子现在已经加入到了 2.4 节中.
- 直观的欧拉方法已经从第 4 版的第 9 章中移到了本版的 2.6 节. 这样做有两个原因：一是在微分方程的解析法、定性法和数值法之间达到一个更好的平衡，二是为了更好地说明计算机软件(一般为数值求解程序)图形方面的问题. 另外，在第 2 章中对欧拉方法的描述与大多数现行微积分教材中对这个问题的考虑保持一致.

第 6 章：线性方程的级数解

- 关于利用弗罗贝尼乌斯方法(6.2 节)解各种情况下的变系数线性微分方程的冗长讨论被大大地压缩了，本书只介绍了核心部分.

第 7 章：拉普拉斯变换

第 7 章的结构是全新的，比以前的各版更快地进入主题，即拉普拉斯变换是解一些特定方程的有效工具.

- 导数的拉普拉斯变换以及如何把这个结果用于简单的线性初值问题，将在本版 7.2 节中介绍.
- 在这一章的随后几节中，关于不断增加难度的初值问题和其他类型微分方程的解的讨

论，将随着变换的各种运算性质的介绍而展开．在以前的版本中，所有这些方法都包括在一节中，使得该节过于庞杂．

第 8 章：线性一阶微分方程组

- 在第 8 章中加入了更多的数字和图表．平面方程组解的图像在 tx 平面、ty 平面和 xy 平面上绘出．在本书中，尽管引入了“相平面”这个词，但是没有对自治二阶微分方程或自治平面方程组进行定性分析．
- 在 8.4 节中，加入了关于如何将拉普拉斯变换用于确定矩阵指数的讨论．

哪些仍保持不变

按照主题和逻辑排列的章节与以前的版本一样．和前面几版相同，这一版提供了大量的例子、练习和实际应用．不同的章节中，在介绍微分方程的实际应用方面仍存在微小的差别．一些评审者建议将对微分方程解的讨论放入实际应用中，另外一些评审者则认为应该将二者分开．我同意后者的观点．我认为，将一阶常微分方程和高阶常微分方程的应用放在不同的章节中不仅可以给教科书带来更大的灵活性，而且在开始时只强调少量的概念不会使读者感到突然．从学生的观点来看，求解方法与应用混在一起会令人感到压力太大，从教师的观点来看，尽管这些实际应用不是教学大纲的一部分，也很难跳过．不过这些并不是一成不变的，现在我已经将实际应用编入第 7 章关于拉普拉斯变换的不同节中．我想这样做有两个理由：通常到第 7 章学完后，学生已经能够比较轻松地解决实际应用了，并且就像前面所说的，另一种编排方法(即将所有的实际应用都放在一节里)并不讨人喜欢．总之，我反对那种将线性二阶微分方程的解和高阶微分方程的解放在不同章节的观点．

致谢

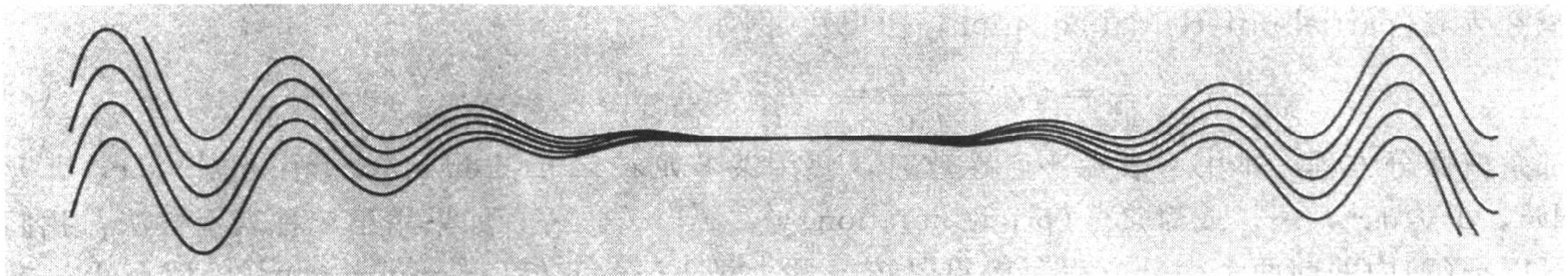
非常感谢下列各位，他们在修订过程中给予了大量的帮助、建议和批评：Zaven Margosian，劳伦斯科技大学；Brian M. O'Connor，田纳西科技大学；Mohsen Razzaghi，密西西比州立大学．

对密歇根科技大学的 Gilbert Lewis 给予特别的感谢，他在百忙之中抽出时间设计了本书的三个项目模型．同时要感谢 Barbara Lovenvirth 在这些建模中的合作．最后，我要对才华横溢的同事 Michael Berg 表示真诚的感谢，他提供了图 1.22 中的卡通图片．

完成这样一部教科书是费时而且困难重重的．毫无疑问，数百页的手稿经过许多人的手，错误是在所难免的．我在这里为可能出现的一些错误道歉．

这本书献给我 27 年的合作者、同事以及朋友——Michael R. Cullen(1943—1999)，他也是一位获奖教师，在本书出版的过程中去世了．

目　录



微分方程的一个解族；见图 1.3

第 1 章　微分方程引论

微分方程这个词明确地表示了一类包含导数的方程. 与在代数和几何课程中学过的从诸如 $x^2+5x+4=0$ 的方程中解出未知变量 x 类似，本书中我们的任务是从诸如 $y''+2y'+y=0$ 的微分方程中解出未知函数 $y=\phi(x)$.

第一段只是描述了这门课程中的一些基本内容，并不包括我们要学习的全部内容. 随着课程的展开，读者将看到更多的对微分方程的研究，而不仅仅是一些已经成熟的解法. 但是首先，为了阅读、学习并且熟悉这个课程，我们应该先学习一下它的专用术语.

1.1　定义与术语

在微积分课程中，我们已熟知函数 $y=\phi(x)$ 的导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 记为 $\phi'(x)$. 函数 $y=\mathrm{e}^{0.1x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是可微的，它的导数是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0.2x\mathrm{e}^{0.1x^2}$. 如果我们用符号 y 替换导数右边的 $\mathrm{e}^{0.1x^2}$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.2xy. \tag{1}$$

现给出方程(1)，而不知道它是如何构成的，问：y 表示的函数是什么？那么我们现在就遇到了这门课程中的基本问题之一：怎样从这样的方程中解出未知函数 $y=\phi(x)$？这个问题有点类似于微分学中一个类似的反问题：给出一个导数，求出它的原函数.

微分方程　我们构造的方程(1)被称为微分方程(differential equation). 在进一步讨论之前，让我们来看一下这个概念的精确定义.

定义 1.1　微分方程

含有因变量对一个或多个自变量导数的方程称为微分方程(DE).

为了讨论微分方程，我们应该从方程的类型(type)、阶(order)和线性性(linearity)等几个角度对其分类.

按类型分类　如果一个方程只含有因变量对一个自变量的导数，那么就称之为常微分方程(ordinary differential equation，ODE). 例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=\mathrm{e}^x,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x+y \tag{2}$$

都是常微分方程. 如果一个方程含有因变量对两个或更多个自变量的偏导数，我们就称之为偏

微分方程(partial differential equation, PDE). 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t},\quad 以及\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

都是偏微分方程. 本书中表示普通导数时，使用莱布尼茨记号(Leibniz notation) dy/dx, d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, …，或撇记号(prime notation) y', y'', y''', …，如果用第二种表示方法，我们可以把(2)中的前两个微分方程写得更紧凑一些：$y'+5y=e^x$ 和 $y''-y'+6y=0$. 实际上，撇记号只用来表示三阶以下(包括三阶)的导数，四阶导数用 $y^{(4)}$ 来代替 y''''. 通常地，n 阶导数用 d^ny/dx^n 或 $y^{(n)}$ 来表示. 尽管有书写和录入的不便之处，但是莱布尼茨记号还是比撇记号更优越，因为它清楚地表示出了自变量和因变量. 例如，方程 $d^2x/dt^2+16x=0$ 直观地表示出了 x 是因变量而自变量是 t. 另外，读者还应该了解物理科学和工程学中的牛顿点记号(Newton's dot notation)(有些教科书中称之为点记号)有时候用来表示关于时间的导数. 因此微分方程 $d^2s/dt^2=-32$ 就可以写成 $\ddot{s}=-32$. 偏导数经常用表示自变量的下标(subscript notation)来标记，例如用下标表示(3)中第二个方程为 $u_{xx}=u_{tt}-2u_t$.

按阶分类 微分方程的阶(常微分方程或偏微分方程)是方程中最高阶导数的阶. 例如方程

$$\underset{\text{二阶}\downarrow}{\frac{d^2y}{dx^2}}+5\Big(\underset{\text{一阶}\downarrow}{\frac{dy}{dx}}\Big)^3-4y=e^x$$

是一个二阶的常微分方程. 一阶常微分方程有时可以写成微分形式 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 例如，如果我们假设用 y 表示方程 $(y-x)dx+4xdy=0$ 中的因变量，那么 $y'=\frac{dy}{dx}$，然后用微分 dx 去除方程两边，我们得到方程的另外一个形式 $4xy'+y=x$. 请见本节末的“注”.

我们还可以用符号表示出含有一个因变量 n 阶导数的常微分方程的一般形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{4}$$

这里 F 是包含 $n+2$ 个变量 x, y, y', …, $y^{(n)}$ 的实值函数，$y^{(n)}=d^ny/dx^n$. 出于实践和理论两方面需要，今后约定，化简形如(4)的常微分方程也就是用其余 $n+1$ 个变量表示的最高阶导数 $y^{(n)}$. 微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{5}$$

这里 f 是一个实值函数，称为(4)的正规型(normal form). 这种形式是我们所需要的，我们将用正规型

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ 和\ \frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y')$$

表示一般的一阶和二阶常微分方程. 例如，一阶方程 $4xy'+y=x$ 的正规型是 $y'=(x-y)/4x$. 请见“注”.

按线性分类 一个 n 阶常微分方程(4)被称为是线性(linear)的，如果 F 对 y, y', …, $y^{(n)}$ 都是线性的. 这意味着当(4)为

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y-g(x)=0$$

或

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{6}$$

时，n 阶常微分方程是线性的.

从(6)中我们可以看到线性微分方程的两个性质. 第一，因变量和它所有的导数都是一次的，也就是涉及 y 的每一项的幂指数都是 1. 第二，每一项的系数最多和自变量 x 有关. 方程

$$(y-x)\mathrm{d}x+4x\mathrm{d}y=0,\quad y''-2y'+y=0 \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5y=\mathrm{e}^x$$

依次为一阶、二阶和三阶线性常微分方程. 我们已经通过把第一个方程写成 $4xy'+y=x$ 的形式证明了它关于 y 是线性的. 非线性(nonlinear)常微分方程是指那些不是线性方程的方程. 因变量或其导数的非线性函数，如 $\sin y$ 或 $\mathrm{e}^{y'}$，不能出现在线性方程中. 因此，

$$\underset{\text{非线性项:系数与 }y\text{ 有关}}{(1-y)y'}+2y=\mathrm{e}^x,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\underset{\text{非线性项:}y\text{ 的非线性函数}}{\sin y}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+\underset{\text{非线性项:指数不是 1}}{y^2}=0$$

分别是非线性一阶、二阶、四阶常微分方程的例子.

解 如前所述，本课程的目标之一是求解微分方程. 下一个定义是关于常微分方程的解的概念.

定义 1.2 常微分方程(ODE)的解

任给一个定义在区间 I 上的函数 ϕ，它至少有 n 阶定义在 I 上的连续导数，把 ϕ 代入一个 n 阶常微分方程两端，若使得方程两端相等，就称 ϕ 为方程在区间 I 上的解，我们也说 ϕ 在区间 I 上满足微分方程.

换言之，n 阶常微分方程(4)的一个解是一个 n 次可导的函数 ϕ，且

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))=0 \text{ 对 } I \text{ 中所有 } x \text{ 均成立.}$$

我们就说 ϕ 在区间 I 上满足微分方程. 本书只讨论 ϕ 是一个实值函数的情况. 根据前面初步的讨论，我们说 $y=\mathrm{e}^{0.1x^2}$ 是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0.2xy$ 在$(-\infty, +\infty)$上的解.

有时为了方便，我们也把解记为 $y(x)$.

定义区间 提到常微分方程的解就不能不提到区间. 定义 1.2 中的区间 I 可以根据需要称为定义区间(interval of definition)、存在区间(interval of existence)、有效区间(interval of validity)或解存在的域(domain). I 可以是一个开区间(a, b)、闭区间$[a, b]$、无限区间$(a, +\infty)$，等等.

例 1 解的验证

验证下列函数是所给微分方程在$(-\infty, +\infty)$上的解.

(a) $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=xy^{1/2}$；$y=\frac{1}{16}x^4$.　(b) $y''-2y'+y=0$；$y=x\mathrm{e}^x$.

解 验证所给函数是方程解的一个方法是把它代入方程后，看方程两边是否对区间上所有 x 都相等.

(a)从

$$\text{左边}:\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{16}(4\cdot x^3)=\frac{1}{4}x^3$$

$$\text{右边}:xy^{1/2}=x\cdot\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2}=x\cdot\left(\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1}{4}x^3$$

中我们可以看出方程两边对任何实数 x 都相等. 注意根据定义，$y^{1/2}=\frac{1}{4}x^2$ 是 $\frac{1}{16}x^4$ 的非负平方根.

(b)由导数 $y'=xe^x+e^x$ 和 $y''=xe^x+2e^x$ 我们可知，对每一个实数 x，

左边：$y''-2y'+y=(xe^x+2e^x)-2(xe^x+e^x)+xe^x=0$

右边：0. ■

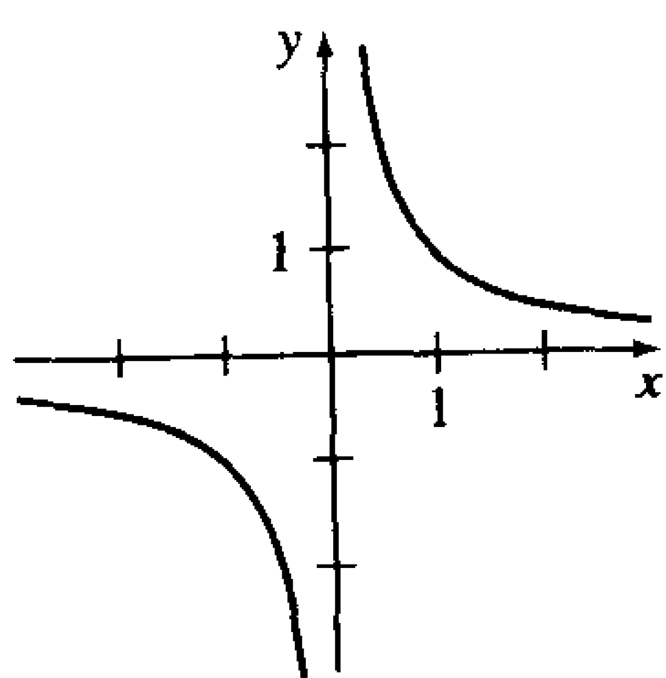
同样也要注意，例1中的每个微分方程都有常数解 $y=0$，$-\infty<x<+\infty$. 如果一个微分方程在区间 I 上有一个恒为零的解，则称这个解为平凡解(trivial solution).

解曲线 常微分方程的解 ϕ 的图形称为解曲线(solution curve). 因为 ϕ 是可微函数，所以在定义区间 I 上是连续的. 因此，作为函数 ϕ 的图形和作为解 ϕ 的图形可能是不同的. 换句话说，函数 ϕ 的定义域和解 ϕ 的定义区间 I 可能不相同. 例2说明了这种区别所在.

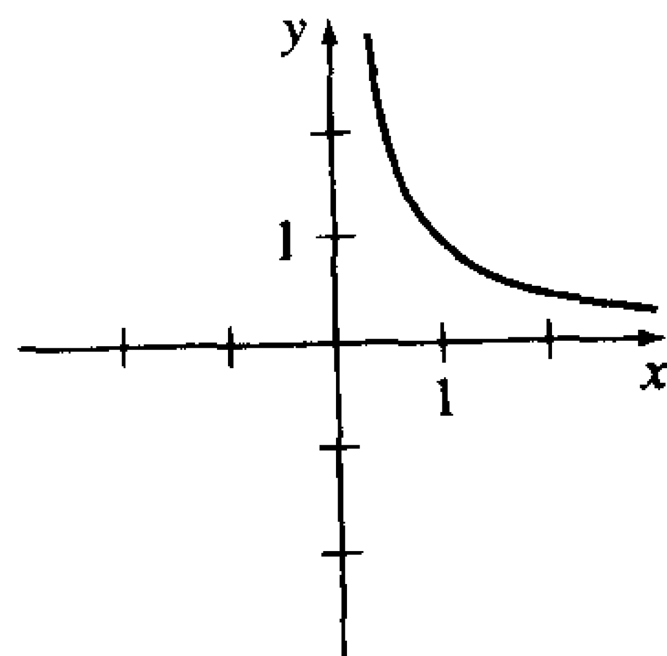
例2 定义域与定义区间 I

考虑函数 $y=1/x$ 的定义域，它是除了0之外的所有实数 x. 当我们描绘 $y=1/x$ 的图形时，从它的定义域中抽出一些点，画在 xy 平面对应的位置上. 有理函数 $y=1/x$ 在(0，0)点是不连续的，并且在原点附近的图形如图1.1(a)所示. 函数在 $x=0$ 处是不可微的，因为 y 轴(方程是 $x=0$)是其图形的垂直渐近线.

现在 $y=1/x$ 也是线性一阶微分方程 $xy'+y=0$ 的一个解(请读者验证). 当我们说 $y=1/x$ 是微分方程的一个解时，意味着它是定义在区间 I 上并在其上可微，同时也满足方程. 换句话说，$y=1/x$ 是在任何不包括0的区间上的微分方程的解，如$(-3, -1)$，$\left(\frac{1}{2}, 10\right)$，$(-\infty, 0)$或$(0, +\infty)$. 因为 $y=1/x$ 在 $-3<x<-1$ 和 $\frac{1}{2}<x<10$ 上的曲线分别是 $y=1/x$ 在 $-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$ 上的一部分，所以把区间 I 拓展得尽可能大是有意义的. 因此我们把区间定义为$(-\infty, 0)$或$(0, +\infty)$，在$(0, +\infty)$上的解曲线如图1.1(b)所示.



a) 函数 $y=1/x, x\neq 0$



b) 解 $y=1/x, (0, \infty)$

图 1.1 ■

显式解和隐式解 在微积分的课程中，读者应该熟悉显函数和隐函数这两个术语. 解中的因变量只通过自变量和常数来表示的称为显式解(explicit solution). 把显式解看成是一个显函数 $y=\phi(x)$，我们可以用标准的规则对它进行变形、运算和微分. 我们来看看前两个例子，$y=\frac{1}{16}x^4$，$y=xe^x$ 和 $y=1/x$ 依次是 $dy/dx=xy^{1/2}$，$y''-2y'+y=0$ 和 $xy'+y=0$ 的显式解.

而平凡解 $y=0$ 是三个方程的显式解. 随着继续深入学习如何解常微分方程，读者将会看到解的形式不总是形如 $y=\phi(x)$ 的显式解，尤其是在我们解非线性一阶微分方程时，情况更是如此. 今后我们必须熟悉如 $G(x, y)=0$ 的形式所定义的隐式解 ϕ.

定义 1.3 常微分方程的隐式解

函数关系 $G(x, y)=0$ 称为常微分方程(4)在区间 I 上的隐式解(implicit solution)，假定至少存在一个函数 ϕ 满足这个函数关系以及定义在区间 I 上的微分方程.

讨论在什么条件下函数关系 $G(x, y)=0$ 定义了一个可微函数 ϕ 超出了本课程的范围. 因此我们将假设如果通过常规解法可以得到 $G(x, y)=0$，那么至少存在一个函数 ϕ 满足函数关系(即 $G(x, \phi(x))=0$)和定义在区间 I 上的微分方程. 如果隐式解 $G(x, y)=0$ 相当简单，我们也许可以把 y 用 x 解出来，得到一个或多个显式解. 请见注释.

例 3 隐式解的验证

函数关系 $x^2+y^2=25$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{7}$$

在区间 $-5<x<5$ 上的隐式解. 对这个隐式解微分，我们得到

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}25 \quad 或 \quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

解后一个微分方程可以表示出符号 dy/dx，因此可以得到(7). 进一步，从 $x^2+y^2=25$ 中解出用 x 表示的 y 为 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$. 这两个函数 $y=\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$ 和 $y=\phi_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$ 满足函数关系($x^2+\phi_1^2=25$ 和 $x^2+\phi_2^2=25$)同时也是定义在 $-5<x<5$ 上的显式解. 图 1.2(b)和(c)表示的解曲线是图 1.2(a)中隐式解图形的一部分.

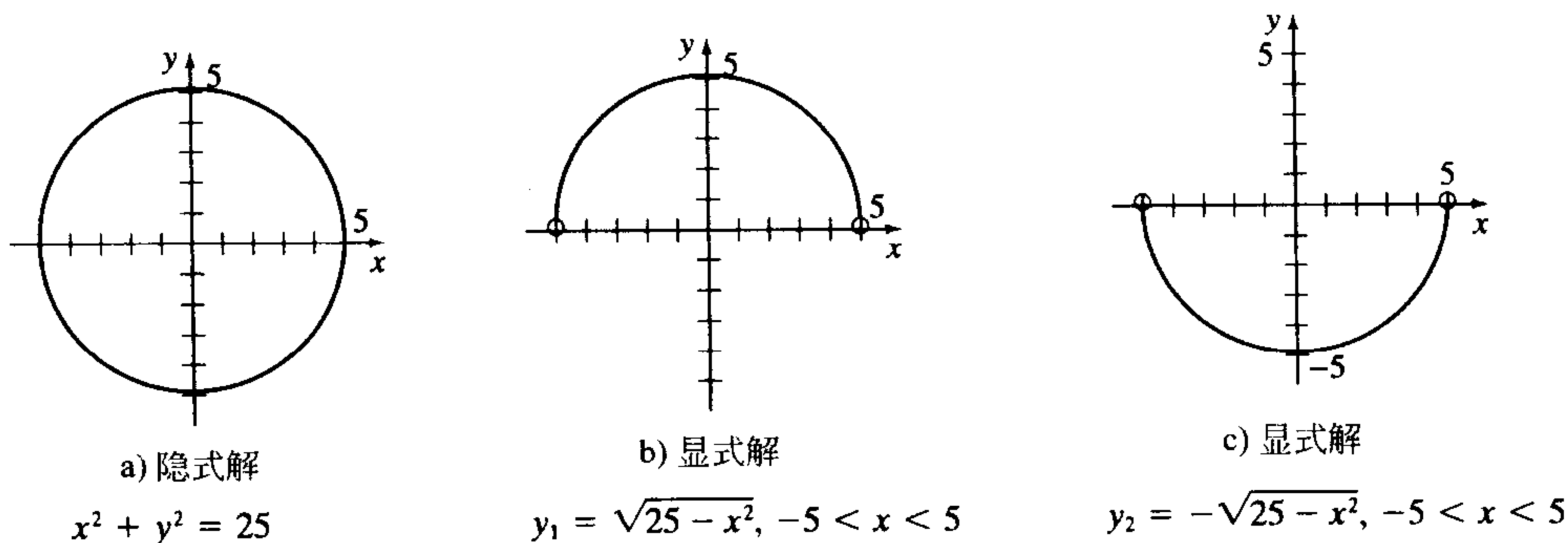


图 1.2 $y'=-x/y$ 的一个隐式解和两个显式解 ■

任何形如 $x^2+y^2-c=0$ 的函数关系都满足(7)，对任何常数 c 都适用. 但是这一关系首先要保证在实数域内有意义. 例如若 $c=-25$，我们就不能说 $x^2+y^2+25=0$ 是方程的隐式解. (为什么?)

因为显式解和隐式解的区别在直观上是明显的，所以我们不会总说“存在一个显式(隐式)解”之类的话.

解族 对微分方程的研究类似于对微积分的研究. 在一些教科书中，解 ϕ 被看作是一个方程的积分(integral)，它的图形称为积分曲线(integral curve). 在微积分中，当计算一个原函数或不定积分时，我们使用了一个积分常数 c. 类似地，在解一个一阶微分方程 $F(x, y, y')=0$ 时，我们通常得到含有一个任意常数或参数 c 的解. 含有一个任意常数的解表示了解的集合 $G(x, y, c)=0$，称之为单参数解族(one-parameter family of solution). 解一个 n 阶微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$，我们将得到一个 n 参数解族(n-parameter family of solution). $G(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$. 这意味着一个微分方程对应于无数个参数可以有无数个解. 微分方程中不含任何参数的解称为特解(particular solution). 例如，单参数族 $y=cx-x\cos x$ 是线性一阶方程 $xy'-y=x^2\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的显式解. (请读者证明.)用绘图软件绘出的图 1.3 表示了这个解族中一些解的图形. 解 $y=-x\cos x$ 是相应于 $c=0$ 的特解. 同样，区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的 $y=c_1e^x+c_2xe^x$ 是例 1 中线性二阶方程 $y''-2y'+y=0$ 含两个参数的解族. (请读者证明.)方程的某些特解是平凡解 $y=0(c_1=c_2=0)$，$y=xe^x(c_1=0, c_2=1)$，$y=5e^x-2xe^x(c_1=5, c_2=-2)$，等等.

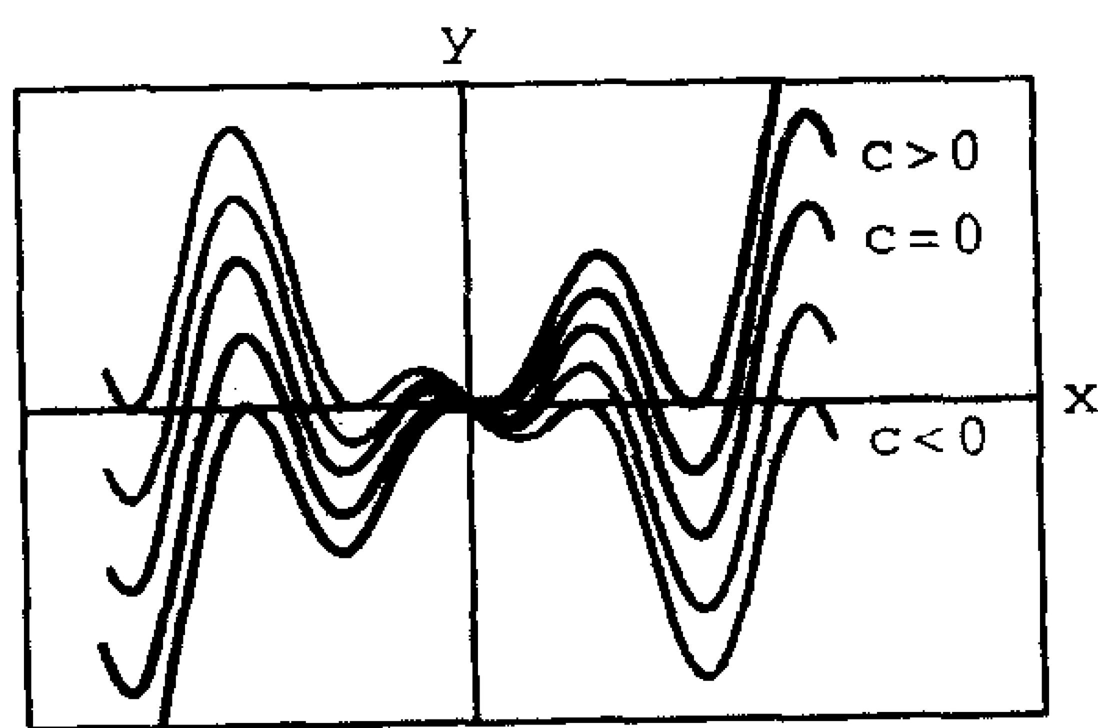


图 1.3 $xy'-y=x^2\sin x$ 的一些解

有时候微分方程有不属于任何解族的解，也就是不能通过对解族中的参数取特值的方法得到这个解. 这种解族之外的解称为奇异解(singular solution). 例如，我们已经看到 $y=\frac{1}{16}x^4$，$y=0$ 是微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解. 在 2.2 节中，我们将证明，微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 有一个单参数的解族 $y=\left(\frac{1}{4}x^2+c\right)^2$，当 $c=0$ 时我们就得到了特解 $y=\frac{1}{16}x^4$. 但是注意平凡解 $y=0$ 是一个奇异解，因为它不属于 $y=\left(\frac{1}{4}x^2+c\right)^2$ 的解族；我们无法通过赋给常数 c 一个值得到 $y=0$.

在前面所有的例子中，我们都分别用 x 和 y 表示自变量和因变量，但是读者应该习惯于用其他符号来表示这些变量. 例如，我们可以用 t 来表示自变量，用 x 来表示因变量.

例 4 **使用不同的符号**

函数 $x=c_1\cos 4t$ 和 $x=c_2\sin 4t$ 都是线性微分方程

$$x''+16x=0$$

的解，这里 c_1 和 c_2 是任意常数或参数.

对 $x=c_1\cos 4t$ 来说，关于 t 的前二阶导数是 $x'=-4c_1\sin 4t$ 和 $x''=-16c_1\cos 4t$. 替换方程中的 x'' 和 x，然后得到

$$x''+16x=-16c_1\cos 4t+16(c_1\cos 4t)=0.$$

用同样的方式，由 $x=c_2\sin 4t$ 可以得到 $x''=-16c_2\sin 4t$，因此有

$$x''+16x=-16c_2\sin 4t+16(c_2\sin 4t)=0.$$

最后，可以直接证明解的线性组合或含两个参数的解族 $x=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t$ 也是微分方程的解. ■

下一个例子说明了微分方程的解可以是分段定义的函数.

例 5 分段定义的解

读者应该先证明一下单参数函数族 $y=cx^4$ 是微分方程 $xy'-4y=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个单参数解族. 请见图 1.4(a). 分段定义的可微函数

$$y=\begin{cases}-x^4, x<0\\ x^4, x\geqslant 0\end{cases}$$

是这个方程的特解，但不能从单参数解族 $y=cx^4$ 中得到. 这个解是当 $x<0$ 时令 $c=-1$ 和 $x\geqslant 0$ 时令 $c=1$ 得到的. 请见图 1.4(b).

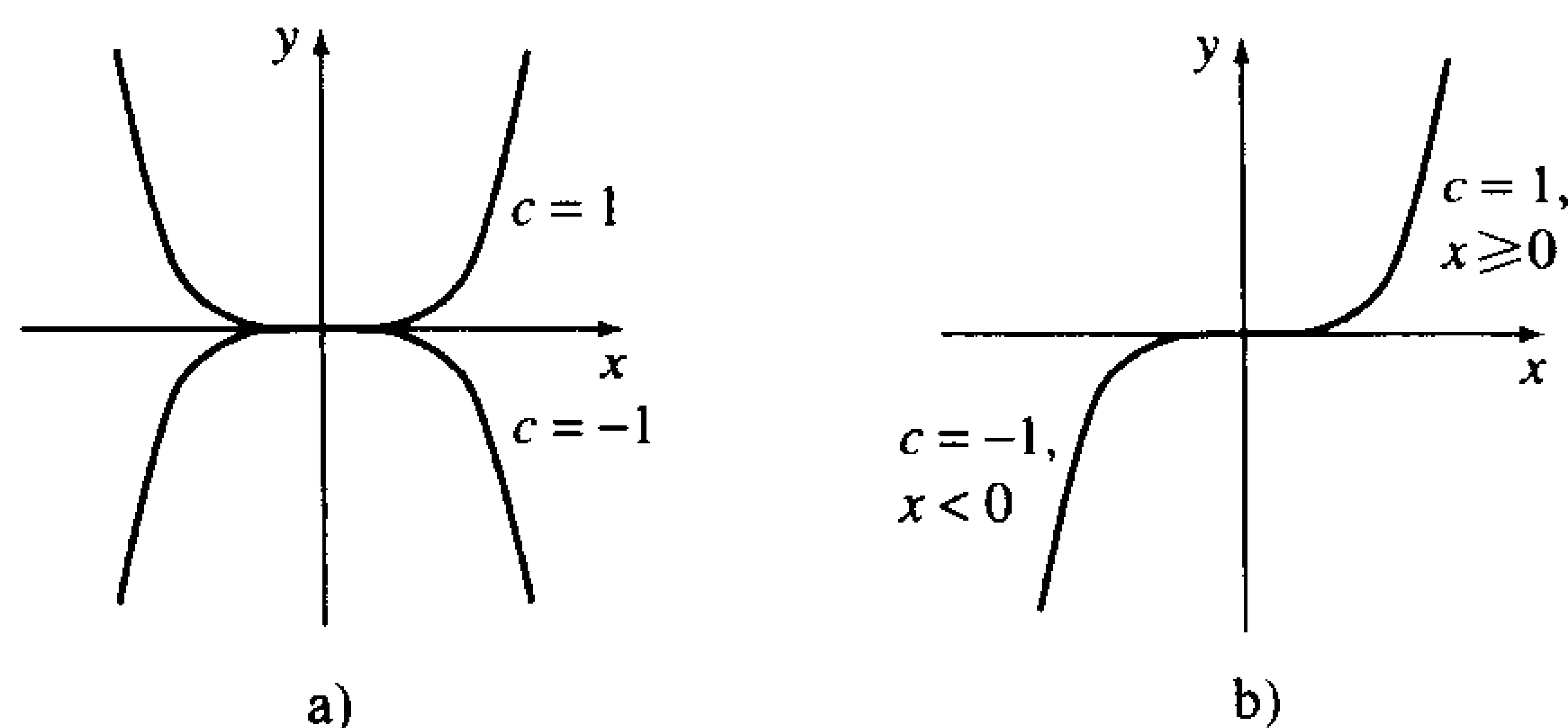


图 1.4 $xy'-4y=0$ 的一些解 ■

微分方程组 到现在为止我们一直在讨论含有一个未知函数的单个微分方程. 但是在理论和实践中，我们必须处理微分方程组. 常微分方程组(system of ordinary differential equations)是由两个或更多的方程组成的，这些方程含有关于一个自变量的两个或两个以上的导数. 例如，如果 x 和 y 表示因变量，t 表示自变量，那么由两个一阶微分方程组成的方程组为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f(t,x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=g(t,x,y).\end{aligned}\tag{8}$$

形如(8)的方程组的解是两个定义在区间 I 上的可微函数 $x=\phi_1(t)$，$y=\phi_2(t)$，并且在这个区间上满足每一个方程.

注 (i)关于微分方程的隐式解最后再说一点. 在例 3 中，我们可以从 $x^2+y^2=25$ 中解出用 x 表示的 y，得到微分方程 $dy/dx=-x/y$ 的两个显式解 $\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$ 和 $\phi_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$. 但是不要把注意力过多地集中在这个例子上，除非问题是简单的、明显的、方便的、重要的，或被告知这样做，否则通常没有必要试图从一个隐式解 $G(x, y)=0$ 中解出用 x 表示的 y. 同时，也不要误解定义 1.3 后的第二句话，一个隐式解 $G(x, y)=0$ 可以定义一个很好的可微函数 ϕ，它是微分方程的一个解，但是我们可能不能用像代数这样的解析方法解出 $G(x, y)=0$. ϕ 的解曲线可能是 $G(x, y)=0$ 图形的一段或一部分. 请参考练习 1.1 中的习题 41、42 和 2.2 节中例 4 下面的讨论.

（ⅱ）在微分形式 $M(x, y)\mathrm{d}x+N(x, y)\mathrm{d}y=0$ 中，一阶常微分方程是否是线性的可能并不明显，因为在形式上我们不知道哪个符号表示因变量．请参考练习 1.1 中的习题 3、4.

（ⅲ）假设 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$，从中解出 $y^{(n)}$ 应该不是一件困难的事情，但是在这个地方读者应该稍微小心一点，这里可能有一些例外，关于这个假设肯定也存在一些问题．请参考练习 1.1 中的习题 36、37.

（ⅳ）读者可能会在一些微分方程的课本里或在从事微分方程研究的老师的讲课中遇到"闭形式的解"这个词．这个词通常是说用初等（或类似地）函数表示的显式解：x 的整数次幂、根式指数和对数函数、三角函数和反三角函数的有限次组合.

（ⅴ）如果 n 阶常微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的每一个解可以从含 n 个参数的解族 $G(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$ 中选择合适的参数 c_i，i，$=1, 2, \cdots, n$ 得到，那么我们说这个解族是微分方程的通解(general solution)．在解线性微分方程时，我们会对方程的系数加上简单的约束条件；通过这些约束条件，我们可以肯定不但在区间上解存在，而且由解族可以产生所有可能的解．除了一些一阶方程外，从非线性方程一般很难或不可能得到用初等函数表示的解．进一步说，如果我们得到一个非线性方程的解族，那么这个解族是否包含所有的解是不知道的．在实践中，"通解"这种说法只用在线性微分方程上．这个概念在 2.3 节和 4～6 章中是很重要的.

练习 1.1

写出习题 1～10 中每个微分方程的阶数，并说明是线性的还是非线性的.

1. $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$
2. $x\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4+y=0$
3. $(y^2-1)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$
4. $u\mathrm{d}v+(v+uv-ue^u)\mathrm{d}u=0$
5. $t^5y^{(4)}-t^3y''+6y=0$
6. $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+u=\cos(r+u)$
7. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$
8. $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{k}{R^2}$
9. $(\sin\theta)y'''-(\cos\theta)y'=2$
10. $\ddot{x}-\left(1-\dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x}+x=0$

证明习题 11～14 中给出的函数是相应微分方程的显式解．假定方程定义在某个合适的区间 I 上.

11. $2y'+y=0$； $y=e^{-x/2}$
12. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+20y=24$； $y=\dfrac{6}{5}-\dfrac{6}{5}e^{-20t}$
13. $y''-6y'+13y=0$； $y=e^{3x}\cos 2x$
14. $y''+y=\tan x$； $y=-(\cos x)\ln(\sec x+\tan x)$

证明习题 15、16 中给出的表达式是相应微分方程的隐式解．每一题至少找出一个显式解．绘出显式解的图形．每个解 ϕ 都定义在区间 I 上.

15. $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=(X-1)(1-2X)$； $\ln\left(\dfrac{2X-1}{X-1}\right)=t$

16. $2xy\,dx+(x^2-y)dy=0$；　$-2x^2y+y^2=1$

证明习题17～20中，函数族是所给微分方程的解．假定每个解都定义在某个区间 I 上．

17. $P'=P(1-P)$；　$P=\dfrac{c_1e^t}{1+c_1e^t}$

18. $y'+2xy=1$；　$y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+c_1e^{-x^2}$

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$；　$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

20. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=12x^2$；　$y=c_1x^{-1}+c_2x+c_3x\ln x+4x^2$

21. (a)证明 $y=\phi_1(x)=x^2$ 和 $y=\phi_2(x)=-x^2$ 是微分方程 $xy'-2y=0$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上的解．

(b)证明分段函数

$$y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geqslant 0\end{cases}$$

也是 $xy'-2y=0$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上的解．

22. 在例3中，我们可以看到 $y=\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$ 和 $y=\phi_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$ 是微分方程 $dy/dx=-x/y$ 在区间$(-5, 5)$上的解．解释分段函数

$$y=\begin{cases}\sqrt{25-x^2}, & -5<x<0\\ -\sqrt{25-x^2}, & 0\leqslant x<5\end{cases}$$

为什么不是微分方程在$(-5, 5)$上的解．

23. (a)求出函数 $y=x+2\sqrt{x+3}$ 的定义域．

(b)证明(a)中的函数是微分方程 $(y-x)y'=y-x+2$ 在某个区间上的解．求使这个解有定义的最大区间．

24. 下列函数是所给微分方程的解．至少求出每个解的一个定义区间．

(a) $y'=25+y^2$；　$y=\tan 5x$

(b) $2y'=y^3\cos x$；　$y=(1-\sin x)^{-1/2}$

25. 求 m 的值，使得函数 $y=e^{mx}$ 是所给微分方程的解，给出求解过程．

(a) $y'+2y=0$　　(b) $y''-5y'+6y=0$

26. 求 m 的值，使得函数 $y=x^m$ 是所给微分方程的解，给出求解过程．

(a) $xy''+2y'=0$　　(b) $x^2y''-7xy'+15y=0$

证明27、28题中所给的函数是微分方程组在区间$(-\infty, +\infty)$上的解．

27. $x=e^{-2t}+3e^{6t}$，$y=-e^{-2t}+5e^{6t}$；

$$\frac{dx}{dt}=x+3y$$

$$\frac{dy}{dt}=5x+3y$$

28. $x=\cos 2t+\sin 2t+\dfrac{1}{5}e^t$，$y=-\cos 2t-\sin 2t-\dfrac{1}{5}e^t$；

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4y+e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=4x-e^t$$

讨论题

29. 构造一个微分方程，使它没有任何实数解.
30. 构造一个微分方程，使它有平凡解 $y=0$，并给出过程.
31. 有哪些函数的一阶导数是它本身？哪些函数的一阶导数是它本身的 k 倍？把每一个问题写成一个一阶微分方程，并把它的解写出来.
32. 哪些函数的二阶导数是它本身？哪些函数的二阶导数是它本身的负数？把每一个问题写成一个二阶微分方程，并把它的解写出来.
33. 假设 $y=\phi(x)$ 是 n 阶微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解. 解释为什么 ϕ, ϕ', $\cdots$, $\phi^{(n-1)}$ 在区间 I 上一定连续.
34. 设一个双参数族 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 是一个线性二阶微分方程在区间 I 上的解. 若 $x=0$ 在区间 I 内，求参数族的一个特解，使它满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$. 并把所需要的假设列出来.
35. 讨论并举例说明如何解形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x)$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=f(x)$ 的微分方程.
36. 微分方程 $x(y')^2-4y'-12x^3=0$ 可以写成(4)表示的一般形式. 方程是否能够写成正规型 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x,y)$.
37. n 阶微分方程的正规型(5)等价于(4)，无论何时二者都有相同的解. 构造一个形如 $F(x, y, y')=0$ 的一阶微分方程，使它与正规型 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x, y)$ 不等价.
38. 求线性二阶微分方程 $F(x, y, y', y'')=0$，使得 $y=c_1x+c_2x^3$ 是它的一个双参数解族. 这个方程应该与 c_1、c_2 无关.
39. 讨论在什么条件下，$y=0$ 是线性微分方程(6)的一个解.
40. 我们知道当且仅当 y 是一个常数时有 $y'=0$. 利用这点确定下列微分方程是否有常数解.

(a) $3xy'+5y=10$　　(b) $y'=y^2+2y-3$

(c) $(y-1)y'=1$　　(d) $y''+4y'+6y=10$

在习题 41、42 中，所给图形表示微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x, y)$ 的隐式解 $G(x, y)=0$ 的图像. 在每题中，$G(x, y)=0$ 隐式地定义了微分方程的几个解. 请读者重新绘出每个图像. 用不同的颜色标出解对应的图像. 请牢记解 ϕ 必须是一个函数并且是可微的. 利用解曲线估计每个解 ϕ 的定义区间 I.

41.

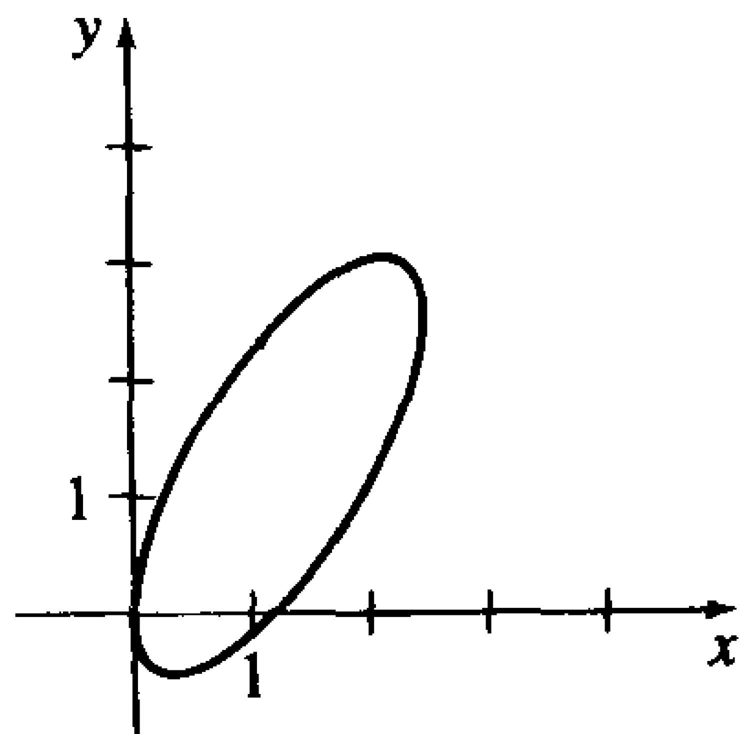


图 1.5

42.

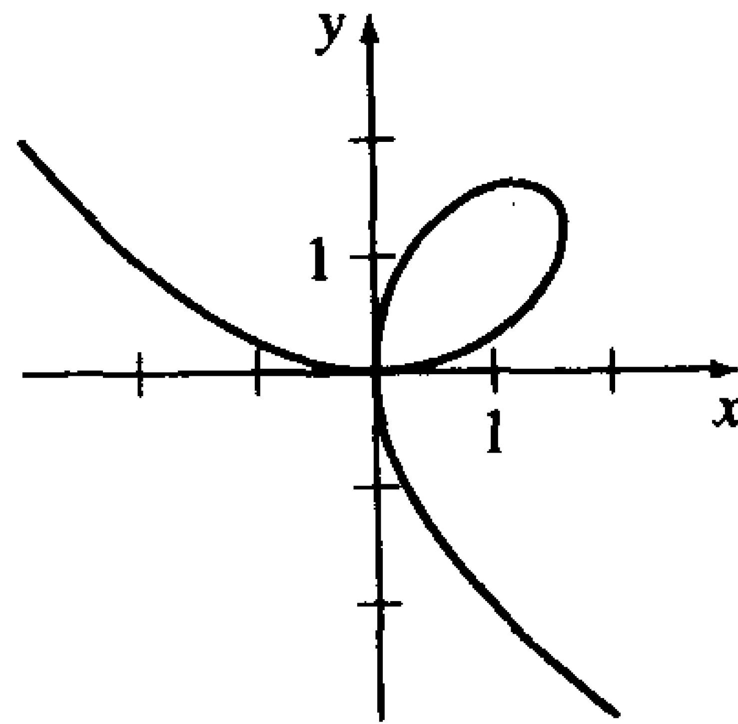


图 1.6

43. 单参数族 $x^3+y^3=3cxy$ 被称为笛卡儿叶形线(folia of Descartes). 证明这个参数族是一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(y^3-2x^3)}{x(2y^3-x^3)}.$$

的隐式解.

44. 图 1.6 是习题 43 中 $c=1$ 时的叶形线. 讨论如何利用习题 43 中的微分方程求出 $x^3+y^3=3xy$ 图形上具有垂直切线的点. 知道了何处的切线是垂直的，又如何确定微分方程的解 ϕ 的定义区间 I？写出求解过程，并和习题 42 中的区间加以比较.

微分方程解的信息可以从方程本身得到. 在解 45～48 题之前，复习一下微积分中导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 的几何意义.

45. 设 $y=\phi(x)$ 是定义在 I 上的 $y'=y^2+4$ 的解. 描绘 $y=\phi(x)$ 在 I 上的图形. 例如，解曲线是否有相对极值.

46. (a)证明 $y=5$，$-\infty<x<+\infty$ 是 $y'=5-y$ 的解. 这个常数解的图形是图 1.7 中的水平直线.

 (b)为什么图 1.7 中所示的曲线不是解曲线？

 (c)在 $y<5$，$y>5$ 定义的区域上绘出几个合理的解曲线.

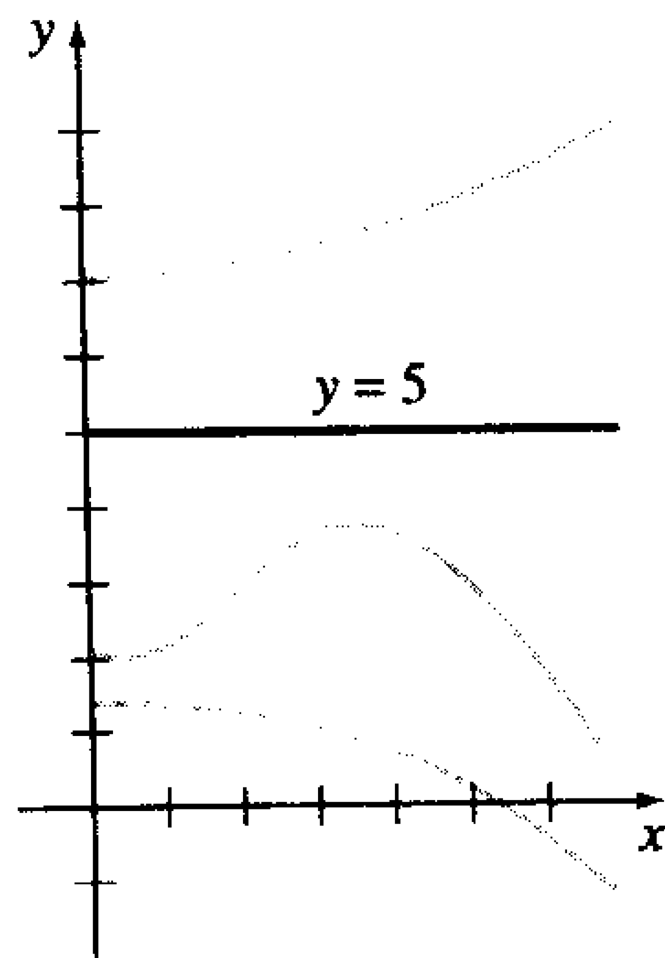


图 1.7

47. 设 $y=\phi(x)$ 是微分方程 $dy/dx=y(a-by)$ 的解，其中 a、b 是正的常数.

 (a)求出方程的两个常数解.

 (b)仅用微分方程，分别求出非常数解 $y=\phi(x)$ 在 y 轴上的递增区间、递减区间.

 (c)仅用微分方程，解释为什么 $y=a/2b$ 是非常数解 $y=\phi(x)$ 图形上拐点的 y 坐标.

 (d)在同样的坐标轴上，绘出(a)中两个常数解的图形. 这些常数解把 xy 平面分割成三个区域. 在每个区域里，绘出非常数解 $y=\phi(x)$ 的图形，它的形状可以从(b)、(c)的结果中得到一些启示.

48. 如下所示的单参数解族是所给一阶微分方程的隐式解：

$$y\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0, y^2=c_1x,\quad 2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0,\quad 2x^2+y^2=c_2^2.$$

 绘出第一个参数族当 $c_1>0$ 时的三条解曲线和当 $c_1<0$ 时的三条解曲线. 至少绘出第二个参数族的三条曲线. 第一个参数族的解曲线和另一个参数族的解曲线的交点有什么性质？仅利用微分方程，请读者证明之.

计算机实验作业

在习题 49、50 中，用 CAS 计算所有的导数并证明函数是所给微分方程的特解.

49. $y^{(4)}-20y'''+158y''-580y'+841y=0$；　$y=xe^{5x}\cos 2x$

50. $x^3y'''+2x^2y''+20xy'-78y=0$；　$y=20\dfrac{\cos(5\ln x)}{x}-3\dfrac{\sin(5\ln x)}{x}$

1.2　初值问题

我们对有边界条件的微分方程是感兴趣的，这些边界条件通常形如 $y=y(x)$ 或其导数. 在含有 x_0 的某个区间上，

$$\text{解：}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\tag{1}$$

$$\text{约束：}y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

这里 y_0，y_1，…，y_{n-1} 是任意的实约束条件，称为初值问题(IVP). $y(x)$ 及它的前 $n-1$ 个导数在点 x_0 的值为：$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_1$，…，$y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$，称之为初始条件(initial condition).

一阶初值问题和二阶初值问题　问题(1)称为 n 阶初值问题(nth-order initial-value problem). 例如，

$$\text{解：}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\tag{2}$$

约束：$y(x_0)=y_0$

以及

$$\text{解：}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f(x,\ y,\ y') \tag{3}$$

约束：$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_1$

分别是一阶和二阶初值问题．这两个问题用几何术语解释非常容易．对(2)来说，我们在一个含有 x_0 的区间 I 上找到微分方程的一个解，那么这个解曲线通过点$(x_0,\ y_0)$．请见图 1.8．对(3)来说，我们想找到微分方程的一个解，这个解的图形不但通过点$(x_0,\ y_0)$，而且在这个点的斜率是 y_1．请见图 1.9．初值条件是从物理系统得到的，这个系统的自变量是 t，$y(t_0)=y_0$ 和 $y'(t_0)=y_1$ 分别表示物体在开始或初始时刻 t_0 的位置和速度．

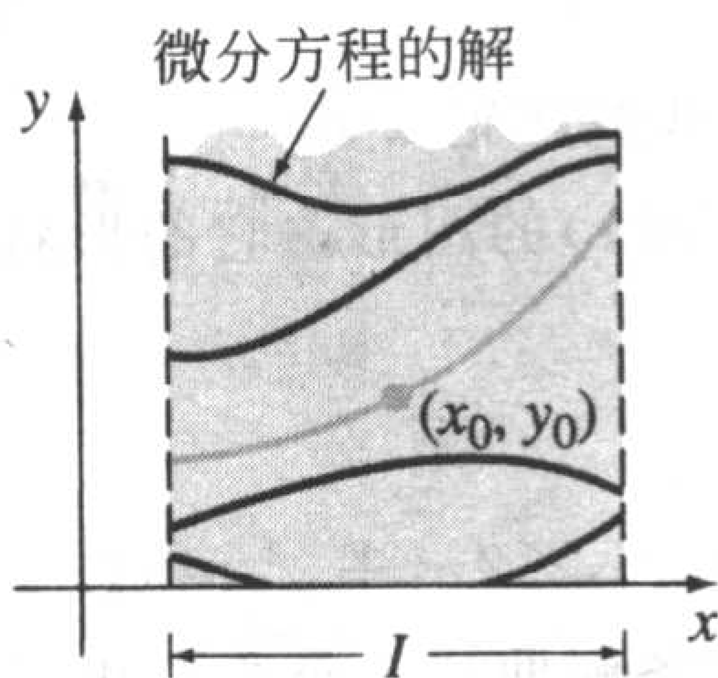


图 1.8　一阶初值问题

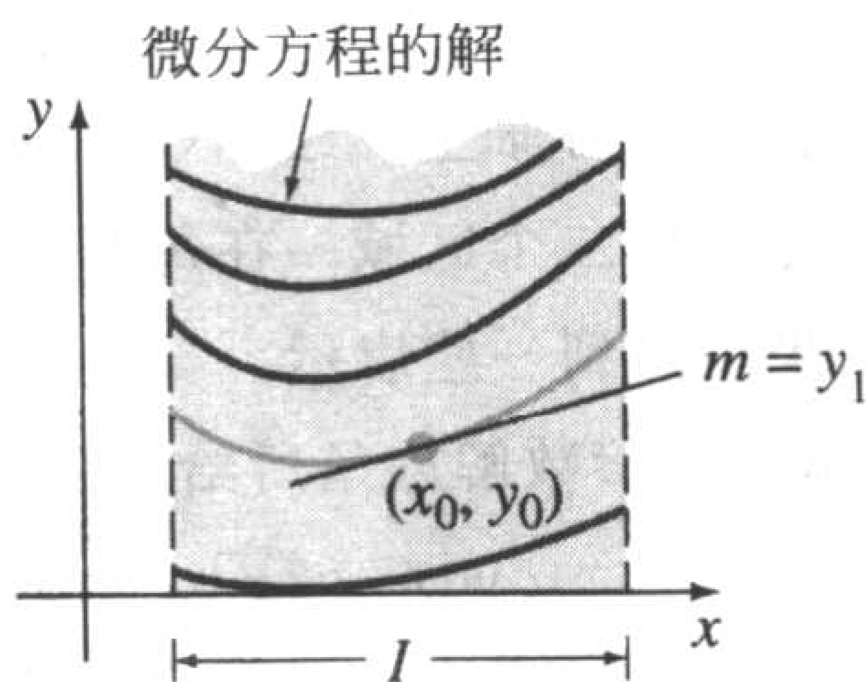


图 1.9　二阶初值问题

解 n 阶初值问题常用方程的 n 参数解族解出 n 个特定的常数，然后得到该方程的特解，这个特解满足 n 个初始条件．

例 1　一阶初值问题

可以很容易地证明 $y=ce^x$ 是一阶方程 $y'=y$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的单参数解族．如果指定一个初始条件，比如说，$y(0)=3$，然后把 $x=0$，$y=3$ 代入解族，得到常数 $3=ce^0=c$．因此，$y=3e^x$ 是初值问题

$$y'=y,\quad y(0)=3$$

的解．现在需要让微分方程的解通过点$(1,\ -2)$而不是$(0,\ 3)$，那么由 $y(1)=-2$ 可得，$-2=ce$ 或$c=-2e^{-1}$．$y=-2e^{x-1}$是初值问题

$$y'=y,\quad y(1)=-2$$

的一个解．这两个函数的图像如图 1.10 所示．■

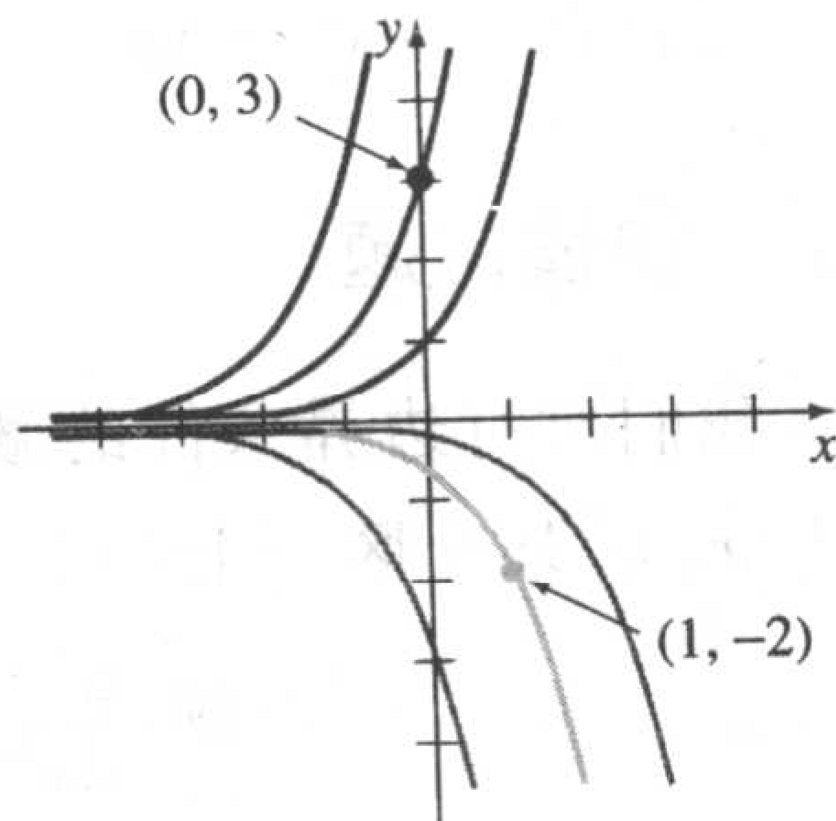


图 1.10　初值问题的解

例 2　二阶初值问题

在 1.1 节中的例 4 中，我们知道 $x=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t$ 是方程 $x''+16x=0$ 的双参数解族．求初值问题

$$x''+16x=0,\ x(\pi/2)=-2,\quad x'(\pi/2)=1 \tag{4}$$

的解．

解 首先把 $x(\pi/2)=-2$ 代入所给的解族中得 $c_1\cos 2\pi+c_2\sin 2\pi=-2$. 因为 $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$, 解得 $c_1=-2$. 然后把 $x'(\pi/2)=1$ 代入单参数解族 $x(t)=-2\cos 4t+c_2\sin 4t$ 中. 求它的微分, 然后令 $t=\pi/2$, $x'=1$, 得 $8\sin 2\pi+4c_2\cos 2\pi=1$, 可解出 $c_2=1/4$. 因此, $x=-2\cos 4t+1/4\sin 4t$ 是(4)的一个解. ■

存在性和唯一性 初值问题中有两个基本的问题:

解存在吗?

如果解存在, 那么它唯一吗?

形如(2)的初值问题, 问:

存在性 {微分方程 $dy/dx=f(x, y)$ 有解吗? 有一条通过 (x_0, y_0) 的解曲线吗?}

唯一性 {什么时候只有一个解存在? 曲线通过点 (x_0, y_0) 吗?}

注意在例1和例2中, 用"一个解"而不是"这个问题的解". "一个"就说明其他的解也可能存在. 基于这一点, 我们还没有证明问题存在唯一解. 下个例子给出了带有两个解的初值问题.

例3 一个初值问题可以有几个解

方程 $y=0$ 及 $y=\frac{1}{16}x^4$ 都满足微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 以及初值条件 $y(0)=0$, 因此初值问题

$$dy/dx = xy^{1/2}, y(0) = 0$$

至少有两个解. 正如图1.11所示, 这两个函数的图形都通过同一点(0, 0). ■

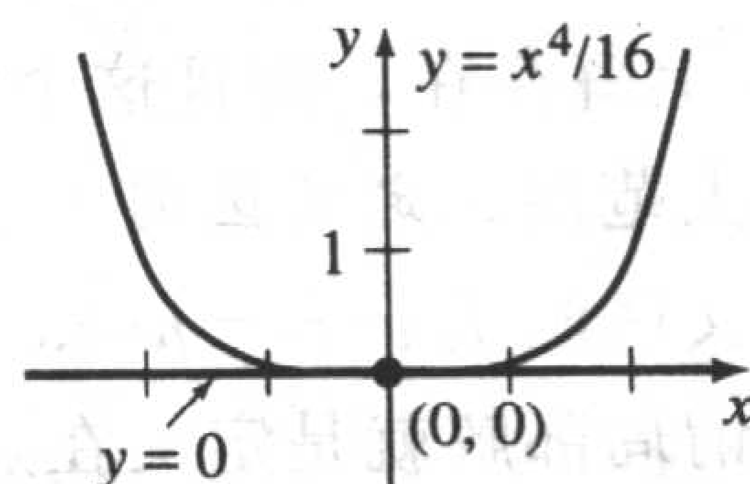


图 1.11 同一个初值问题的两个解

在一般的微分方程中都给出适当的限制条件, 使得我们可以相当肯定地说多数微分方程有解并且初值问题的解可能是唯一的. 但是在现实中, 问题没有那么简单. 因此需要进一步知道初值问题的解是否存在, 如果存在, 是否唯一. 因为在接下来的两章中将讨论一阶微分方程, 所以这里不加证明地给出一个定理, 这个定理给出了形如(2)的一阶初值问题的解存在并且唯一的充分条件. 我们将在第4章中讨论二阶初值问题解的存在性和唯一性.

定理 1.1 唯一解的存在性

令 R 是定义在 xy 平面上 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 的矩形区域, 并使得点 (x_0, y_0) 在其内部. 如果 $f(x, y)$ 及 $\partial f/\partial y$ 在 R 上是连续的, 那么存在某个区间 I_0: $x_0-h<x<x_0+h$, $h>0$, 包含在 $a\leqslant x\leqslant b$ 内, 并有唯一的一个定义在 I_0 上的函数 $y(x)$ 是初值问题(2)的解.

上述结论是一阶微分方程最重要的一个存在性和唯一性定理, 因为 $f(x, y)$ 和 $\partial f/\partial y$ 的连续性相对来说容易验证. 定理1.1的几何图形如图1.12所示.

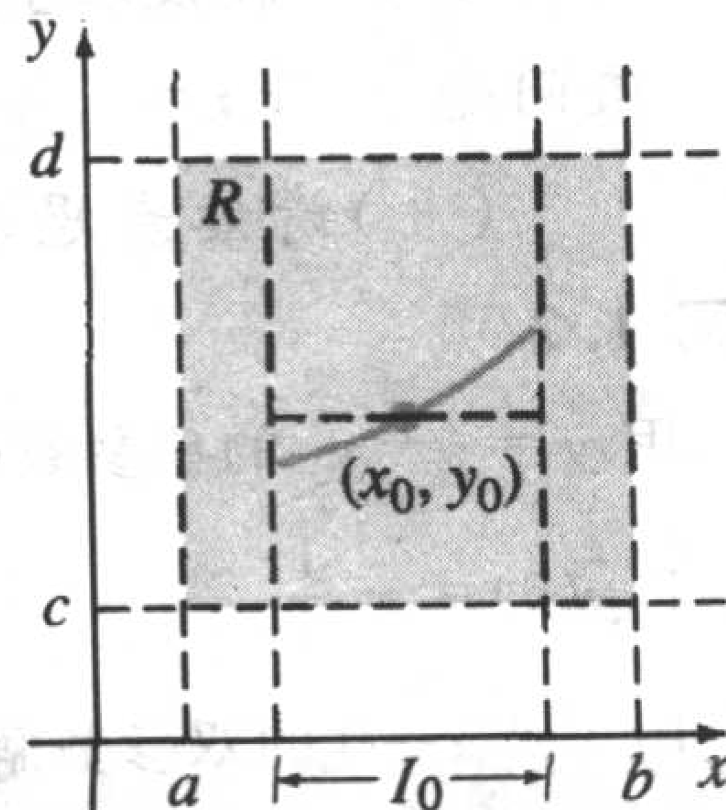


图 1.12 矩形区域 R

例 4 回顾例 3

例 3 中微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 至少有两个解，它们的图形通过(0, 0). 对函数

$$f(x,y)=xy^{1/2}, \text{及} \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{2y^{1/2}}$$

的研究表明它们在 $y>0$ 的上半平面是连续的. 根据定理 1.1，我们可以说在 $y>0$ 的上半平面中的任何点(x_0, y_0)，并以 x_0 为中心的区域上，所给的微分方程有唯一解. 因此，即使不解方程，我们也知道在以 2 为中心的某个区间上初值问题 $dy/dx=xy^{1/2}$，$y(2)=1$ 有唯一解. ■

在例 1 中，定理 1.1 保证了初值问题 $y'=y$，$y(0)=3$ 和 $y'=y$，$y(1)=-2$ 分别除了 $y=3e^x$ 和 $y=-2e^{x-1}$ 之外没有别的解. 这个结论可以从 $f(x, y)=y$ 和 $\partial f/\partial y=1$ 在整个 xy 平面上的连续性得到. 进一步，解定义的区间 I 可以扩展到$(-\infty, +\infty)$.

存在性和唯一性的区间 假定 $y(x)$表示初值问题(2)的一个解. 以下三个 x 实轴上的集合可能是不同的：函数 $y(x)$的定义域，解 $y(x)$的定义域或存在的区间 I，存在性和唯一性的区间 I_0. 1.1 节的例 2 说明了函数定义域和定义区间 I 的区别. 现假定(x_0, y_0)是定理 1.1 中区域 R 中的一个内点. 函数 $f(x, y)$在 R 上的连续性充分保证了 $dy/dx=f(x, y)$，$y(x_0)=y_0$ 在某个区间 I 上至少存在一个解. 初值问题的定义区间 I 通常是包含 x_0 的最大区间，在这个区间上解 $y(x)$有定义且可微. 区间 I 依赖于 $f(x, y)$和初始条件 $y(x_0)=y_0$. 请见练习 1.2 中的习题 27、28. R 上一阶偏导数 $\partial f/\partial y$ 的连续性条件使得我们不但可以说在包含 x_0 的某个区间 I_0 上解存在，而且这个唯一解满足 $y(x_0)=y_0$. 但是，定理 1.1 没有告诉我们区间 I 和 I_0 该取多大范围；定义区间 I 不一定取和 R 一样，存在性和唯一性的区间 I_0 不一定取和 I 一样大. 定义区间 I_0：$x_0-h<x<x_0+h$ 的 $h>0$ 可以非常小，并且最好认为解 $y(x)$在局部是唯一的，所谓局部解就是定义在点(x_0, y_0)周围区域上的解. 请参考练习 1.2 中的习题 34.

注 (i)定理 1.1 中的条件是充分的但不是必要的. 当 $f(x, y)$和 $\partial f/\partial y$ 在矩形区域 R 上连续时，(2)的解必定存在并且唯一，而不论(x_0, y_0)在 R 的什么位置. 然而，如果定理 1.1 中的假设条件不满足，那么任何情况都有可能出现：问题(2)仍有一个解，而且这个解仍有可能唯一，或它有几个解，或它根本没有解. 例 4 揭示了定理 1.1 假设在直线 $y=0$ 上对微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 不成立，但是这并不奇怪，正如我们在本节例 3 中看到的一样，有两个定义在普通区间 $-h<x<h$ 上的解满足 $y(0)=0$. 另一方面，定理 1.1的假设在直线 $y=1$ 上对微分方程 $dy/dx=|y-1|$ 不成立. 然而，可以证明初值问题 $dy/dx=|y-1|$，$y(0)=1$ 的解是唯一的. 请读者自行求出这个解.

(ii)请读者思考练习 1.2 中的习题 33，并把它牢记于心.

练习 1.2

用 $y'=y-y^2$ 的单参数解族 $y=1/(1+c_1e^{-x})$求解习题 1、2 中初值问题的解.

1. $y(0)=-\frac{1}{3}$
2. $y(-1)=2$

用 $x''+x=0$ 的双参数解族 $x=c_1\cos t+c_2\sin t$ 求解习题 3～6 中初值问题的解.

3. $x(0)=-1$，$x'(0)=8$
4. $x(\pi/2)=0$，$x'(\pi/2)=1$
5. $x(\pi/6)=1/2$，$x'(\pi/6)=0$
6. $x(\pi/4)=\sqrt{2}$，$x'(\pi/4)=2\sqrt{2}$

用 $y''-y=0$ 的双参数解族 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 求解习题 7～10 中所给初值问题的解.

7. $y(0)=1$，$y'(0)=2$

8. $y(1)=0$，$y'(1)=e$

9. $y(-1)=5$，$y'(-1)=-5$

10. $y(0)=0$，$y'(0)=0$

至少求出习题 11、12 中所给初值问题的两个解.

11. $y'=3y^{2/3}$，$y(0)=0$

12. $xy'=2y$，$y(0)=0$

在习题 13～20 中，求 xy 平面上的一个区域，使得微分方程在这个区域上有唯一解，并且通过点 (x_0, y_0).

13. $\frac{dy}{dx}=y^{2/3}$

14. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{xy}$

15. $x\frac{dy}{dx}=y$

16. $\frac{dy}{dx}-y=x$

17. $(4-y^2)y'=x^2$

18. $(1+y^3)y'=x^2$

19. $(x^2+y^2)y'=y^2$

20. $(y-x)y'=y+x$

判断习题 21～24 中，定理 1.1 是否能保证微分方程 $y'=\sqrt{y^2-9}$ 有通过下列点的唯一解.

21. (1, 4)

22. (5, 3)

23. (2, −3)

24. (−1, 1)

25. (a)求解微分方程 $xy'=y$ 的单参数解族，并证明解族中的每个解都是初值问题 $xy'=y$，$y(0)=0$ 的解.

(b)求出 xy 平面上的一个区域 R，使得(a)中的微分方程 $xy'=y$ 存在唯一解并且此解通过 R 中的点 (x_0, y_0).

(c)证明分段函数

$$y=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\geqslant 0\end{cases}$$

满足条件 $y(0)=0$. 判断这个函数是否也是(a)中初值问题的一个解.

26. (a)证明 $y=\tan(x+c)$ 是微分方程 $y'=1+y^2$ 的单参数解族.

(b)因为 $f(x, y)=1+y^2$ 和 $\partial f/\partial y=2y$ 是处处连续的，因此定理 1.1 中的区域 R 可以拓展到整个 xy 平面上. 用(a)中的解族求出初值问题 $y'=1+y^2$，$y(0)=0$ 的一个显式解. 尽管 $x_0=0$ 在区间 $-2<x<2$ 上，解释为什么解在这个区间上没有定义.

(c)求(b)中初值问题解的最大定义域 I.

27. (a)证明 $y=-1/(x+c)$ 是微分方程 $y'=y^2$ 的单参数解族.

(b)因为 $f(x, y)=y^2$ 和 $\partial f/\partial y=2y$ 是处处连续的，所以定理 1.1 中的区域 R 可以是整个 xy 平面. 求(a)中解族的一个特解，使其满足 $y(0)=1$. 求(a)中解族的一个特解满足 $y(0)=-1$. 并写出使每个初值问题的解有意义的最大区间 I.

(c)求(a)中解族的一个特解，使其满足 $y'=y^2$，$y(0)=y_0$，$y_0\neq 0$. 解释为什么解的最大定义区间 I 是 $-\infty<x<1/y_0$，或是 $1/y_0<x<+\infty$.

(d)求初值问题 $y'=y^2$，$y(0)=0$ 解的最大定义域 I.

28. (a)证明 $3x^2-y^2=c$ 是微分方程 $y\,dy/dx=3x$ 的单参数解族.

(b)绘出隐式解 $3x^2-y^2=3$ 的图形. 求(a)中微分方程的所有显式解 $y=\phi(x)$. 给出每个显式解的定义域 I. 点 $(-2, 3)$ 在图形 $3x^2-y^2=3$ 上，但是哪一个显式解满足 $y(-2)=3$?

(c)利用(a)中的解族求出初值问题 $y\,dy/dx=3x$，$y(2)=-4$ 的一个隐式解. 然后绘出这个初值问题显式解的图形，并给出定义域 I.

(d) $y\,dy/dx=3x$ 有通过原点的显式解吗?

讨论题

29. 考虑初值问题 $y'=x-2y$，$y(0)=1/2$. 用数学语言解释图 1.13 中所示的两条曲线哪条是合理的解曲线.
30. 解释为什么一阶初值问题 $dy/dx=f(x, y)$，$y'(x_0)=y_1$ 没有意义，其中 y_1 是任意实数.
31. 求 x_0 的值，使得初值问题 $y'+2y=3x-6$，$y(x_0)=0$ 解的图形和 x 轴在$(x_0, 0)$点相切，并给出求解过程.
32. 图 1.14 给出了二阶微分方程 $d^2y/dx^2=f(x, y, y')$解族中四个解的图形. 给每一个解曲线寻找一个合适的初始条件.

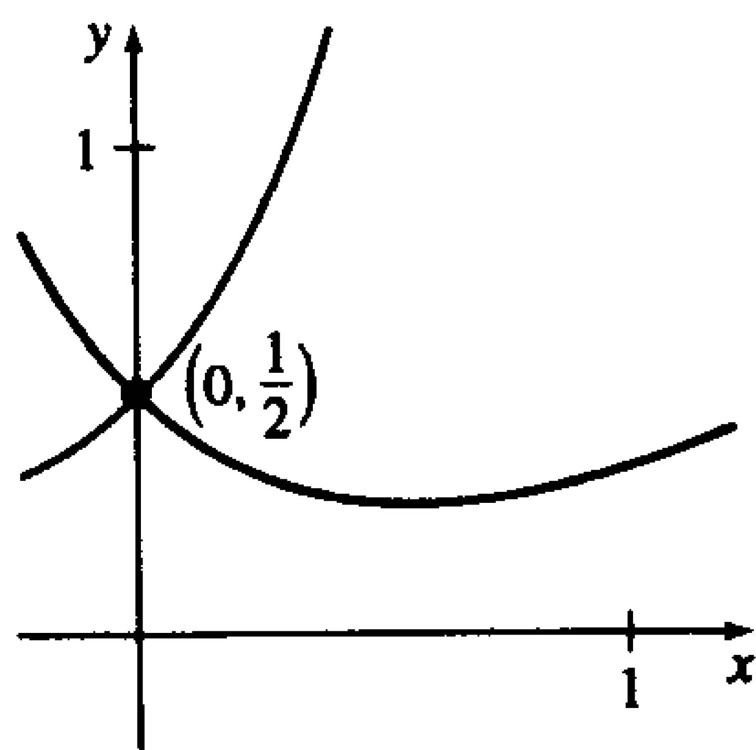


图 1.13

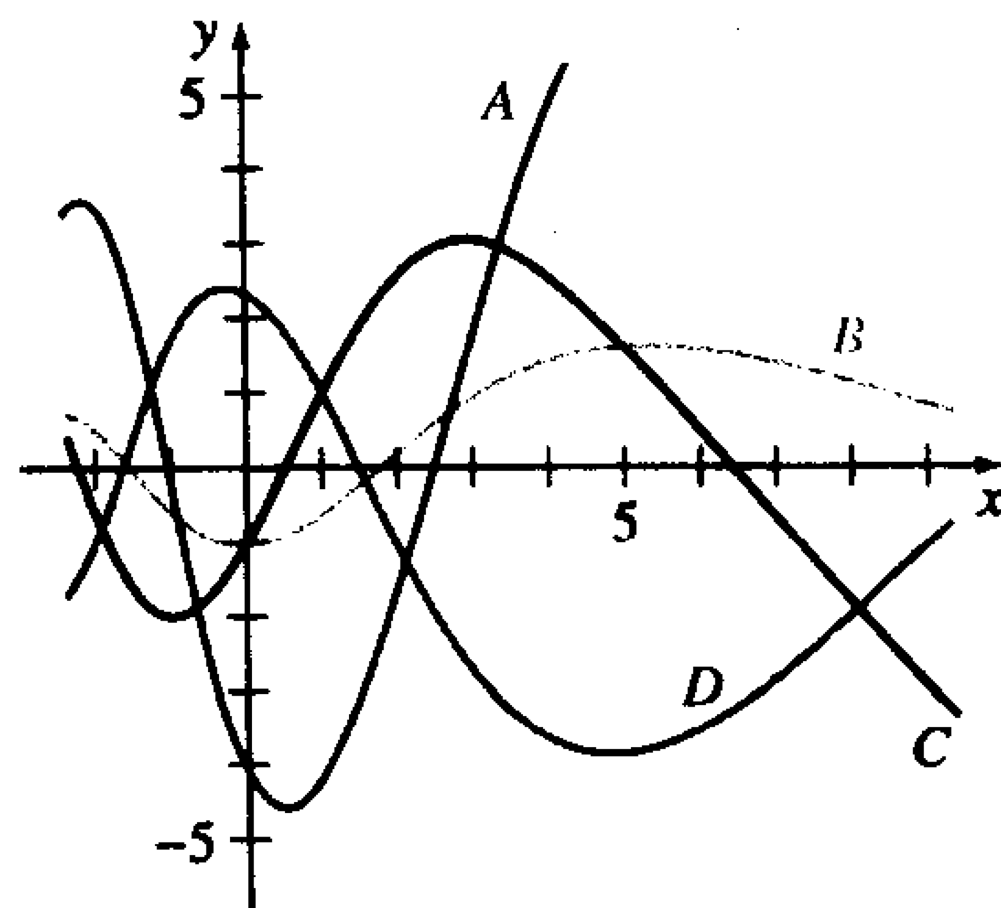


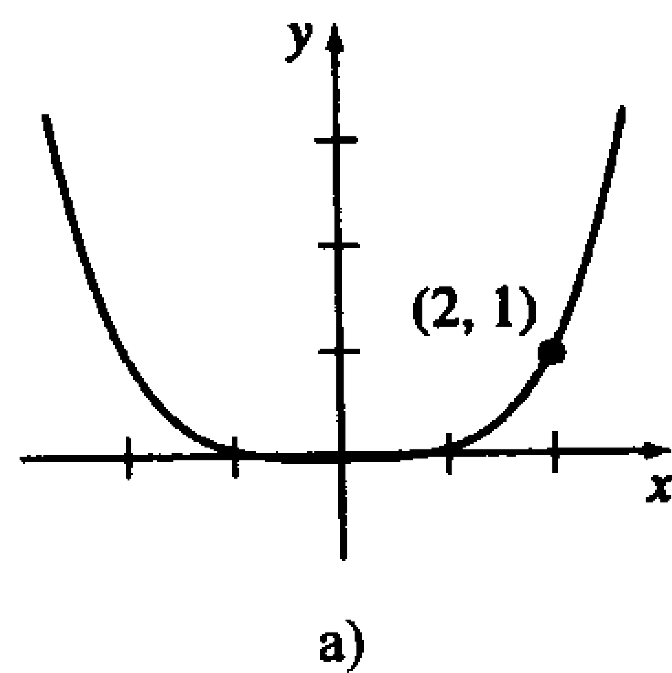
图 1.14

(a) $y(1)=1$，$y'(1)=-2$
(b) $y(-1)=0$，$y'(-1)=-4$
(c) $y(1)=1$，$y'(1)=2$
(d) $y(0)=-1$，$y'(0)=2$
(e) $y(0)=-1$，$y'(0)=0$
(f) $y(0)=-4$，$y'(0)=-2$

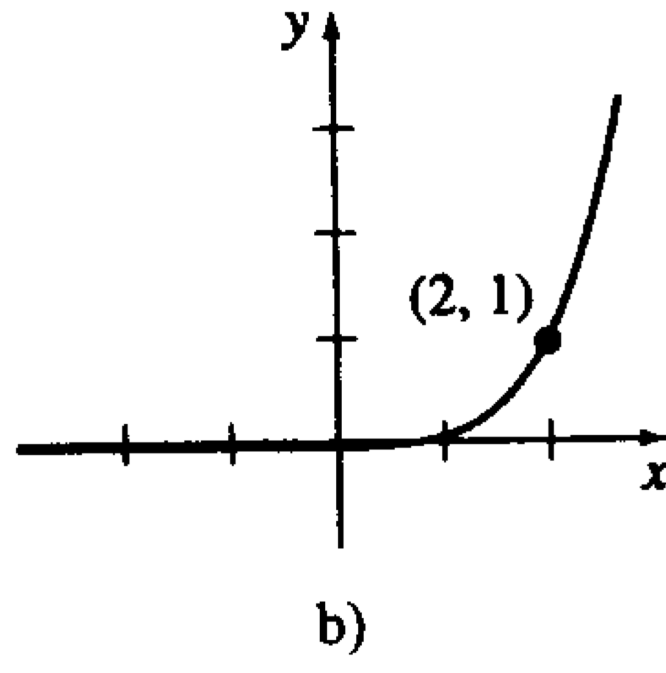
33. 设一阶微分方程 $dy/dx=f(x, y)$有一个单参数解族，并且 $f(x, y)$满足定义 1.1 的假设，它定义在 xy 平面的某个矩形区域 R 上. 讨论为什么两个不同的解曲线不会相交，或在 R 中的某点(x_0, y_0)相切.
34. 函数

$$y(x)=\frac{1}{16}x^4, \quad -\infty<x<\infty \text{ 和 } y(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{16}x^4, & x\geqslant 0\end{cases}$$

分别如图 1.15(a)和(b)所示，很明显它们是不同的. 这两个函数都是初值问题 $dy/dx=xy^{1/2}$，$y(2)=1$ 在$(-\infty, +\infty)$上的解. 这点和例 4 的最后一句话是矛盾的，请解释这个矛盾.



a)



b)

图 1.15 $dy/dx=xy^{1/2}$，$y(2)=1$ 的两个解

35. 考虑微分方程 $y'=y-x+1$. 若对微分方程进行微分，然后替代其中的 y'，则有 $y''=y'-1=(y-x+1)-1=y-x$. 讨论下列信息的几何意义：

$$y=x-1 \text{ 时 } y'=0, y=x \text{ 时 } y''=0;$$
$$y>x-1 \text{ 时 } y'>0, y>x \text{ 时 } y''>0;$$
$$y<x-1 \text{ 时 } y'<0, y<x \text{ 时 } y''<0.$$

用这些信息绘出微分方程的解族曲线. 请再参考习题 33.

1.3 作为数学模型的微分方程

本节我们集中讨论如何用微分方程来构造数学模型. 在第 2 章和第 4 章里学习了解微分方程的方法以后，我们再来解第 3 章和第 5 章里的一些模型.

数学模型 我们经常需要用数学语言来描述一些现实生活中的现象，无论是在物理学、社会学中，还是在经济学中. 这些现象的数学描述称为数学模型(mathematical model)，这些模型是为我们的某种目标建立起来的. 例如，我们希望通过研究生态系统里动物数量的增长来了解其内在的运行机制，或者希望通过分析化石或地层中放射性物质的衰减来判断化石的年代.

构建一个系统的数学模型的步骤如下：

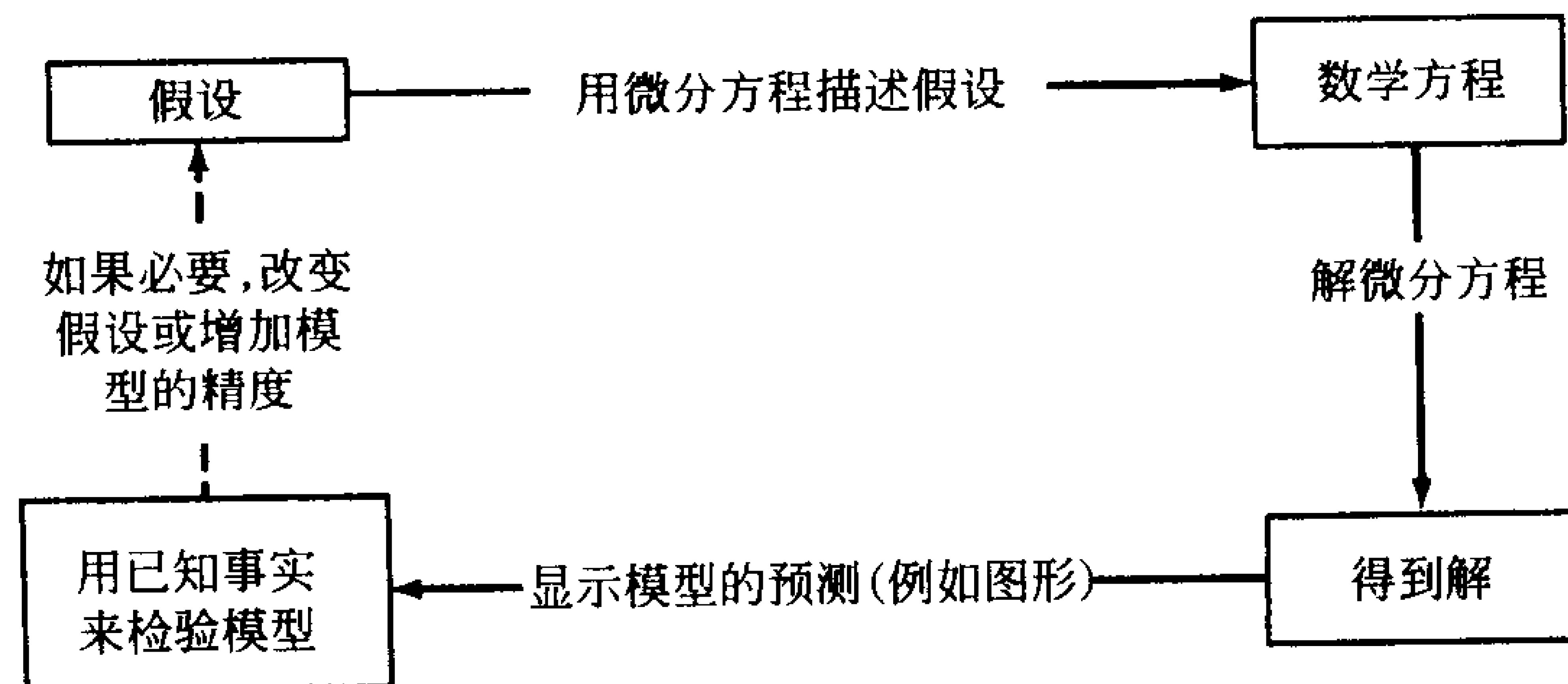
(ⅰ)识别对改变系统有作用的变量. 起初我们可以不用把所有变量都选进模型. 在这步中，我们给出模型的求解精度.

(ⅱ)我们做一些关于这个系统的合理假设. 这些假设也可以包括任何对系统适用的经验法则.

对于某些情况，低精度的模型也能很好地满足我们的需求. 例如，读者可能已经在物理课上学过，在为地球表面附近做落体运动的物体建模时，空气的摩擦阻力有时可以忽略不计，但是如果是一个从事精确计算远程导弹飞行路径的科学家，就必须考虑空气阻力以及像地球表面曲率这样的一些其他因素.

因为关于系统的假设经常包括一个或几个变量的变化率，所以所有这些假设的数学描述可能是一个或几个包含导数的方程. 换句话说，数学模型可能是一个微分方程或微分方程组.

一旦建立起一个微分方程或方程组的数学模型，我们所面对的就是解方程或方程组这样棘手的问题. 如果我们能解它，且当这个解和系统行为的试验数据或已知事实相符，我们就认为这个模型是合理的. 但是如果这个解预测能力很差的话，我们就增加求解的精度或做一些另外的假设. 然后建模的过程如此反复，如下图所示.



当然，提高模型精度增加了模型的复杂性，同时也增加了我们不能得到显式解的可能性.

物理系统的数学模型通常包括时间变量 t. 模型的解给出了系统的状态(state of the system)；换言之，对应于 t 的因变量的值描述了系统过去、现在和将来的状态.

人口动力学 最早通过数学方法测量人口增长(population growth)的模型是英国经济学家托马斯·马尔萨斯在1798年所建立的模型. 马尔萨斯模型的基本假设是一个国家在某个时刻的人口增长率和当时的人口总数成一定比例[⊖]. 也就是在 t 时刻的人口越多，将来的人口也就越多. 用数学语言描述就是，用 $P(t)$ 表示 t 时刻的总人口，则这个假设可以表达为：

$$\frac{dP}{dt} \propto P \text{ 或 } \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

这里 k 是比例常数，这个简单的模型忽略了很多影响人口增长或减少的因素，但是却相当精确地预测了1790～1860年间的美国人口. 按照(1)所表示的速率增长的人口是非常罕见的；但是，(1)仍然被用来描述小数量人口在短期内的增长模型(例如有盖培养皿中细菌的繁殖).

放射性衰减 原子的原子核由质子和中子组成. 很多质子和中子的组合是不稳定的，也就是说原子会衰减或转变成其他物质的原子. 这类原子核被称为是放射性的. 例如，具有强放射性的镭-226会转变成气态氡-222. 为了给这种放射性衰减(radioactive decay)建立数学模型，假设一种物质的衰减速度 dA/dt 与 t 时刻该物质剩余总量 $A(t)$(更准确地说是原子核的总数)成正比：

$$\frac{dA}{dt} \propto A \text{ 或 } \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

当然，方程(1)和(2)是完全相同的；不同的仅仅是符号表示的意义和比例常数不同. 对于增长的问题来说，正如我们期望的那样，在(1)中 $k>0$，对于衰减问题，在(2)中 $k<0$.

增长模型(1)也可以看成是 $dS/dt=rS$，当年利率 r 是连续复利时它表示资金 S 的增值过程. 衰减模型(2)也应用在生物领域，比如它可以确定一种药物的半衰期，也就是药物在体内通过排泄或新陈代谢消耗50%所用的时间. 在化学领域，衰减模型(2)描述了一阶化学反应的过程. 以上诸例子基于以下共识：

单个的微分方程可以作为许多不同现象的数学模型.

数学模型中通常有某种边界条件的限制. 例如，在模型(1)和(2)中，我们希望知道初始人口 P_0 和初始放射性物质的总数 A_0. 如果初始时刻是 $t=0$，那么我们知道 $P(0)=P_0$，$A(0)=A_0$. 换言之，一个数学模型的约束条件可能是初始值问题，也可能是稍后我们在5.2节中看到的边界值问题.

牛顿热力学定律 根据牛顿热力学定律，物体内温度的改变速率与物体的温度和其周围介质(也就是所谓的环境温度)温度之差成正比. 如果 $T(t)$ 表示物体在 t 时刻的温度，T_m 表示其周围介质的温度，dT/dt 表示物体温度变化的速率，牛顿热力学定律用数学语言描述就是：

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \text{ 或 } \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

这里 k 是比例常数. 不论是在冷却还是加热模型中，如果 T_m 是常数，那么 $k<0$.

⊖ 若两个数 u、v 成比例，则记为 $u \propto v$. 也就是说一个数是另一个数的常数倍：$u=kv$.

疾病传播 有一类传染病，例如流感病毒，通过人与人之间的接触传染．令 $x(t)$ 表示感染病毒的人数，$y(t)$ 表示未感染的人数．假设疾病传播的速率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 与这两个群体之间相互接触的人数成正比．假设相互接触的人数与 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的联合函数 xy 成正比，那么

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kxy, \tag{4}$$

这里 k 是通常的比例常数．设一个小社区有固定的 n 个人口，如果一个感染病毒的人进入社区，那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的关系就是 $x+y=n+1$．用这个方程消去(4)中的 y，得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(n+1-x). \tag{5}$$

(5)有一个明显的初始条件 $x(0)=1$．

化学反应 微分方程(1)所表示的放射性物质的分解称为一阶反应(first-order reaction)．在化学中，有一类反应遵循一个同样的经验法则：如果物质 A 的分子分解成更小的分子，那么就有一个假设成立，即这种分解的速率与原物质的剩余总量成正比；也就是说若 $x(t)$ 表示物质 A 在任何时刻的剩余总量，那么 $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t=kX$，这里 k 是负的常数，因为 X 是不断减少的．一阶化学反应的一个例子就是 $(CH_3)_3CCl$ 转变为 $(CH_3)_3COH$：



$$(CH_3)_3CCl+NaOH \longrightarrow (CH_3)_3COH+NaCl.$$

其反应的速率仅由 $(CH_3)_3CCl$ 的浓度决定，但是，在化学反应



$$CH_3Cl+NaOH \longrightarrow CH_3OH+NaCl$$

中，一分子 CH_3Cl 消耗一分子 NaOH，然后生成一分子 CH_3OH 和一分子 NaCl．这个反应的速率与剩余 CH_3Cl 和 NaOH 数量的乘积成正比．为了把这第二种反应一般化，我们假设一分子 A 和一分子 B 生成一分子 C．如果用 X 表示 C 在 t 时刻生成的总量，α、β 依次表示物质 A、B 在 $t=0$ 时的数量(初始数量)，那么 A、B 瞬时未反应的分别为 $\alpha-X$ 和 $\beta-X$，因此 C 的生成速率为

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=k(\alpha-X)(\beta-X), \tag{6}$$

这里 k 是比例常数．方程(6)表示的反应模型称为二阶反应(second-order reaction)．

混合物问题 两种不同浓度的盐溶液混和在一起，就产生了用一阶微分方程所描述的溶液中盐的数量问题．假定在大容器里盛有 300 gal[1] 盐溶液(即在水中融解一定数量的盐所得到的溶液)．另外一个盐溶液以每分钟 3 gal的速率倒入大容器中；倒入的盐溶液浓度是每 gal 2 lb[2] 盐．容器里的溶液经过充分搅拌后，再以同样的速率倒出．请见图 1.16．如果 $A(t)$ 表示 t 时刻容器中盐的数量(单位为 lb)，那么 $A(t)$ 变化的净速率是

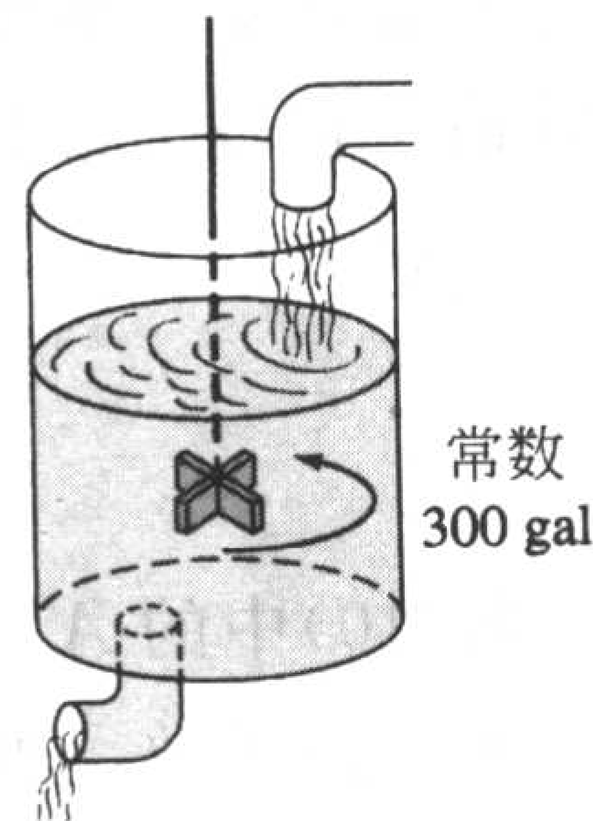


图 1.16

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\text{盐的倒入}\\\text{速率}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{盐的倒出}\\\text{速率}\end{pmatrix}=R_i-R_o. \tag{7}$$

---

[1] 1 USgal=3.785 dm³．——编辑注

[2] 1 lb=0.453 kg．——编辑注

盐倒入的速率(单位是 lb/min)R_i 是

$$R_i = \underset{\text{盐溶液的倒入速率}}{(3\text{gal/min})} \cdot \underset{\text{倒入盐的浓度}}{(2\ \text{lb/gal})} = \underset{\text{盐的倒入速率}}{6\text{lb/min}}.$$

现因为溶液在倒入的同时也在以同样的速率倒出，那么 t 时刻容器中盐溶液的数量是常数 300gal. 因此，容器中盐的浓度以及倒出溶液的浓度为 $A(t)/300$ lb/gal，因此盐倒出的速率 R_o 为

$$R_o = \underset{\text{盐溶液的倒出速率}}{(3\text{gal/min})} \cdot \underset{\text{倒出盐的浓度}}{\left(\frac{A}{300}\text{lb/gal}\right)} = \underset{\text{盐的倒出速率}}{\frac{A}{100}\ \text{lb/min}}.$$

那么方程(7)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 6 - \frac{A}{100}. \tag{8}$$

排水问题 在水力学上，Torricelli 定理表述的是水从深度为 h 的容器底部的一个薄壁孔中流出的速率 v，这里 v 和在高度 h 处做自由落体的物体速度相等，即 $v=\sqrt{2gh}$，这里 g 是重力加速度. v 的表达式是从动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 和势能 mgh 的等式中解出的. 假定水在重力作用下从一个盛满水的容器的底部小孔中流出. 我们要求出在任何时间 t 时容器中水的高度 h. 考虑一个如图 1.17 所示的容器. 如果小孔的面积是 A_h(单位是 ft²[㊀])，水流出容器的速度是 $v=\sqrt{2gh}$(单位是 ft/s[㊁])，那么每秒流出容器的水的体积是 $A_h\sqrt{2gh}$(单位是 ft³/s[㊂]). 因此，如果用 $V(t)$ 表示 t 时刻时容器中水的体积，那么

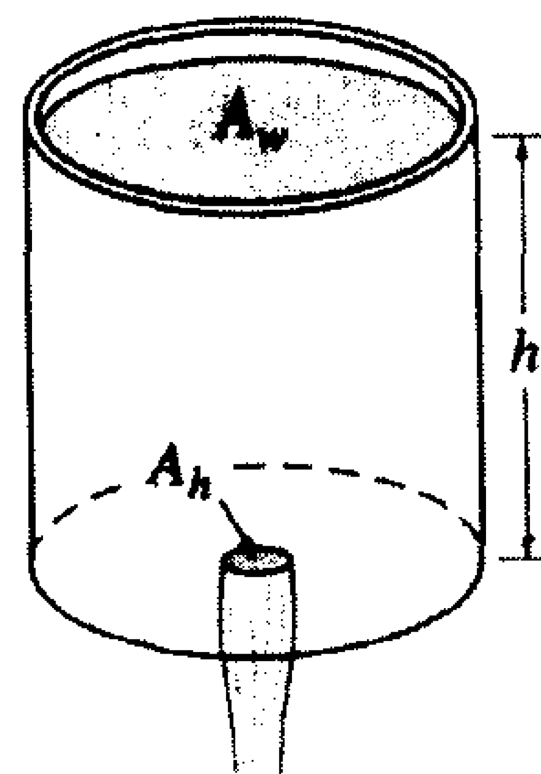


图 1.17

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -A_h\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

这里负号表示 V 是不断递减的. 注意这里忽略了小孔的摩擦，它可能会使水的流速减慢. 如果这个容器中的水在任何 t 时刻的体积可以写成 $V(t)=A_wh$，这里 A_w(单位是 ft²)是水的上表面面积，它是个常数(请见图 1.17)，那么 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=A_w\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$. 把这个表达式代入(9)式，我们就得到表示水在 t 时刻的高度的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{10}$$

注意到(10)中的 A_w 即使不是常数也是成立的，这种情况下，我们就必须把水的上表面的面积表示成 h 的函数，即 $A_w=A(h)$. 请参考练习 1.3 的习题 12.

串联电路 考虑如图 1.18(a)所示的单回路串联电路，包括一个电感线圈、一个电阻器和

㊀ 1 ft² = 0.092 9 m². ——编辑注

㊁ 1 ft/s = 0.304 8 m/s. ——编辑注

㊂ 1 ft³/s = 0.028 3 m³/s. ——编辑注

一个电容器．开关闭合后电路中的电流用$i(t)$表示；t时刻时电容器中的电量用$q(t)$表示．字母L、C、R分别表示感应系数、电容量、电阻，一般情况下都是常数．根据基尔霍夫第二定律(Kirchhoff's second law)，闭合回路中的外加电压$E(t)$必须等于回路中电压降的总和．图1.18(b)的符号和公式分别表示了经过电感线圈、电容器和电阻器的电压降．因为电流$i(t)$和电容器中的电量$q(t)$有关，$i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$，把三个电压降相加

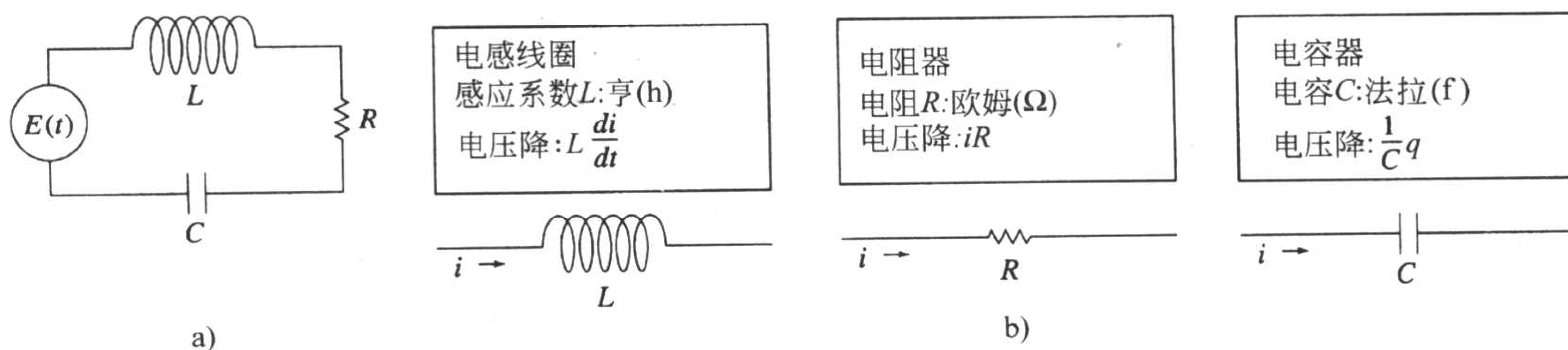


图 1.18

$$\underset{\text{电感线圈}}{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}=L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2},\quad \underset{\text{电阻器}}{iR}=R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\quad \underset{\text{电容器}}{\frac{1}{C}q}$$

它们之和等于外加电压降，因此产生了一个二阶微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=E(t). \tag{11}$$

我们将在5.1节中详细讨论形如(1)的方程．

落体运动 受力物体运动的数学模型通常用牛顿第二运动定律来描述．在初等物理学中，牛顿第一定律说明一个物体在不受外力的情况下要么保持静止，要么保持匀速运动．这也就是说，如果作用在物体上的外力之和$F=\Sigma F_k$为零，即合力为零，那么物体的加速度为零．牛顿第二运动定律(Newton's second law of motion)描述了当作用在物体上的合外力不是零时，合外力与物体的加速度a成正比，准确地说是$F=ma$，这里m是物体的质量．

假设一块石头从一个建筑物的顶部竖直向上抛出，如图1.19所示，那么在t时刻时，石块相对于地面的位置$s(t)$是多少？石块的加速度是二阶导数$\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$．如果设竖直向上的方向为正方向，石块只受重力，那么由牛顿第二定律得：

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-mg \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{12}$$

也就是说石块在地表附近所受的力$F=F_1=-W$和它的重量相等．重力$W=mg$，这里m是物体的质量，g是重力加速度．(12)式中的负号表示重力的方向是竖直向下的，和正方向相反．设建筑物的高度为s_0，石块的初始速度是v_0，那么s可由二阶初值问题解出：

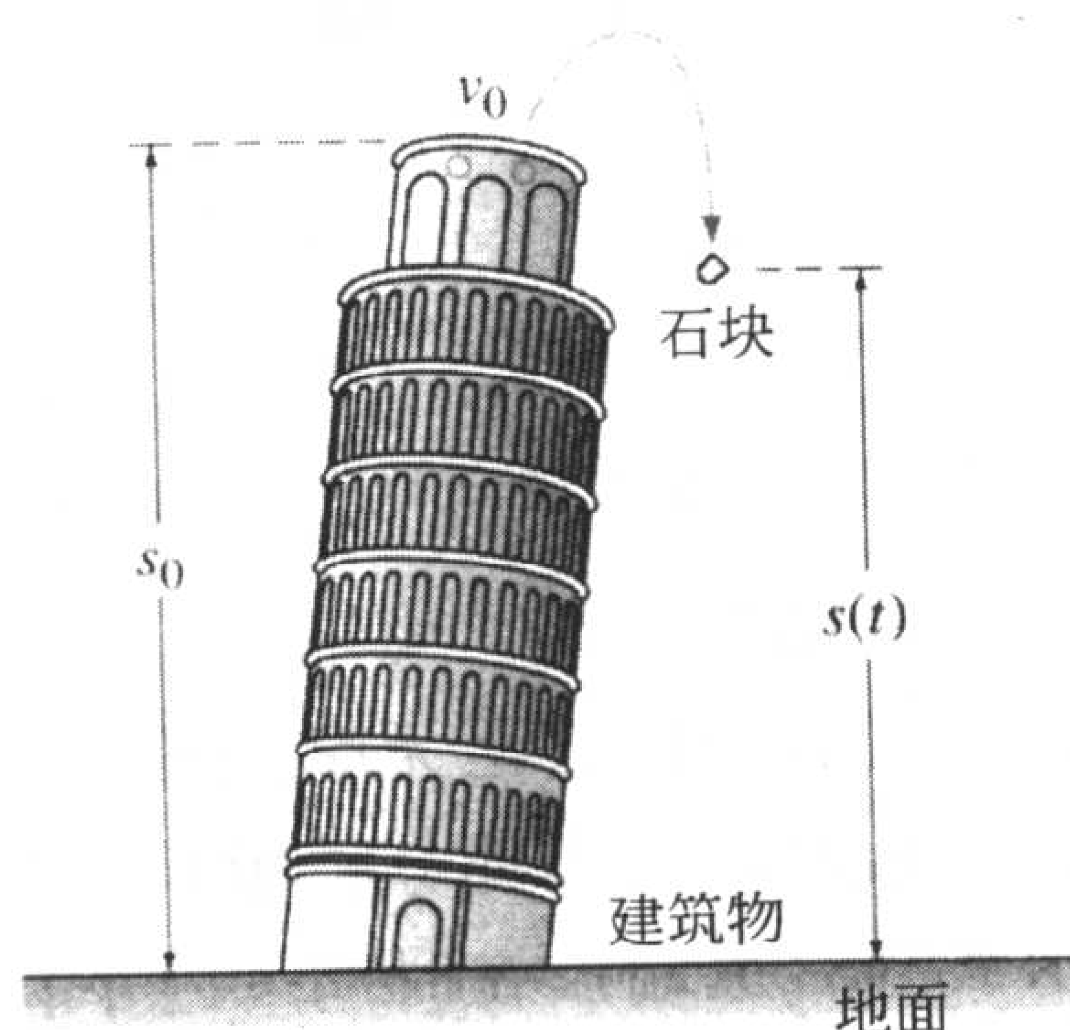


图 1.19

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g, s(0)=s_0, s'(0)=v_0. \tag{13}$$

尽管我们没有强调这个方程的解，但是由(13)式对 g 关于 t 求两次积分便可解出. 两个积分常数可以根据初始条件解出. 在初等物理学中，读者可能已经学过(13)式的解应该是 $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$.

落体与空气阻力 在伽利略做著名的比萨斜塔实验之前，人们普遍相信较重的物体做自由落体运动时比较轻的物体下落得快，比如说炮弹比羽毛下落得更快. 很明显，若炮弹和羽毛同时从相同的高度下落，前者速度较快，但这不是因为炮弹更重，而是因为它们的空气阻力不同. 在模型(13)中我们忽略了空气阻力. 在一些情况下，质量为 m 的物体，比如说有较低密度和不规则形状的羽毛，所遇到的空气阻力与它的瞬时速度 v 成正比. 这种情况下，我们设正方向为竖直向下，那么作用于物体的合外力是 $F=F_1+F_2=mg-kv$，这里物体所受的重力 $F_1=mg$ 是正方向的，而空气阻力 $F_2=-kv$，也叫粘性阻尼(viscous damping)，是反方向或竖直向上的. 请参考图 1.20. 因为 v 和加速度 a 有关，$a=dv/dt$，牛顿第二定律可以写成 $F=ma=m\,dv/dt$. 通过牛顿第二定律这种合外力的形式，我们可以得到一个一阶微分方程来描述物体在 t 时刻时的速度 $v(t)$，

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{14}$$

这里 k 是正的比例常数. 如果 $s(t)$ 是物体在 t 时刻与初始点的距离，那么 $v=ds/dt$，$a=dv/dt=d^2s/dt^2$. (14)式可以用 s 写成一个二阶微分方程

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt} \quad 或 \quad m\frac{d^2s}{dt^2}+k\frac{ds}{dt}=mg. \tag{15}$$

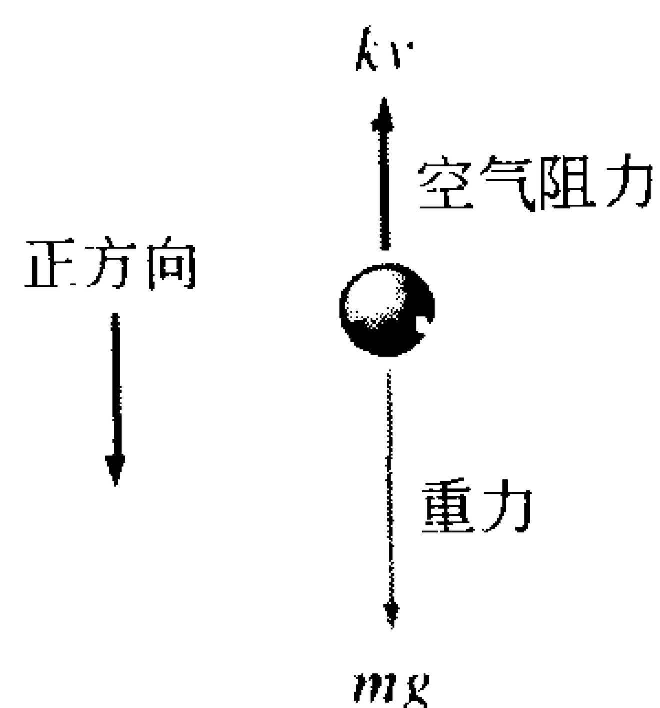


图 1.20 物体 m 的落体

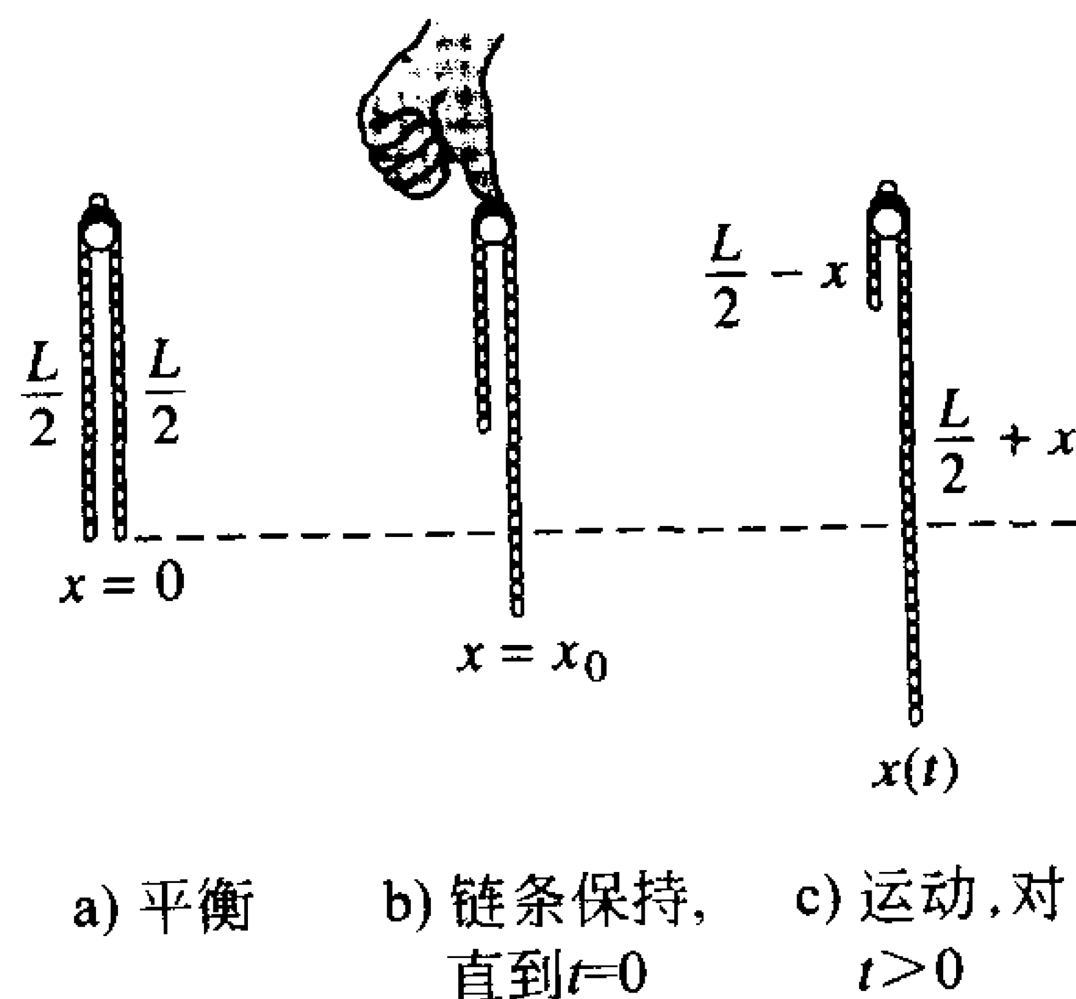


图 1.21

下滑链条问题 设一个长度为 Lft[⊖] 的均质链条，悬挂在墙上的一个铁钉上，高度在水平面以上. 假设铁钉是无摩擦的，链条的重量是 ρlb/ft. 图 1.21(a)表示链条悬挂处于平衡时的位置；如果让右边部分稍稍长出左边一点，那么链条将滑下铁钉. 设正方向是竖直向下，$x(t)$ 表示铁链右边端点在时间 t 内下降的距离. 相应于平衡位置有 $x=0$. 在图 1.21(b)中，$t=0$ 时，链条右边的端点下降 $x_0$ft，如图 1.21(c)所示运动中的链条，我们可以得到下列定量关系：

⊖ 1 ft=0.304 8m. ——编辑注

链条的重量：$W=(L\ \mathrm{ft})\cdot(\rho\mathrm{lb/ft})=L\rho$，

链条的质量：$m=W/g=L\rho/32$，

合外力：　$F=(L/2+x)\rho-(L/2-x)\rho=2x\rho.$

因为 $a=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$，$ma=F$ 可以写成

$$\frac{L\rho}{32}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2\rho x\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\frac{64}{L}x=0. \tag{16}$$

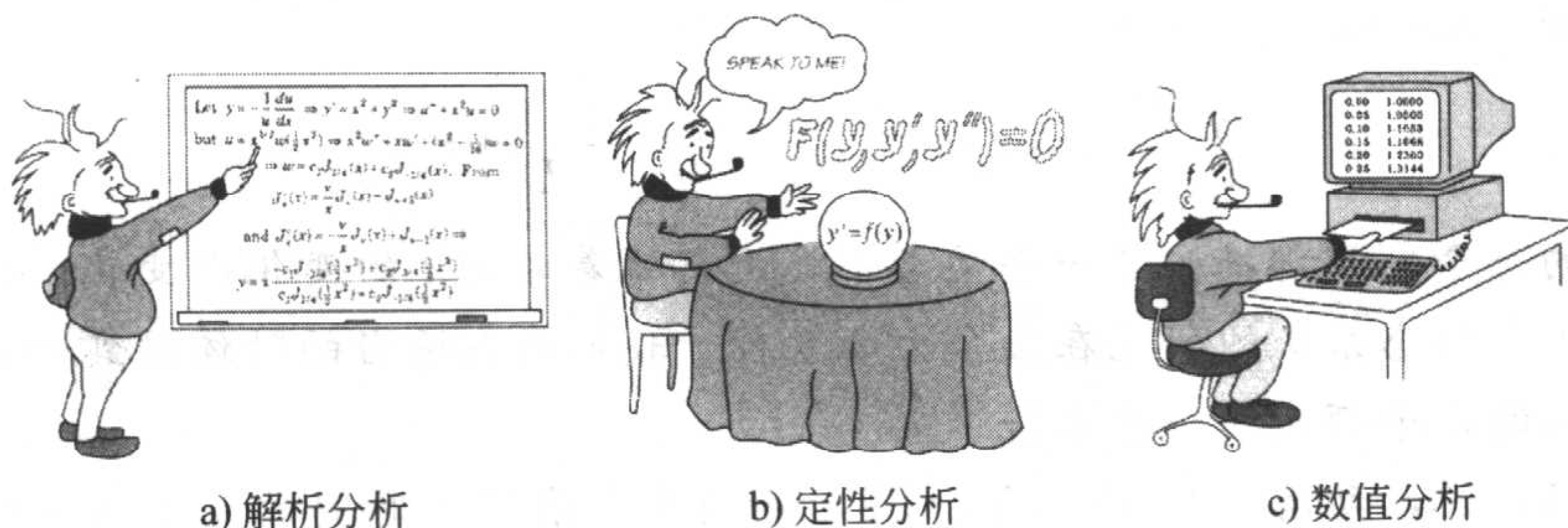
注　本节的每个例子都描述了一个动态系统，它随着时间 t 的变化而变化．作为数学的一个分支，动态系统的研究在当今十分盛行．我们将在适当的时候提到一些和我们的讨论相关的这个领域的一些术语．

更准确地说，动态系统(dynamical system)是由依赖于时间的变量组成的集合构成的，这些变量称为状态变量(state variable)，同时系统也包括一定的规则，这些规则可以使我们用某个时刻的状态变量来描述系统的状态(可能是过去的、现在的，或将来的状态)．动态系统可以分为离散时间系统和连续时间系统．在本书中，我们仅讨论连续时间动态系统，所有变量在整个时间区间上都有定义．连续时间动态系统的数学模型是微分方程或微分方程组．t 时刻的系统状态(state of the system)就是此时状态变量的值；t_0 时刻的系统状态设为数学模型的初始条件．初值问题的解称为系统的响应(response of the system)．例如，在放射性衰减的模型中，数学模型为 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=kA$．如果 t_0 时刻时放射性物质的数量已知，为 $A(t_0)=A_0$，那么解这个模型，我们可以得到 $t\geqslant t_0$ 时系统响应为 $A(t)=A_0\mathrm{e}^{(t-t_0)}$(请见 3.1 节)．系统响应 $A(t)$ 是系统的单状态变量．在落体问题中，系统响应，也就是初始条件为 $s(0)=s_0$，$s'(0)=v_0$ 的微分方程 $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2=-g$ 的解为 $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$，$0\leqslant t\leqslant T$，这里 T 表示石块落到地面的时间．状态变量是 $s(t)$ 和 $s'(t)$，它们分别是石块距地面的垂直距离和在 t 时刻的速度．加速度 $s''(t)$ 不是状态变量，因为我们知道 t_0 时刻时的初始位置和初始速度决定了 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 区间上任何时刻 t 时的位置 $s(t)$ 和速度 $s'(t)=v(t)$，加速度 $s''(t)=a(t)$ 由微分方程 $s''(t)=-g$，$0<t<T$ 决定．

最后一点：本书中所研究的系统不全是动态系统．我们也会学习一些模型是微分方程的静态系统．

进一步说明　在本书中，读者将看到三种分析微分方程的方法．几个世纪以来，微分方程往往是科学家和工程师努力描述物理现象或把经验法则转换成数学方法的结晶．因此，无论是科学家、工程师还是数学家，常常耗费多年时间来求解微分方程．在求出微分方程的解以后，人们就开始研究它的性质了．这种求解的方法称为*解析方法*．人们曾经认识到很难或者根本不可能求出微分方程的显式解，数学家发现微分方程本身就提供了一些对求解有价值的信息．在一些可能的情况下，可以直接从微分方程知道一些问题的答案，比如说，微分方程有解吗？如果微分方程的解存在，并且满足初始条件，那么它是唯一解吗？未知解的性质是什么？解曲线的几何性质是怎样的？这种方法是*定性分析*的方法．最后，如果微分方程不能得到解析解，但是我们能证明它的解存在，下一个问题就是我们能得到这个解的近似值吗？这里我们涉及了数

值方法的领域. 对最后一个问题的回答是肯定的，这是因为微分方程可以做精确的近似计算. 在第 2 章中，我们先进行一阶常微分方程的定性分析，然后用一些解析方法解一些特殊的一阶方程，最后介绍一些初等的数值方法来结束这章. 请参考图 1.22.



a) 解析分析　　b) 定性分析　　c) 数值分析

图 1.22　分析微分方程的不同方法

练习 1.3

人口动力学

1. 在和模型(1)同样的假设下，求一个微分方程，用它表示一国增长的人口 $P(t)$，并考虑到外国居民以常速率 r 移民该国. 当本国居民以常速率 r 移民他国时，微分方程又是怎样的?
2. 模型(1)没有考虑死亡，增长率就等于出生率. 在另外一个人口模型中，假设人口增长率是人口的净变化率，也就是出生率与死亡率之差，求一个微分方程，用它表示人口 $P(t)$，且出生率和死亡率都与当前 t 时刻的人口总数成正比.
3. 用习题 2 中净变化率的概念，求一个表示人口 $P(t)$ 的微分方程，且出生率与当前 t 时刻的人口总数成正比，而死亡率与当前 t 时刻人口总数的平方成正比.
4. 某个牧场上田鼠的数量用函数 $200-10t$ 表示，这里 t 的单位是年. 求一个微分方程，表示以田鼠为食的猫头鹰的数量，猫头鹰的增长速率与 t 时刻时两者数量之差成正比.

牛顿热力学定律

5. 一杯咖啡冷却的过程遵循牛顿热力学定律(3). 用图 1.23 温度 $T(t)$ 的图形所示的数据计算形如 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t=k(T-T_m)$，$T(0)=T_0$ 的一阶初值问题中的常数 T_m、T_0 和 k.
6. (3)中的环境温度 T_m 可以是时间 t 的函数. 假设用人工控制环境，$T_m(t)$ 是周期为 24 小时的函数，如图 1.24 所示. 建立一个关于环境中物体温度 $T(t)$ 的数学模型.

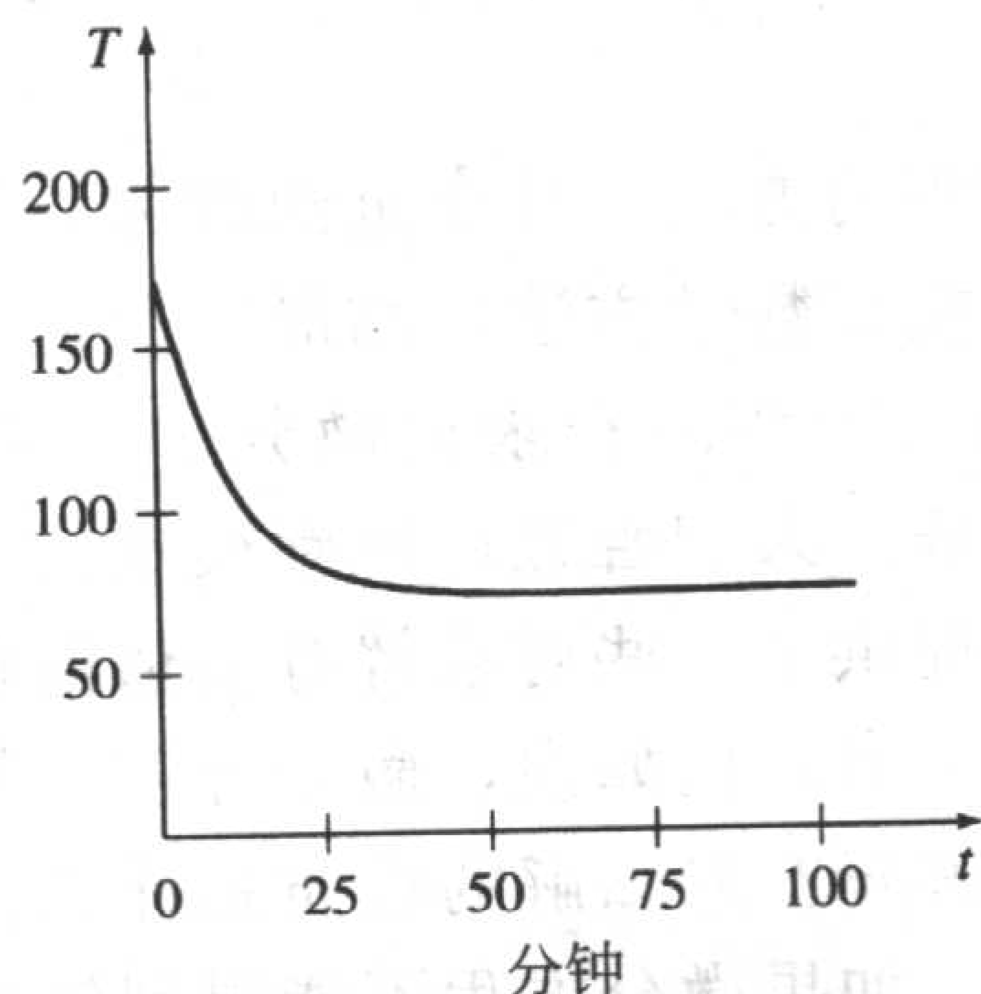


图 1.23

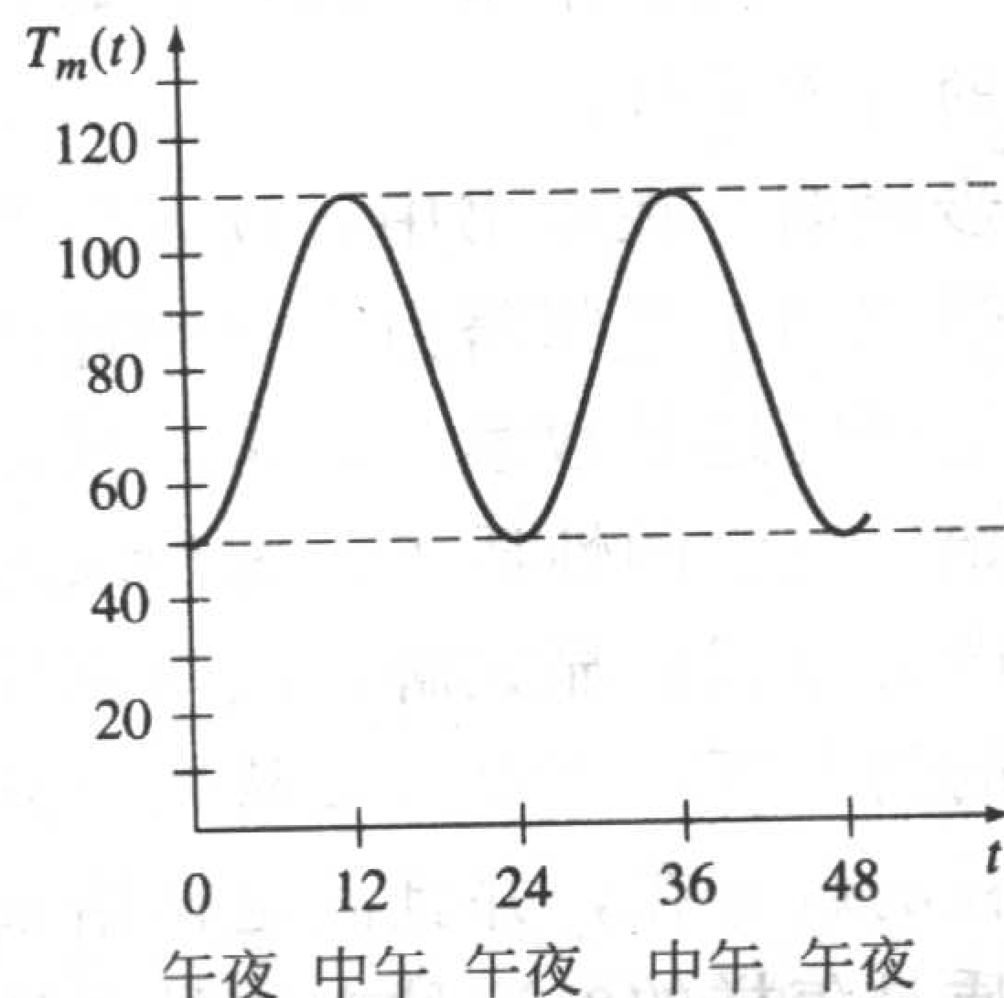


图 1.24

疾病/技术的传播

7. 假如一个得了流感的学生进入一个有 1 000 人的校园中. 求一个微分方程, 用它控制得流感的人数 $x(t)$, 疾病传播的速率与相互接触的人数成正比.
8. 在时刻 $t=0$, 一种技术创新传入一个人口数为 n 的社区, 求一个微分方程, 用它控制 t 时刻时采用这种技术创新的人数 $x(t)$, 设这种创新在社区里传播的速率和采用与未采用这种技术创新的人数之积成正比.

混合物

9. 设初始时刻一个大容器内盛有 300gal 水, 其中融解了 50lb 盐. 纯水以 3gal/min 的速率倒入这个容器, 溶液充分混合后再以同样的速率倒出. 写出一个微分方程, 表示 t 时刻容器内盐的数量 $A(t)$.
10. 设初始时刻一个大容器内盛有 300gal 水, 其中融解了 50lb 盐. 另有一种盐溶液以 3gal/min 的速率倒入这个容器, 溶液充分混合后再以 2gal/min 的速率倒出. 若倒入溶液的浓度是 2lb/gal, 写出一个微分方程表示 t 时刻容器内盐的数量 $A(t)$.

排水问题

11. 设某一容器底部有一个面积为 A_h 的圆孔, 容器中的水从这个孔不断漏出. 水从孔中漏出时, 孔附近的水流产生的摩擦降低了每秒流出容器的水, 减至 $cA_h\sqrt{2gh}$, 这里 $c(0<c<1)$是经验常数. 写出一个微分方程, 表示在 t 时刻这个立方体容器中水的高度 h, 如图 1.25 所示. 孔的半径为 2in[①], $g=32\text{ft/s}^2$.
12. 如图 1.26 所示的圆锥形容器, 在其底部有一个圆孔, 水从孔中漏出. 写出一个微分方程, 表示 t 时刻容器内水的高度 h. 孔的半径是 2in, $g=32\text{ft/s}^2$, 摩擦因素同习题 11 一样, $c=0.6$.

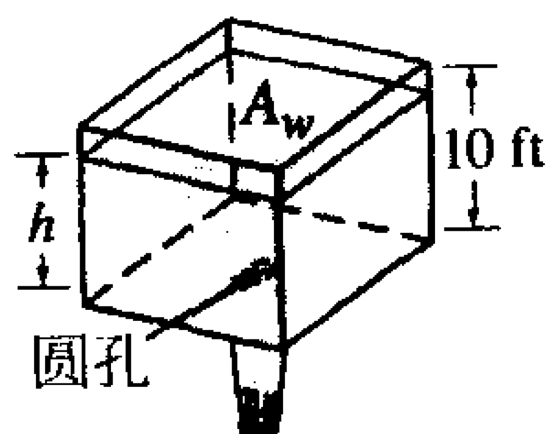


图 1.25

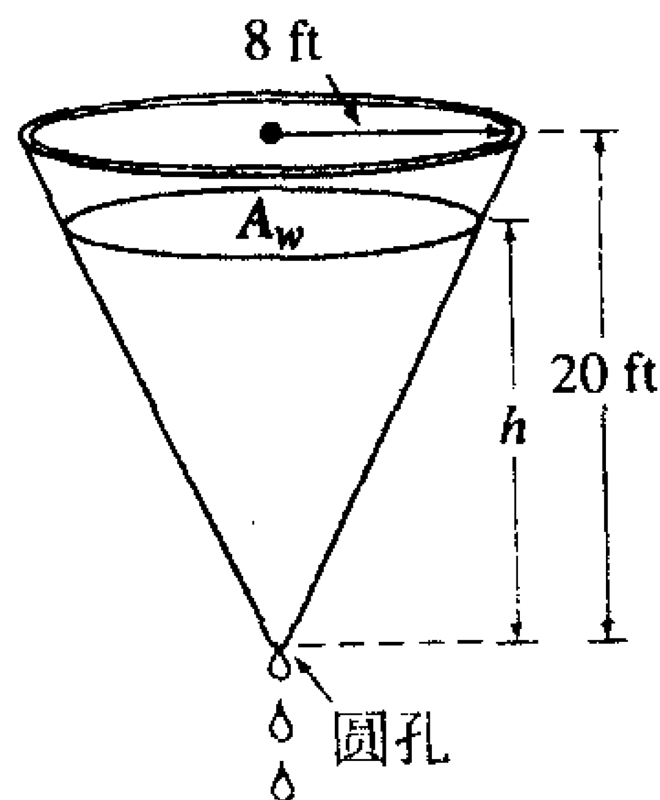


图 1.26

串联电路

13. 一个串联电路含有一个电阻器和一个电感线圈, 如图 1.27 所示. 写出一个微分方程表示电流 $i(t)$, 电阻是 R, 电感系数是 L, 电路中的电压降为 $E(t)$.
14. 一个串联电路含有一个电阻器和一个电容器, 如图 1.28 所示. 写出一个微分方程表示电容器上的电荷 $q(t)$, 电阻是 R, 电容量为 C, 电路中的电压降为 $E(t)$.

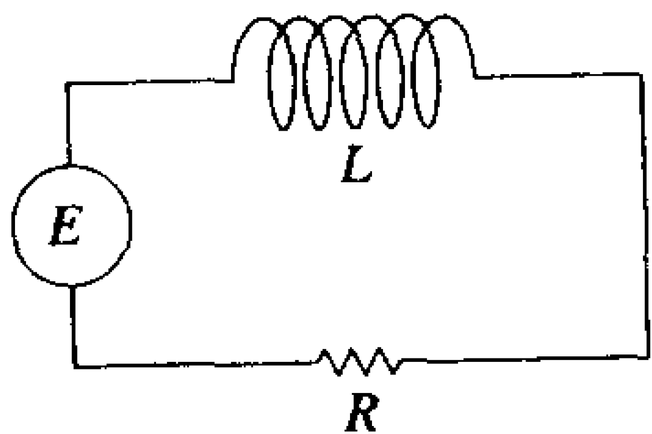


图 1.27

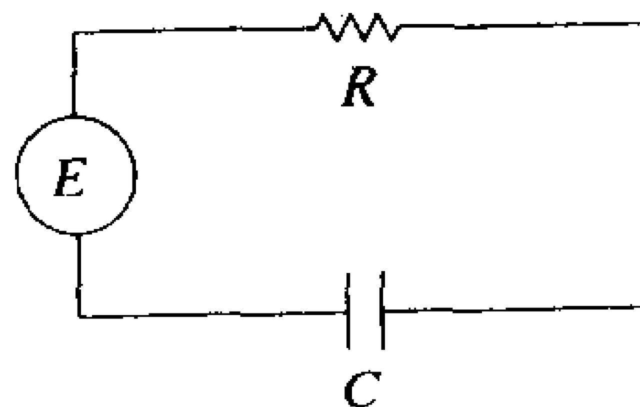


图 1.28

① 1 in=0.025 4 m. ——编辑注

落体运动与空气阻力

15. 空气中高速运动的物体，例如花式跳伞运动员，如图1.29所示，在降落伞打开之前保持下落状态，空气阻力与瞬时速率的大小有关. 写出一个微分方程，表示质量为 m 的落体的速率 $v(t)$，空气阻力与瞬时速率的平方成正比.

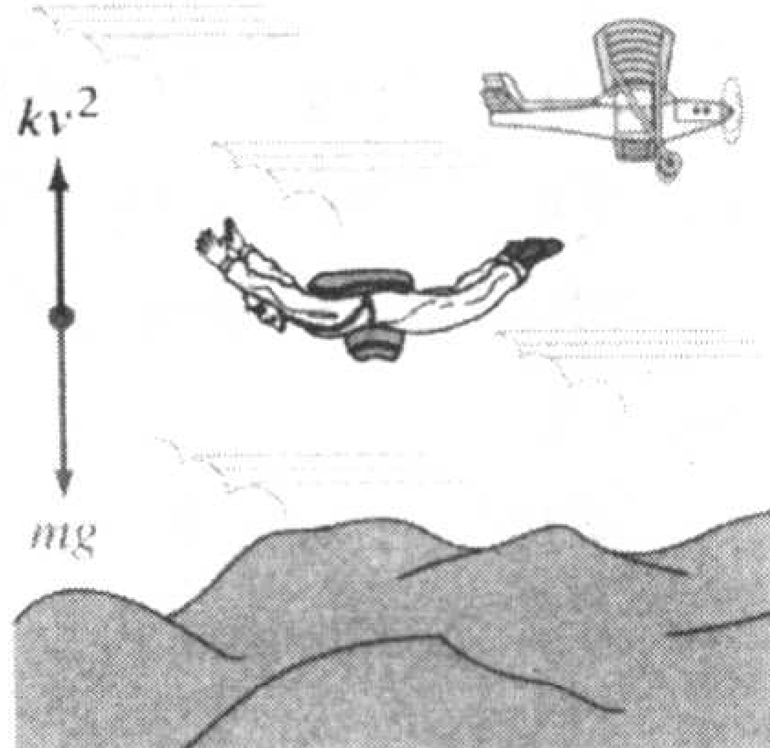


图 1.29

牛顿第二定律与阿基米德定律

16. 一个直径为 s ft、重为 w lb 的圆柱形桶漂浮在水里. 刚开始对其施一定的压力，然后桶开始在垂直方向做上下运动. 利用图1.30(b)，写出一个微分方程描述桶的垂直位移 $y(t)$，若原点设在桶静止时纵轴和水面的交点处. 利用阿基米德定律(Archimedes' principle)：浮力，也就是水施加在桶上竖直向上的力与桶排开的水的重量相等. 假设竖直向下为正方向，那么水的密度是62.4lb/ft³，且桶和水之间没有阻力.

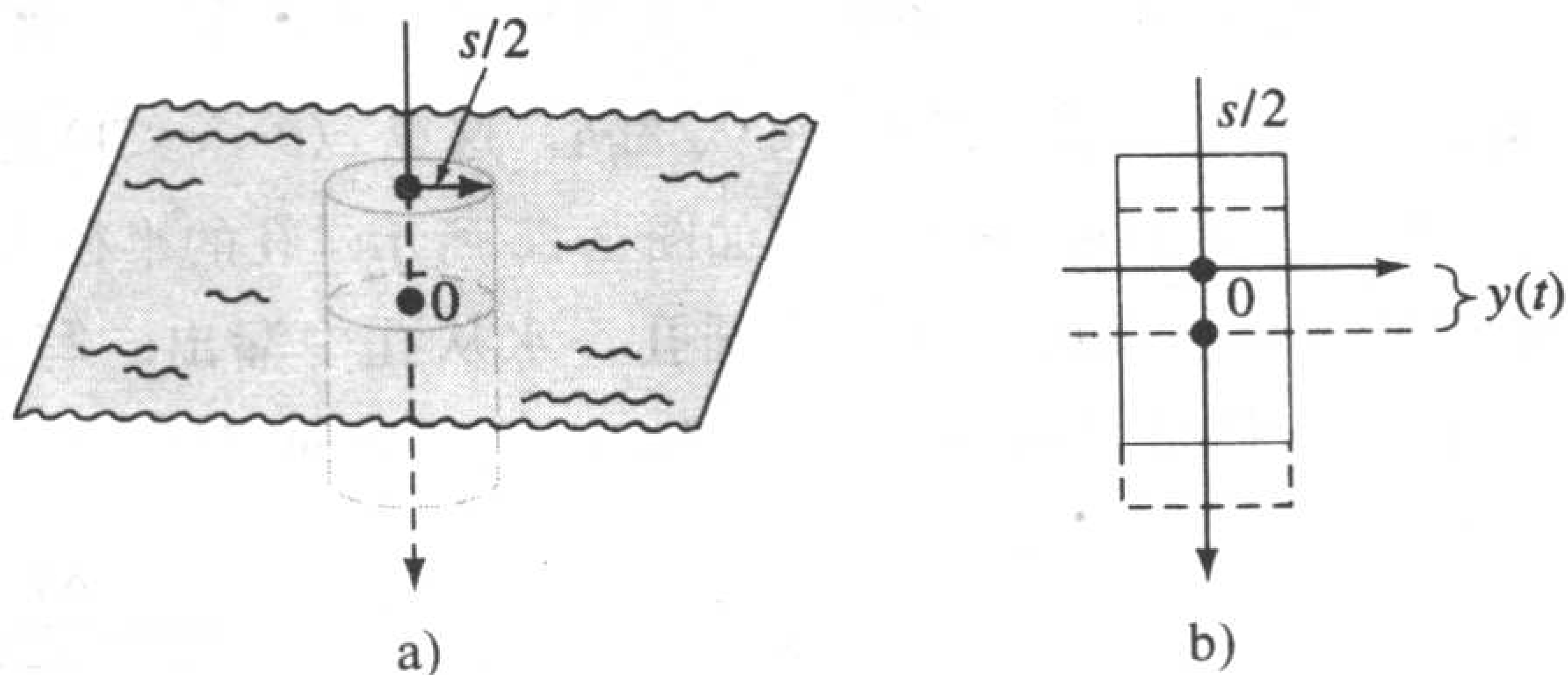


图 1.30

牛顿第二定律与虎克定律

17. 质量为 m 的物体附在弹簧的一端后，弹簧伸长 s 单位长度，悬挂后的平衡位置如图1.31(b)所示. 弹簧/质量系统运动以后，令 $x(t)$ 表示质点偏离平衡位置的垂直距离. 设竖直向下为正方向，物体在重力作用下在竖直方向做运动，作用在系统上仅有的力是质点所受的重力和弹簧的回复力. 利用虎克定律(Hooke's law)：弹簧的回复力与它的总伸长量成正比. 写出一个微分方程表示 t 时刻时质点的位移 $x(t)$.

18. 在习题17中，若运动发生在有阻尼的介质中，且阻尼的大小与质点的瞬时速率成正比，方向和运动方向相反，那么描述位移 $x(t)$ 的微分方程是怎样的？

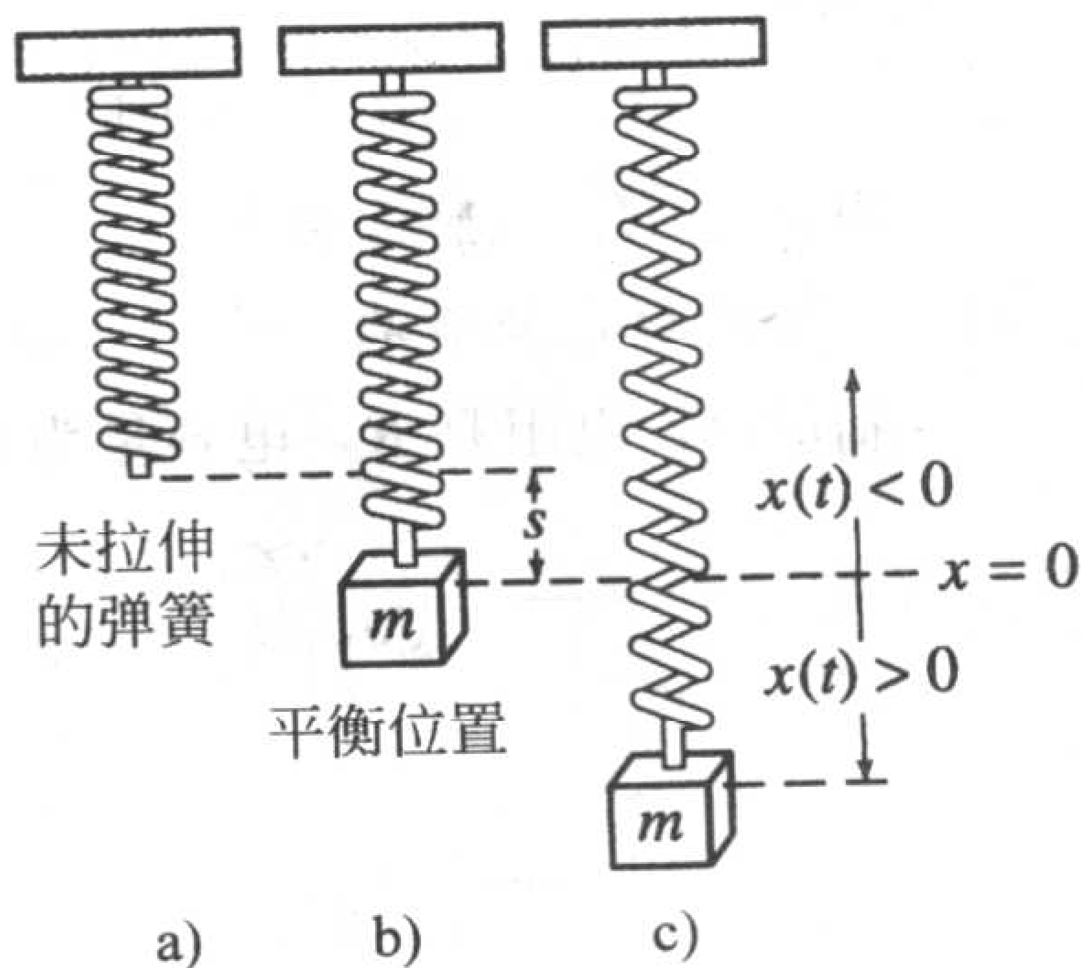


图 1.31

牛顿第二定律与可变质量

一个通过力场的物体，其质量 m 可变，牛顿第二定律可以表述为：若作用在物体上的合外力不为零，则合外力 F 等于其动量对时间的变化率，即 $F=\mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t$[⊖]，其中 mv 是动量. 用可变质量的牛顿第二定律来解习题19、20.

19. 一个长为10ft的匀质链条松散地盘在地面上. 如图1.32所示，链条的一端被大小为5 lb的恒力垂直向上提起. 链条的重量为1 lb/ft. 写出一个微分方程，表示 t 时刻时被提起

⊖ 注意，当 m 是常数时，同样有 $F=ma$.

的一端离地面的高度 $x(t)$. 设正方向为垂直向上.

20. 一个长为 L 的匀质链条，长度单位为 ft，其一端被垂直提起，较低的一端刚好与地面接触，如图 1.33 所示. 链条重 2 lb/ft. 时刻 $t=0$ 时，链条上端开始从静止状态释放，然后链条开始垂直下落. 忽略空气阻力. 假设正方向为垂直向下，令 $x(t)$ 表示 t 时刻时地面上方链条的长度. 证明表示 $x(t)$ 的微分方程为

$$(L-x)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=Lg.$$

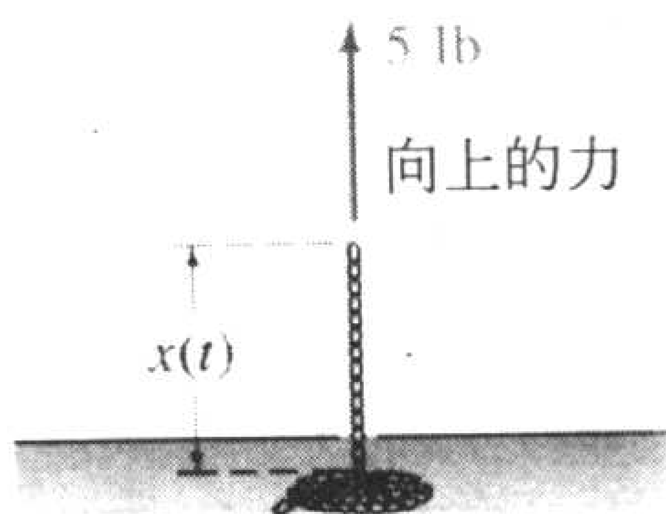


图 1.32

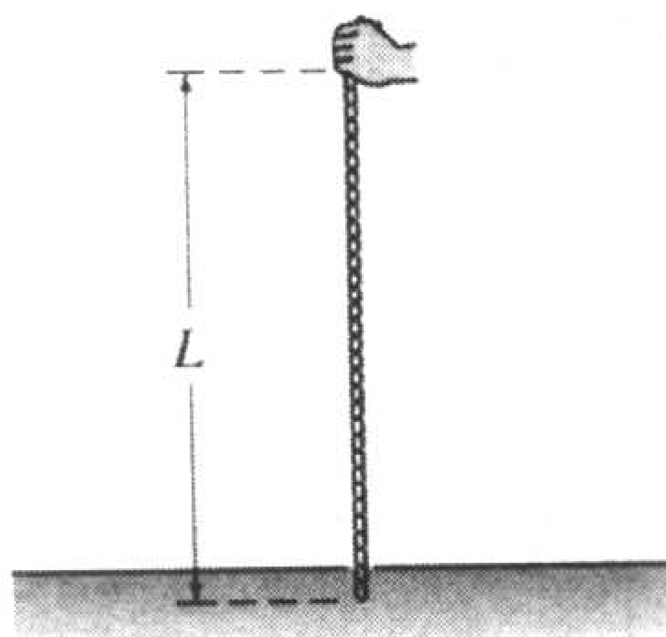


图 1.33

牛顿第二定律与万有引力定律

21. 根据牛顿万有引力定律，在距地面很远的地方物体的自由落体加速度 a 不等于常数 g，如图 1.34 所示. 相反，加速度 a 和物体与地心距离的平方成反比：$a=k/r^2$，其中 k 是比例常数. 在地表 $r=R$ 处，$a=g$，求常数 k. 假定正方向垂直向上，用牛顿第二定律以及万有引力定律写出一个表示距离 r 的微分方程.

22. 假定沿地轴钻一个孔，这个孔通过地心，一个质量为 m 的小球坠入孔中，如图 1.35 所示. 建立一个数学模型，描述这个小球的运动. 令 r 表示 t 时刻小球距地心的距离，M 表示地球的质量，M_r 表示地球内部半径为 r 的球体相应的质量，δ 表示地球的常数密度.

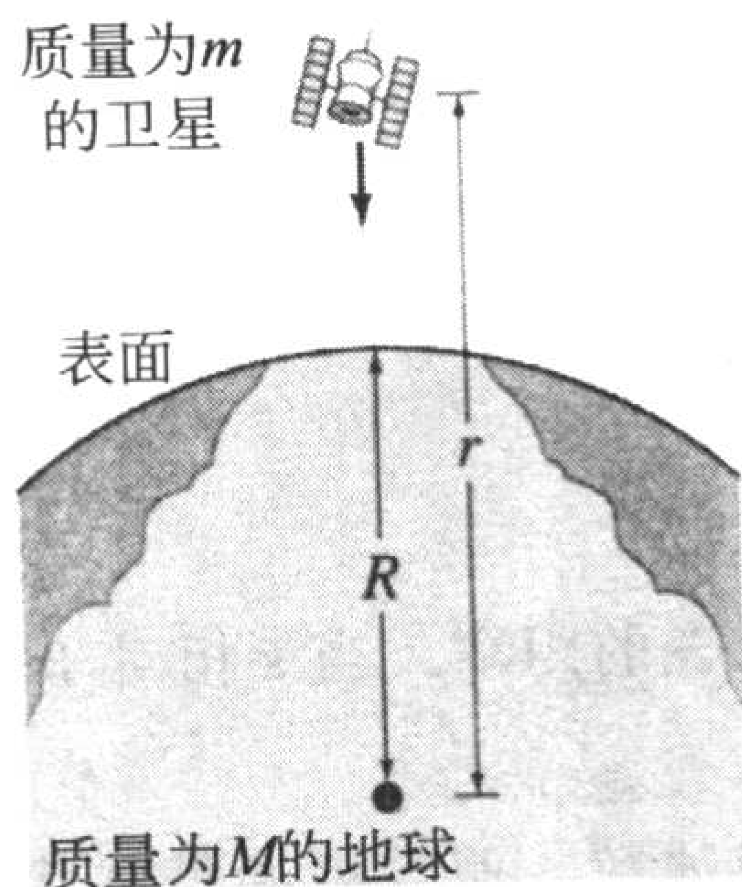


图 1.34

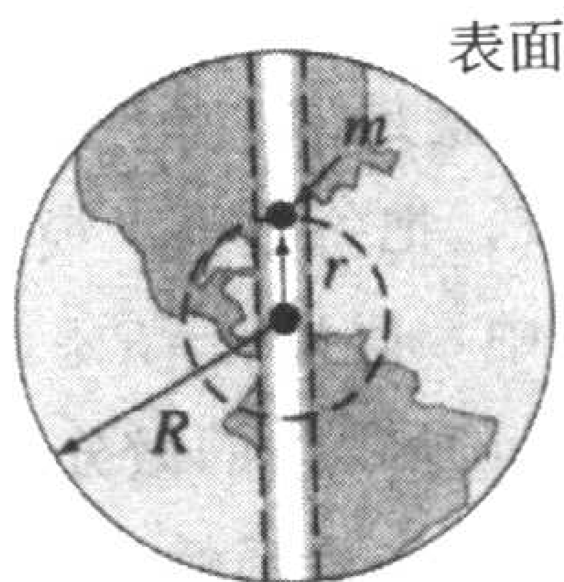


图 1.35

混合数学模型

23. 在学习理论中，假设人的记忆速率与已剩余要记的数量成正比. 设 M 表示要记忆的总量，$A(t)$ 表示 t 时刻记住的数量. 写出一个表示 $A(t)$ 的微分方程.

24. 在习题 23 中，假设遗忘的速率与 t 时刻已记住的数量成正比. 写出一个考虑遗忘情况的表示 $A(t)$ 的微分方程.

25. 一种药物以固定的每秒 r 克的速率溶入人体的血液中. 同时，这种药物流失的速率与 t 时刻的数量 $x(t)$ 成正比. 写出一个表示 $x(t)$ 的微分方程.

26. 一个人 P，刚开始站在原点处，沿着 x 轴的正方向移动，同时拉动一个重物，这个重物的轨迹是曲线 C，称为曳物线(tractrix)，如图 1.36 所示. 这个重物初始时刻在 y 轴的 $(0, s)$ 处，被一根长度恒为 s 的绳索牵引，该绳索在运动过程中始终保持张紧的状态. 写出描述物体运动轨迹的微分方程. 假设绳索总是与 C 相切.

27. 如图 1.37 所示，与 x 轴平行的光线 L 在曲线 C 处反射至点 O. 设入射角等于反射角，写出一个微分方程用来描述曲线 C 的性态. [提示：由图 1.37 所示，可令 $\phi=2\theta$. 为什么？可以利用有关三角形定理证明.]

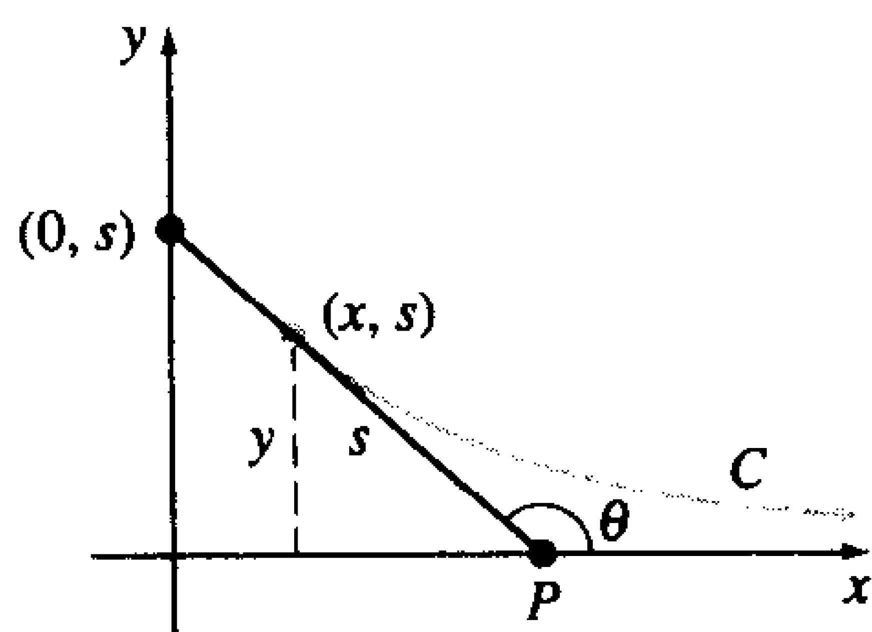


图 1.36

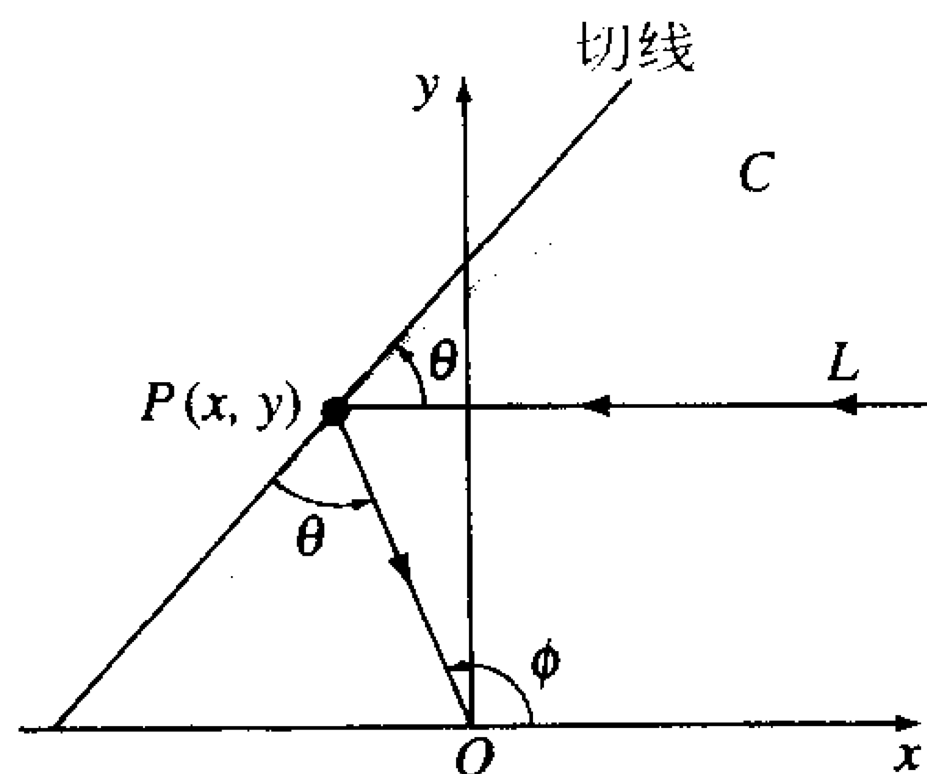


图 1.37

讨论题

28. 回顾练习 1.1 中的习题 31，并给出方程(1)的一个显式解 $P(t)$. 求(1)的一个单参数解族.

29. 回顾方程(3)下面的一句话. 若假设 T_m 是正常数，解释为什么我们期望方程(3)中的 $k<0$，而无论是冷却还是加热. 可以用 $T(t)>T_m$ 的图形来解释.

30. 回顾推导方程(8)的过程. 若假设初始时刻容器内有 50 lb 的盐，$t>0$ 时，连续的把盐加入容器中，则 $A(t)$ 是一个增函数. 讨论如何通过不解微分方程来计算一段时间后容器中盐的数量.

31. 设初始时刻容器中的盐溶液为 V_0 gal，推广模型(8)；盐溶液倒入和倒出的速率分别为 r_i 和 r_0(单位为 gal/min)；倒入和倒出的盐溶液浓度分别为 c_i 和 c_0；$A(t)$ 是 t 时刻时容器中盐的数量(单位为 lb).

32. 微分方程 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=(k\cos t)P$ 是某个社区中的人口 $P(t)$ 的模型，其中 k 是正常数. 对这个方程的解加以解释. 也就是说，这个微分方程描述了一种什么类型的人口？

33. 回顾 1.3 节，把每个数学模型按线性和非线性进行分类.

34. 在习题 21 中，假设 $r=R+s$，其中 s 表示自由落体的物体距地表的距离. 当 s 相对于 R 来说非常小时，习题 21 所得到的微分方程会发生什么样的改变？

35. 在气象学中，术语雨幡表示在到达地表之前就蒸发掉的雨滴或冰粒. 假设雨滴是球状的. 从某一时刻起，记为 $t=0$，半径为 r_0 的雨滴从云中由静止落下，并开始蒸发. 若假设雨滴在蒸发过程中仍然保持其形状，则可以假设雨滴蒸发的速率与它的表面积(也就是它的质量减少的速率)成正比. 证明后一个假设意味着雨滴的半径 r 以恒定的速率减小. 求出 $r(t)$. [提示：请参考练习 1.1 的习题 35.] 若正方向为垂直向下，构造一个数学模型，表示 t 时刻时下落雨滴的速度 v. 忽略空气阻力. [请参考习题 19、20 的说明.]

36. “扫雪车问题”是一个经典的问题. 在很多微分方程的教科书中都可以看到，但也许是 Ralph Palmer Agnew 的最著名.

一天，天上开始下雪，雪下得很大并且以恒定的速度降到地面上．一辆扫雪车正午开出，第一个小时行驶了 2mile[1]，第二个小时行驶了 1mile．问是什么时间开始下雪的？

这本教科书是《Differential Equations》，由 Ralph Palmer Agnew 著，McGraw-Hill Book Co. 出版，讨论如何构造这个数学模型并求出其解．

第 1 章复习题

请在习题 1、2 中填空，然后把这个结果写成一个线性一阶微分方程，这个方程与 c_1 无关，且形如 $dy/dx=f(x, y)$．符号 c_1 和 k 表示常数．

1. $\frac{d}{dx}c_1e^{kx}=$ ____________

2. $\frac{d}{dx}(5+c_1e^{-2x})=$ ____________

请在习题 3、4 中填空，然后把这个结果写成一个线性二阶微分方程，这个方程与 c_1、c_2 无关，且形如 $F(y, y'')=0$．符号 c_1、c_2 和 k 表示常数．

3. $\frac{d^2}{dx^2}(c_1\cos kx+c_2\sin kx)=$ ____________

4. $\frac{d^2}{dx^2}(c_1\cosh kx+c_2\sinh kx)=$ ____________

计算习题 5、6 中的 y' 和 y''，然后把这些结果写成线性二阶微分方程，这个方程与 c_1、c_2 无关，且形如 $F(y, y', y'')=0$．符号 c_1、c_2 表示常数．

5. $y=c_1e^x+c_2xe^x$

6. $y=c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x$

在习题 7～12 中，找出每个所给的微分方程对应的一个或多个解：(a) $y=0$，(b) $y=2$，(c) $y=2x$，(d) $y=2x^2$．

7. $xy'=2y$

8. $y'=2$

9. $y'=2y-4$

10. $xy'=y$

11. $y''+9y=18$

12. $xy''-y'=0$

至少求出习题 13、14 中每个微分方程的一个解．

13. $y''=y'$

14. $y'=y(y-3)$

把习题 15、16 中的文字描述写成微分方程．

15. 在 $y=\phi(x)$ 的图形上，点 P 处的切线斜率等于 P 点到原点距离的平方．

16. 在 $y=\phi(x)$ 的图形上，点 P 处的斜率对 x 的变化率等于 P 处切线斜率的负值．

17. (a)求出函数 $y=x^{2/3}$ 的定义域．

 (b)若 $y=x^{2/3}$ 是 $3xy'-2y=0$ 的解，求出这个解的定义区间 I．

18. (a)证明单参数族 $y^2-2y=x^2-x+c$ 是微分方程 $(2y-2)y'=2x-1$ 的隐式解．

 (b)利用(a)求出微分方程的隐式解，使得它满足初始条件 $y(0)=1$．

 (c)利用(b)求出显示函数 $y=\phi(x)$，使其满足 $y(0)=1$．求出 ϕ 的定义域．函数 $y=\phi(x)$ 是初值问题的解吗？

19. 微分方程可以有一个以上的解族．

 (a)绘出解族 $y=\phi_1(x)=x^2+c_1$ 和 $y=\phi_2(x)=-x^2+c_2$ 的图形．

 (b)证明 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$ 是非线性一阶微分方程 $(y')^2=4x^2$ 的两个解．

 (c)构造一个分段定义的函数，使其是(b)中非线性微分方程的解，但不在(a)中的任何一个解族．

20. $y'=6\sqrt{y}+5x^3$ 的解的图像中，点 $(-1, 4)$ 处的切线斜率是多少？

---

[1] 1 mile＝1 609.344m．——编辑注

证明习题 21 和 22 中，所列的函数是所给微分方程的特解．求出每个解的定义域 I.

21. $x^2y''+xy'+y=0$；　$y=\sin(\ln x)$

22. $x^2y''+xy'+y=\sec(\ln x)$；　$y=\cos(\ln x)\ln(\cos(\ln x))+(\ln x)\sin(\ln x)$

23. 二阶初值问题 $d^2y/dx^2=f(x, y, y')$，$y(2)=y_0$，$y'(2)=y_1$ 的解的图像如图 1.38 所示．利用图像估计 y_0，y_1 的值.

24. 一个半径为 2ft，高为 10ft 的圆柱形容器，直立地放在地面上．若初始时刻容器装满了水，且水开始从底部一个半径为 1/2in 的圆孔漏出，写出一个描述 t 时刻容器内水的高度 h 的微分方程．忽略水在圆孔处的摩擦.

25. 一个重 96lb 的箱体从一个倾斜的斜面上滑下，斜面倾角为 30 度．若摩擦系数为 μ，求一个微分方程，描述箱体在 t 时刻的速度 $v(t)$．摩擦力和运动方向相反，为 μN，其中 N 为重力垂直于斜面的分量．请参考图 1.39.

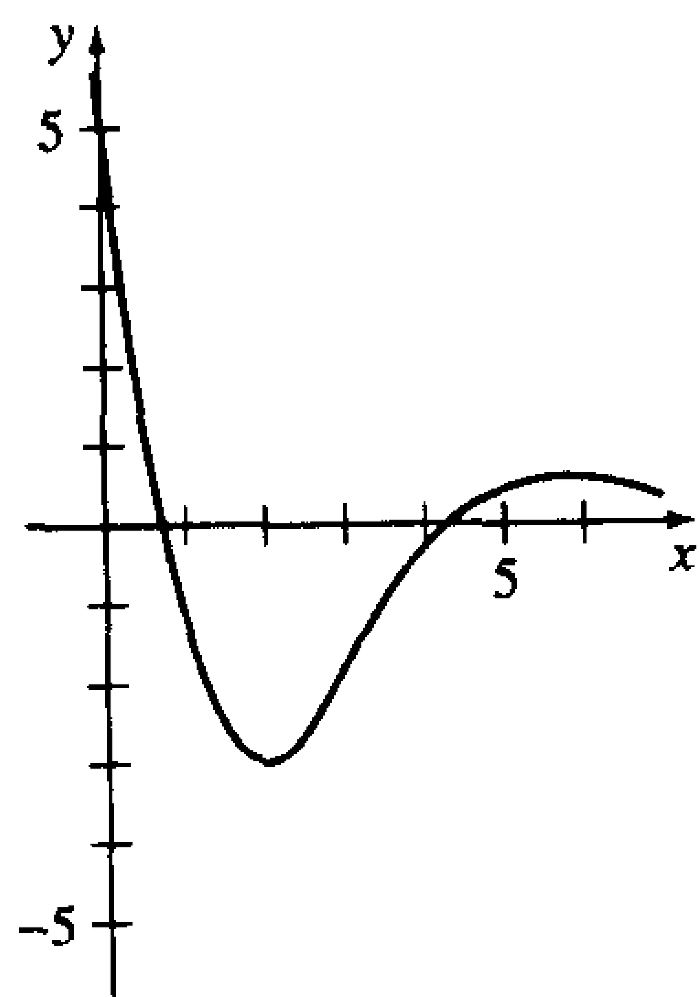


图 1.38

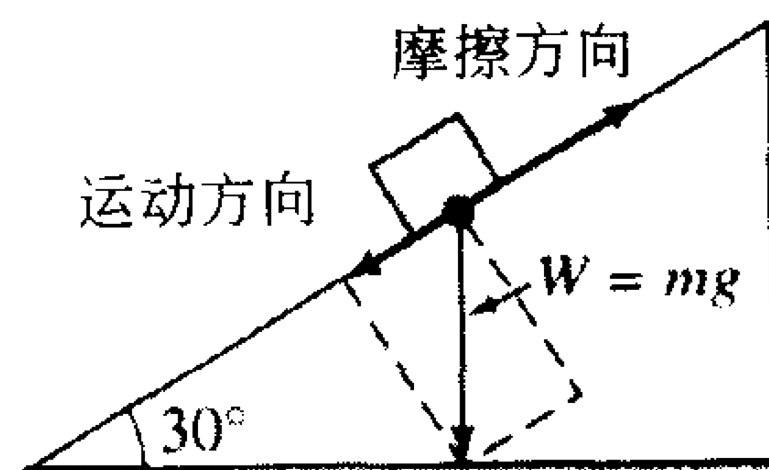
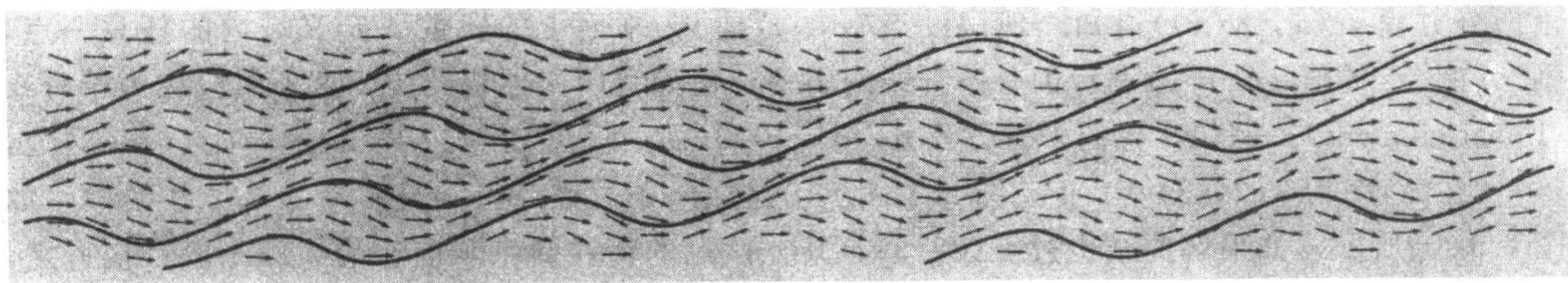


图 1.39



方向场中的解曲线；见图 2.3

第 2 章　一阶微分方程

现在我们开始求解微分方程. 首先从一阶方程入手，要找到方程的精确解，必须确定该方程的种类，并应用与其对应的具体方法求解. 也就是说，适用于某类一阶方程的解法并不一定适用于其他类型的方程. 在求解微分方程之前，我们将在本章的第一节中认识到：一阶方程往往能够提供足够的关于解的信息，以使我们对其解曲线有大概的了解. 在本章的最后一节，我们将构造方程的数值解. 最后一个概念扩展了微分方程的解的含义，因为从严格意义上来说，数值解并不是方程的解，而只是由一定规则生成的近似于解的数值.

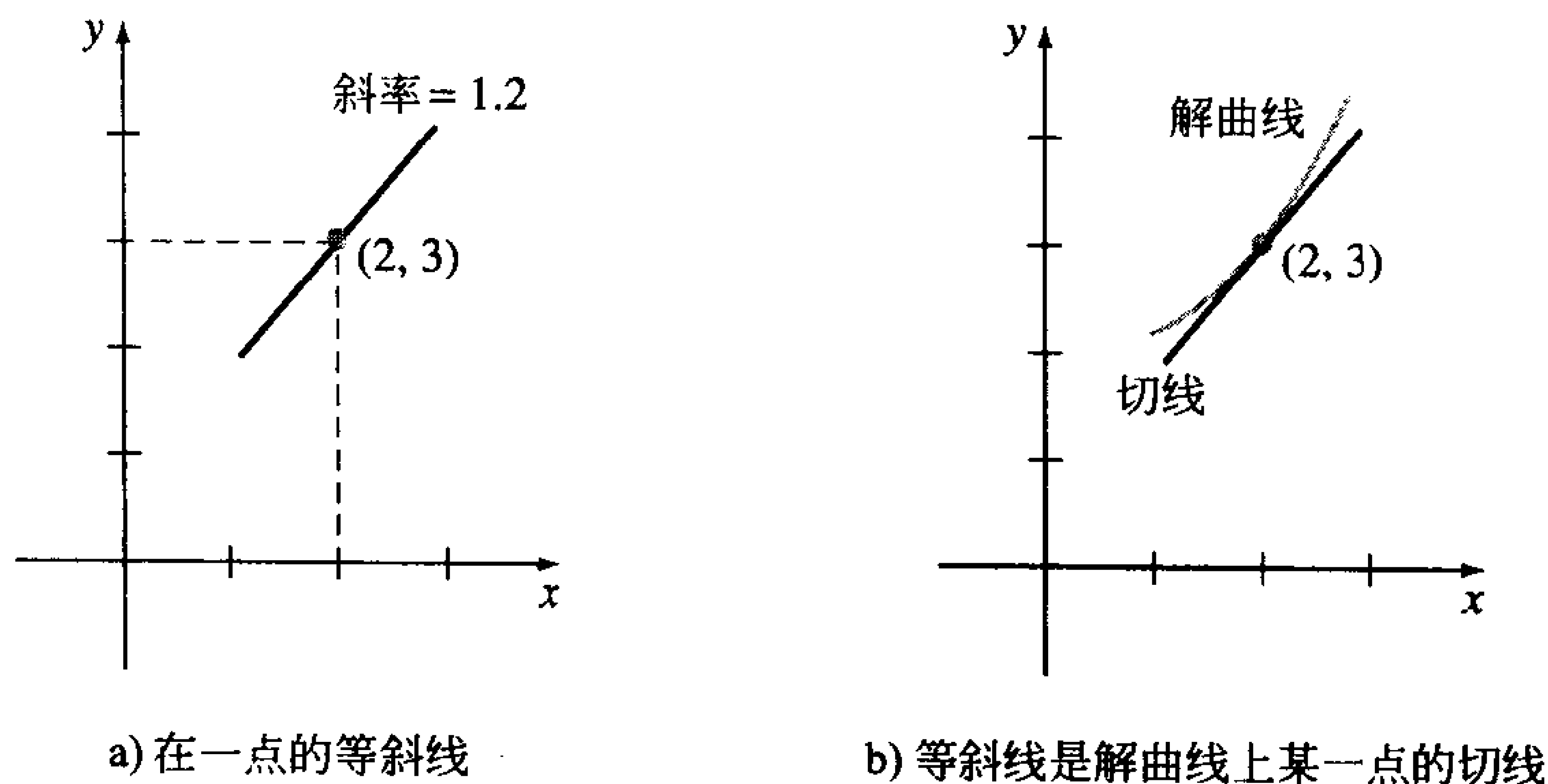
2.1　不求解情况下的解曲线

有些微分方程是无解的，例如$(y')^2+1=0$就没有实函数解.（为什么?）有些微分方程可以通过具体的求解方法得到显式解或者隐式解（对微分方程使用诸如积分之类的计算和解析方法）. 有些微分方程的解是存在的，但无法用解析方法求出. 换言之，我们说一个微分方程的解存在，并不意味着我们一定可以求出其显式解或者隐式解. 在本学科的发展过程中，数学家们设计出了一些巧妙的方法来求解一些很特殊的方程，所以现在有大量的微分方程可以通过解析方法求解. 我们将在本章的后面几节学习其中一些针对一阶方程的解法. 不过，首先让我们来看看如何在不求解一阶方程的情况下，通过方程本身获得一些关于解的信息.

一阶微分方程能告诉我们什么　给定一个标准形式的微分方程 $dy/dx=f(x, y)$，并假设我们无法通过解析方法求解方程. 其实现在的情况不是我们想象的那么糟糕，因为我们往往可以直接从方程本身获取一些关于解的性质的信息. 例如，我们已经看到当 $f(x, y)$和$\partial f/\partial y$满足一定的连续条件时，一些诸如解的存在性、唯一性之类的定性问题就可以回答了. 我们将在本节讨论一些其他关于方程解的性质的定性问题——在一个定点附近解的性质是怎样的？当$x\to\infty$时解的性质如何？如果函数 f 仅依赖于变量 y，这些问题通常是可以回答的. 我们首先从微积分中一个简单的概念开始，一个可微函数$y=y(x)$的导数 dy/dx 确定了函数曲线在给定点的切线的斜率.

斜率　因为一阶微分方程 $dy/dx=f(x, y)$的解 $y=y(x)$在区间 I 上是可微的，所以在区间 I 上也一定是连续的. 因此，方程对应的解曲线在 I 上一定没有间断点，并且在每一点$(x, y(x))$都有一条切线. 解曲线上点$(x, y(x))$处切线的斜率即是一阶导数 dy/dx 在该点的值. 这一点可

由微分方程 $f(x, y(x))$ 得知. 现假设点 (x, y) 是 xy 平面上的函数 f 定义域内的任意一点，则 f 在该点的值 $f(x, y)$ 表示了一条直线的斜率，正如我们所预料到的，这条线段称为等斜线(lineal element). 例如，我们来看方程 $dy/dx=0.2xy$，即 $f(x, y)=0.2xy$，在点 $(2, 3)$ 处，等斜线的斜率为 $f(2, 3)=1.2$. 图 2.1 表示了这样一条过点 $(2, 3)$ 且斜率为 1.2 的线段. 如图 2.1(b)所示，如果解曲线也过点 $(2, 3)$，其在该点的切线斜率与前述的线段相同；换言之，等斜线是解曲线在该点切线的一个微缩.



a) 在一点的等斜线　　b) 等斜线是解曲线上某一点的切线

图 2.1

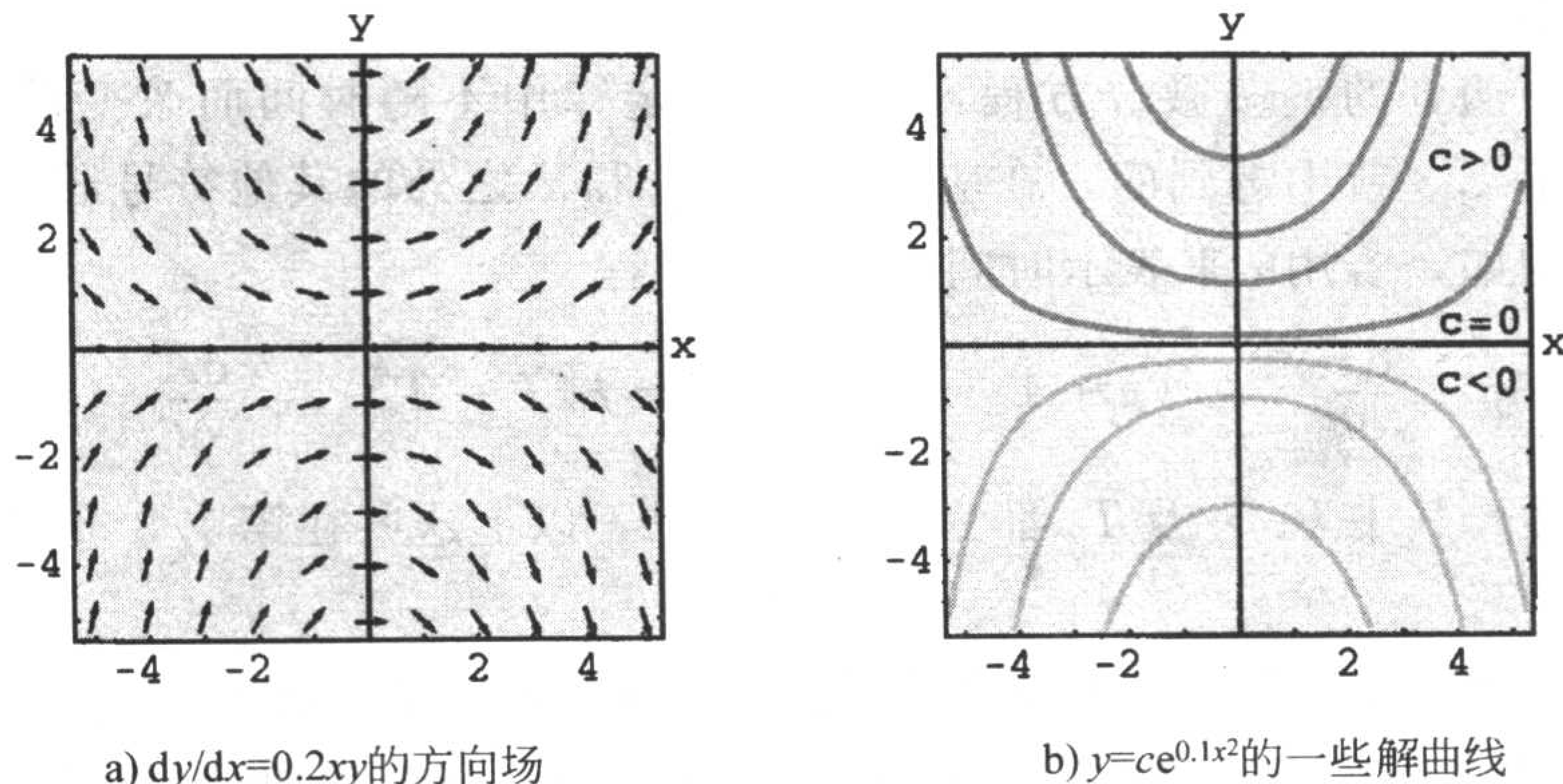
方向场　如果我们在 xy 平面内的矩形网格中系统地计算 f，并在每一点 (x, y) 绘出 $f(x, y)$ 的等斜线，则这些等斜线的集合称为微分方程 $dy/dx=f(x, y)$ 的*方向场*(direction field)，或*斜率域*(slope field). 显然，方向场描绘出了微分方程解曲线族的形状. 因此我们也可能看到一些解的定性性质——例如，解在平面中某些表现异常的区域. 解曲线的走势必然符合方向场所体现的流型. 当它与解曲线相交于网格中的一点时，它就与等斜线相切.

徒手绘出一个方向场的图形是直观的，但也是非常耗时的. 徒手绘一两张方向场的图形也许是必要的，不过凭借软件可以很高效地绘出方向场的图形.

例 1　方向场

图 2.2(a)是用软件中的方向场程序绘制的，方程为 $dy/dx=0.2xy$. 坐标点 (mh, nh) 定义在 5×5 的网格内，其中 $h=1$，m，n 为整数且 $-5\leqslant m\leqslant5$，$-5\leqslant n\leqslant5$. 在图 2.2(a)中，我们注意到，在 x 轴 $(y=0)$ 和 y 轴 $(x=0)$ 上的点的斜率分别为 $f(x, 0)=0$ 和 $f(0, y)=0$，即这些等斜线都是水平的. 进一步观察第一象限的情况，给定 x 的值，则 $f(x, y)=0.2xy$ 随 y 的增大而增大，给定 y 的值，则 $f(x, y)=0.2xy$ 随 x 的增大而增大. 这意味着随着 x 和 y 的增大，其等斜线几乎会变为垂直并且有正的斜率(由 $x>0$，$y>0$，可知 $f(x, y)=0.2xy>0$). 在第二象限，$|f(x, y)|$ 随着 $|x|$ 及 y 的增大而增大，等斜线也同样会趋于垂直，但它们的斜率为负(由 $x<0$，$y>0$，可知 $f(x, y)=0.2xy<0$). 从左至右观察图形，假设解曲线从第二象限中的某点开始，它先是急剧向下延伸，在穿越 y 轴时变成水平，然后在进入第一象限后急剧向上——也就是说，它具有类似于马鞍形的上凹形状. 简言之，当 $x\to\pm\infty$ 时，$y\to+\infty$. 在第三和第四象限，由于分别有 $f(x, y)=0.2xy>0$ 和 $f(x, y)=0.2xy<0$，其解的

情况恰与一、二象限内相反；解曲线从左到右表现为先升后降．我们在第 1.1 节的(1)式中已经看到，方程$\frac{dy}{dx}=0.2xy$的一个显式解为 $y=e^{0.1x^2}$，可以证明它具有一个单参数解族 $y=ce^{0.1x^2}$．为了与图 2.2(a)做一个比较，我们在图 2.2(b)中绘出了代表这个解族的一些曲线．



a) $dy/dx=0.2xy$的方向场　　b) $y=ce^{0.1x^2}$的一些解曲线

图 2.2

例 2　方向场

用方向场绘出初值问题 $dy/dx=\sin y$，$y(0)=-3/2$ 的近似解曲线．

解　在完成这个题目之前，我们先回顾一下，因为 $f(x, y)=\sin y$，$\partial f/\partial y=\cos y$ 是连续的，所以由定理 2.1 保证，过平面内的任一点(x_0, y_0)，存在唯一一条解曲线．我们仍利用计算机软件在 5×5 的矩形区域内绘出方向场，并均在横坐标与纵坐标的每隔 1/2 处定义点，即(mh, nh)，$h=1/2$，m、n 为整数且$-10\leqslant m\leqslant 10$，$-10\leqslant n\leqslant 10$．图 2.3 给出了所绘制的图形．因为当 $y=0$ 及 $y=-\pi$ 时，方程 $dy/dx=\sin y$ 的右边等于 0，所以纵坐标为 $y=0$ 或者 $y=-\pi$ 的等斜线都是水平的．图中的曲线就是通过初值点$(0, -2/3)$的解曲线．■

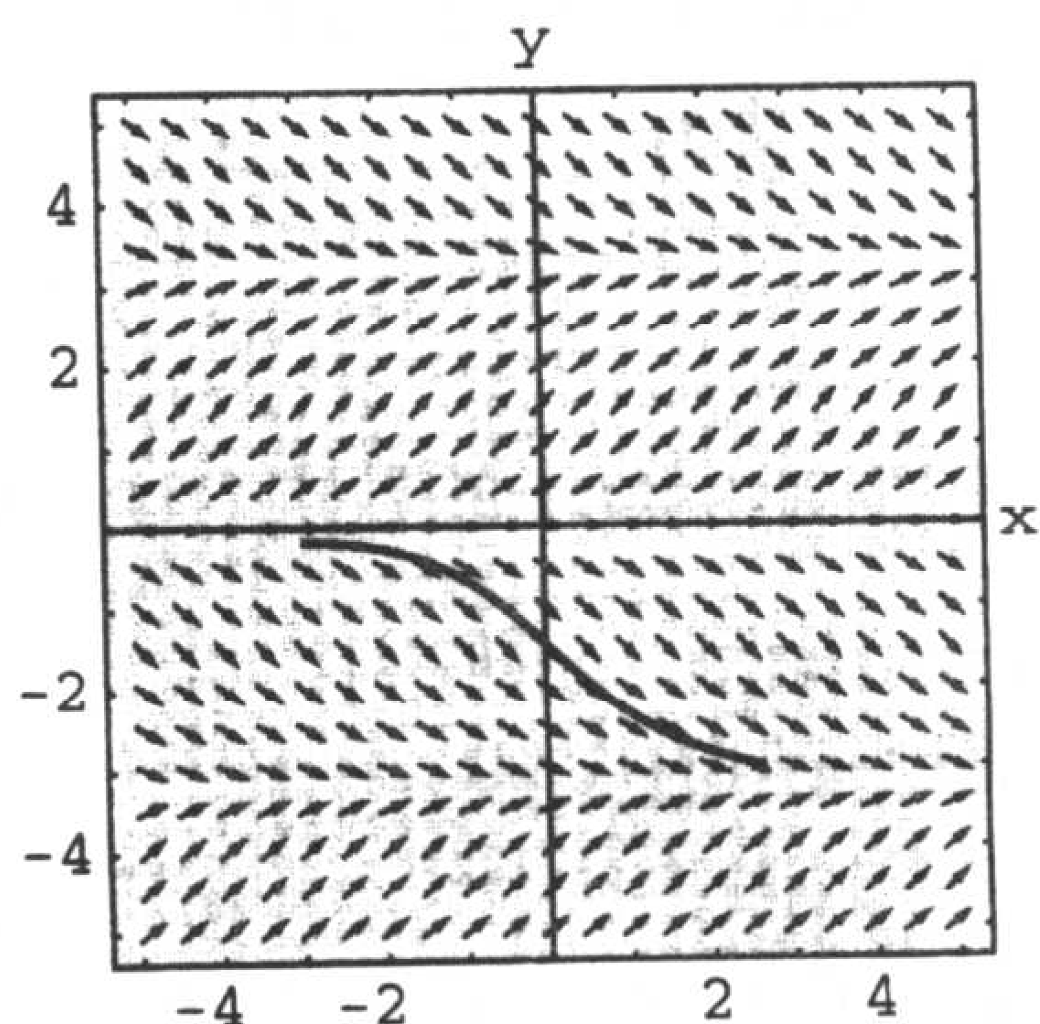


图 2.3　$dy/dx=\sin y$ 的方向场

递增/递减　作为一个函数，dy/dx 给出了在构造方向场中起到关键作用的斜率值．另外，一阶导数还被用来描述其他的性质，当 x 在区间 I 上满足 $dy/dx>0$(或 $dy/dx<0$)时，则称可微函数 $y=y(x)$在区间 I 上递增(或递减)．

自治一阶微分方程　在 1.1 节中，我们已经把常微分方程分为线性和非线性两类．现在我们要用另一种方法对常微分方程进行分类．这种分类对微分方程的定性分析是非常重要的．在一个微分方程中，如果其自变量没有显式地在方程中出现，则此方程称为是自治的(autonomous)．如果 x 为自变量，则自治一阶微分方程可以记为 $F(y, y')=0$，或写成标准形式

$$\frac{dy}{dx}=f(y).\tag{1}$$

今后我们假设(1)式中的 f 及其导函数 f' 为 y 在一些固定区间 I 上的连续函数．一阶方程

$$\overset{f(y)}{\downarrow}\qquad\qquad\overset{f(x,y)}{\downarrow}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.2xy$$

分别为自治的和非自治的.

在实际应用中遇到的很多微分方程，如在物理定律中不随时间而改变的方程就是自治方程. 正如我们在第 1.3 节中看到的，在应用中，除 y 和 x 之外的其他符号通常也被用来表示自变量或因变量. 例如，若用 t 来表示时间，则以下方程

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=kA,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(n+1-x),\quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-T_m),\quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=6-\frac{1}{100}A$$

都具有时间独立性，其中 k、n 及 T_m 都为常数. 所以，以上这些在第 1.3 节中介绍的一阶微分方程是自治的.

临界点 在(1)式中，f 等于 0 是非常重要的. 如果存在一个实数 c 使得 f 为 0，即 $f(c)=0$，那么我们称 c 为自治方程(1)的临界点(critical point). 临界点也称为均衡点(equilibrium point)或稳定点(stationary point). 如果我们把 $y(x)=c$ 代入(1)式，则方程两边均为 0，这意味着：如果 c 是(1)的一个临界点，则 $y(x)=c$ 就是自治方程的一个常数解. (1)的一个常数解 $y(x)=c$ 也称为是一个均衡解(equilibrium solution)；均衡解是(1)的唯一常数解.

正如前面所提到的，对于(1)的非常数解 $y=y(x)$，我们可以通过其导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的代数符号来判断其增减性；这时我们就要找出 $f(y)$ 为正或为负的区间.

例 3 自治微分方程

微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(a-bP),\quad a>0,\quad b>0$$

具有 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)$ 的形式，这里的 t 和 P 相当于(1)中的 x 和 y，这个方程显然是自治的. 从 $f(P)=P(a-bP)=0$ 中我们可以看到，0 和 a/b 是方程的临界点，故方程的均衡解为 $P(t)=0$ 及 $P(t)=a/b$. 把临界点放在垂直坐标轴上，则坐标轴被分为三个区间：$-\infty<P<0$，$0<P<a/b$ 及 $a/b<P<+\infty$. 图 2.4 中坐标轴上的箭头表示了 $f(P)=P(a-bP)$ 在这些区间上的符号以及方程的非常数解 $P(t)$ 在区间上的增减性. 以下表格对图 2.4 做了说明.

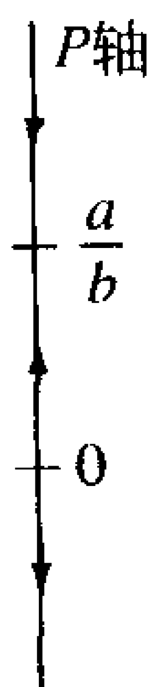


图 2.4

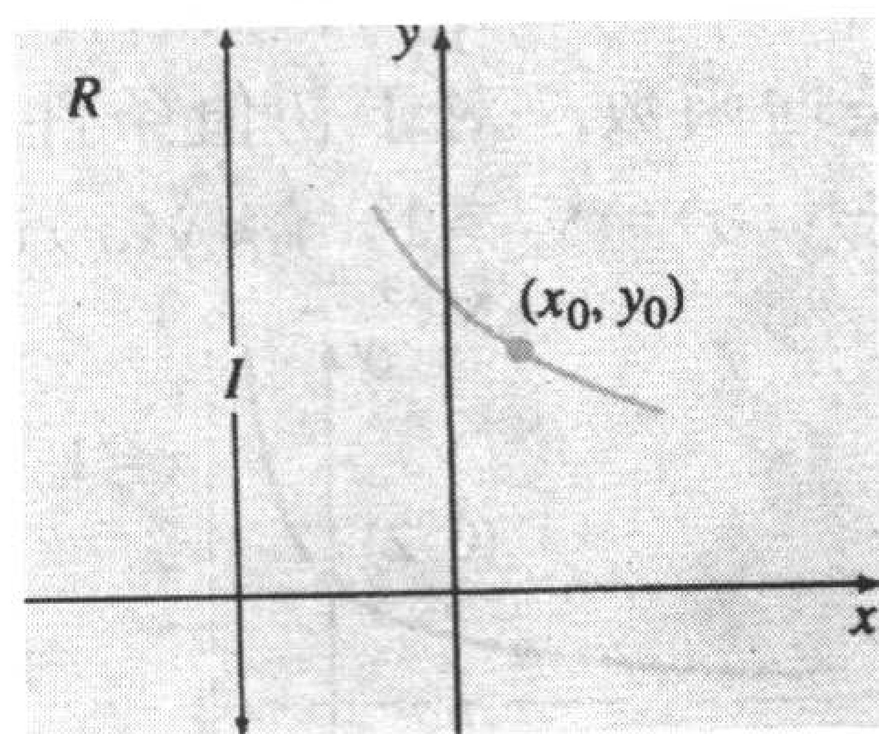
区间	$f(P)$的符号	$P(t)$	箭头
$(-\infty, 0)$	负	递减	指向下
$(0, a/b)$	正	递增	指向上
$(a/b, +\infty)$	负	递减	指向下

■

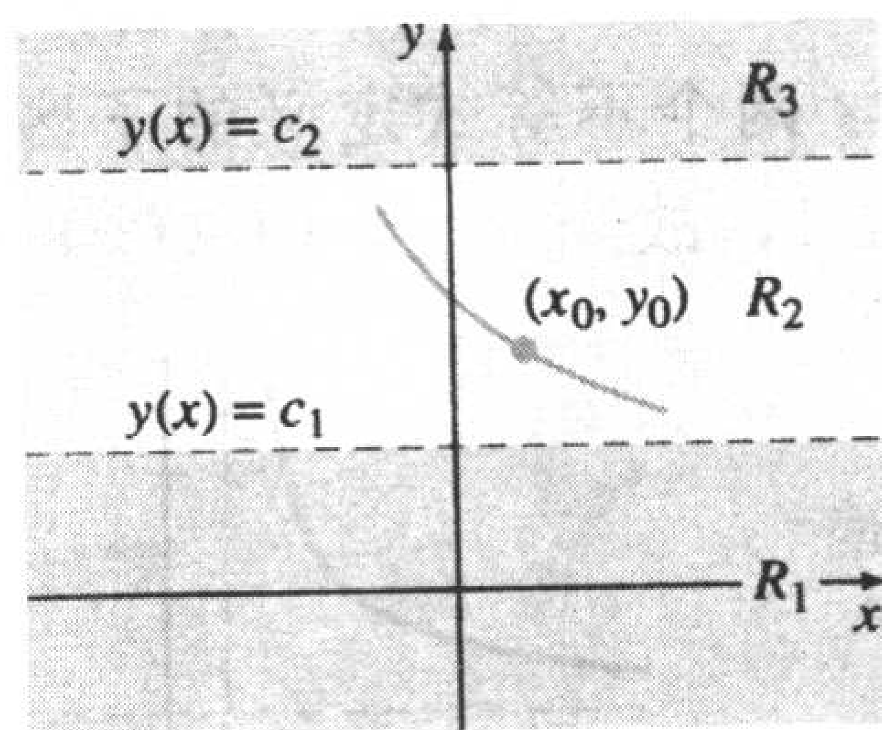
图 2.4 称为微分方程 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=P(a-bP)$ 的一维相图(one-dimensional phase portrait)或简称相图(phase portrait). 这一垂直坐标轴称为相线(phase line).

解曲线 在不解自治微分方程的情况下，我们先对解曲线做一些讨论．由于(1)中的 f 是与变量 x 无关的，我们可以把 f 定义在 $-\infty<x<+\infty$ 或 $0\leqslant x<+\infty$ 上．又因为 f 及其导数 f' 在区间 I 上关于 y 连续，根据定理 1.1，在 xy 平面上存在与 I 相关的水平带或区域 R，使得过 R 内的任意一点 (x_0, y_0) 有且仅有一条(1)的解曲线．如图 2.5 (a)所示．为方便讨论，我们设方程(1)有两个临界点 c_1、c_2，且 $c_1<c_2$．两个均衡解的图像为两条水平线 $y(x)=c_1$ 和 $y(x)=c_2$，这两条水平线将 R 分为 R_1、R_2、R_3 三个子区域．如图 2.5(b)所示．现在我们不加证明地给出几个关于解出(1)的非常数解 $y(x)$ 的结论：

- 如果 (x_0, y_0) 是子区域 R_i，$i=1, 2, 3$ 内一点且 $y(x)$ 是通过该点的解，则对于所有的 x，$y(x)$ 都在这一子区域内．如图 2.5(b)所示，解 $y(x)$ 被限制在 c_1 上方 c_2 下方的区域内；即 $c_1<y(x)<c_2$．解曲线之所以对于所有 x 都在子区域 R_2 内，是因为(1)的非常数解不能穿越常数解 $y(x)=c_1$ 或 $y(x)=c_2$．请参考练习 2.1 中的习题 33.
- 由于 f 的连续性，在一个子区域 R_i，$i=1, 2, 3$ 内必有 $f(y)>0$ 或 $f(y)<0$ 对所有 x 成立．也就是说，$f(y)$ 在一个子区域内不能改变符号．请参考练习 2.1 中的习题 33.
- 因为在一个子区域内 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(y(x))$ 非正即负，故解 $y(x)$ 是严格单调的，$y(x)$ 在一个子区域 R_i，$i=1, 2, 3$ 内非增即减．所以 $y(x)$ 既不会震荡，也没有极值(最大值或最小值)．请参考练习 2.1 中的习题 33.
- 如果 $y(x)$ 以一临界点作为上限(如子区域 R_1)或以一临界点作为下限(如子区域 R_3)，则 $y(x)$ 一定会在 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时靠近该点．如果 $y(x)$ 既有上限又有下限(如子区域 R_2)，则 $y(x)$ 一定会在 $x\to+\infty$ 时靠近一个临界点，在 $x\to-\infty$ 时靠近另外一个临界点．请参考练习 2.1 的习题 34.



a) R区域



b) R的R_1、R_2和R_3子区域

图 2.5

根据上述内容，我们回顾一下例 3 中的微分方程．

例 4 回顾例 3

在 P 轴或相线上被临界点 0 和 a/b 划分的三个区间现对应于 tP 平面上的三个子区域

$$R_1: -\infty<P<0,\ R_2: 0<P<a/b \text{ 及 } R_3: a/b<P<+\infty,$$

当 $-\infty<t<+\infty$ 时，图 2.4 中的相图告诉我们，$P(t)$ 在 R_1 内递减，在 R_2 内递增，在 R_3 内递减．如果 $P(0)=P_0$ 为一初值，则在 R_1、R_2、R_3 内，分别有：

(ⅰ)若 $P_0<0$，则 $P(t)$ 有上限．因为 $P(t)$ 递减，所以 $P(t)$ 将随 t 的增加而无限制地递减，

且当 $t\to-\infty$ 时 $P(t)\to 0$. 这意味着 t 轴负半轴是解曲线的水平渐近线.

(ⅱ)若 $0<P_0<a/b$，则 $P(t)$有界. 因为 $P(t)$递增，所以当 $t\to+\infty$ 时 $P(t)\to a/b$，当 $t\to-\infty$ 时 $P(t)\to 0$. $P=0$ 和 $P=a/b$ 分别为始于相应子区域的解曲线的水平渐近线.

(ⅲ)若 $P_0>a/b$，则 $P(t)$有下限. 因为当 $t\to+\infty$ 时 $P(t)\to a/b$，所以 $P(t)$递减，这意味着 $P=a/b$ 是解曲线的水平渐近线.

在图 2.6 中，也给出了相图在 tP 平面上子区域 R_1、R_2、R_3(图中的阴影部分)左边的图像. 图中的虚线表示了均衡解 $P=a/b$ 和 $P=0$(t 轴)的图像；实线是 $P(t)$刚才讨论的三种情况的典型代表. ■

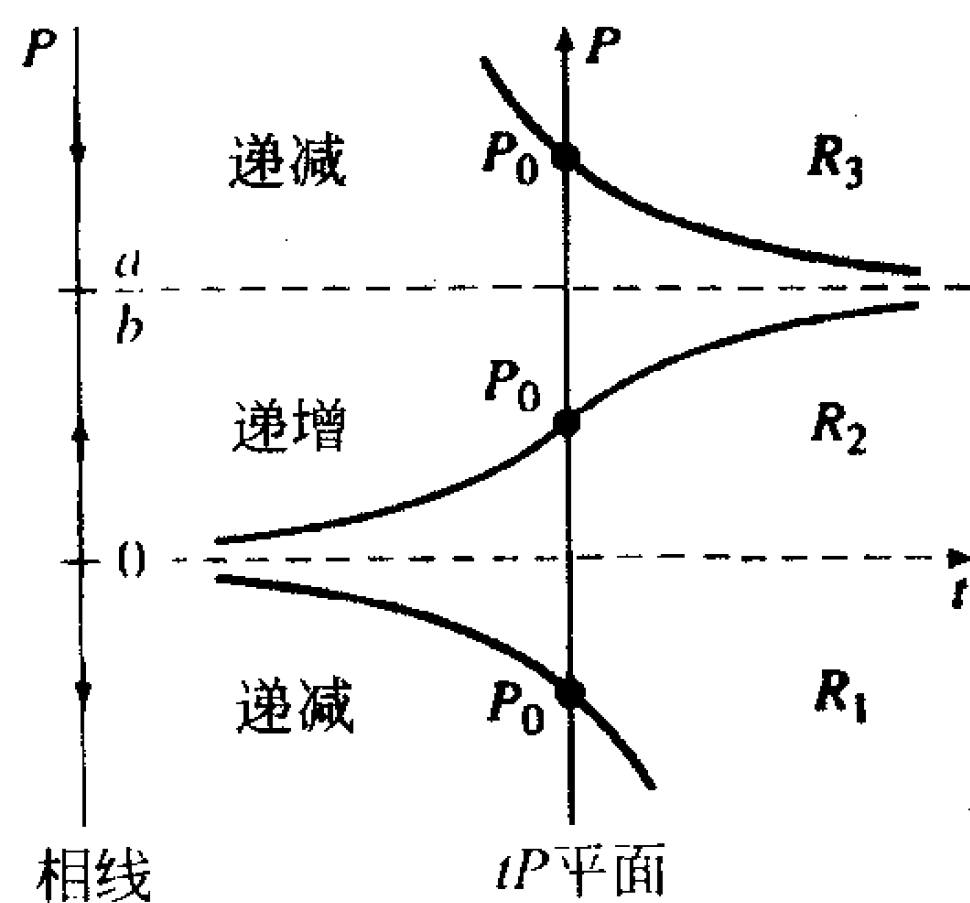


图 2.6

由例 4 可以看出，在诸如 R_1 的子区域中，$P(t)$递减且无下限，则必有 $P(t)\to-\infty$. 这并不是说当 $t\to+\infty$ 时 $P(t)\to-\infty$；也可能是当 $t\to T$ 时 $P(t)\to-\infty$，这里 $T>0$ 是一个依赖于初值条件 $P(t_0)=P_0$ 的有限数. 用动态术语描述，$P(t)$可能在有限时间内“爆破”；反映在图像上，$P(t)$有一条垂直渐近线 $t=T>0$. 对于子区域 R_3 有类似的讨论.

例 2 中的微分方程 $dy/dx=\sin y$ 是自治的且有无数个临界点，因为当 $y=n\pi$ 时 $\sin y=0$，n 为整数. 然后可知过点$(0,-3/2)$的解 $y(x)$被限于相邻的两临界点之间$(-\pi<y(x)<0)$且为递减(当 $-\pi<y<0$，$\sin y<0$)，则 $y(x)$必在 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时分别接近水平渐近线 $y=-\pi$ 和 $y=0$.

例 5　自治微分方程的解曲线

自治方程 $dy/dx=(y-1)^2$ 有一个临界点 1. 由图 2.7(a)的相图我们可知，$y(x)$在由 $-\infty<y<1$ 和 $1<y<+\infty$ 两个不等式定义的子区域内都是增函数. 对于初值条件 $y(0)=y_0<1$，解 $y(x)$递增且有上限 1，故当 $x\to\infty$ 时 $y(x)\to 1$；对于 $y(0)=y_0>1$，解 $y(x)$递增且无上界.

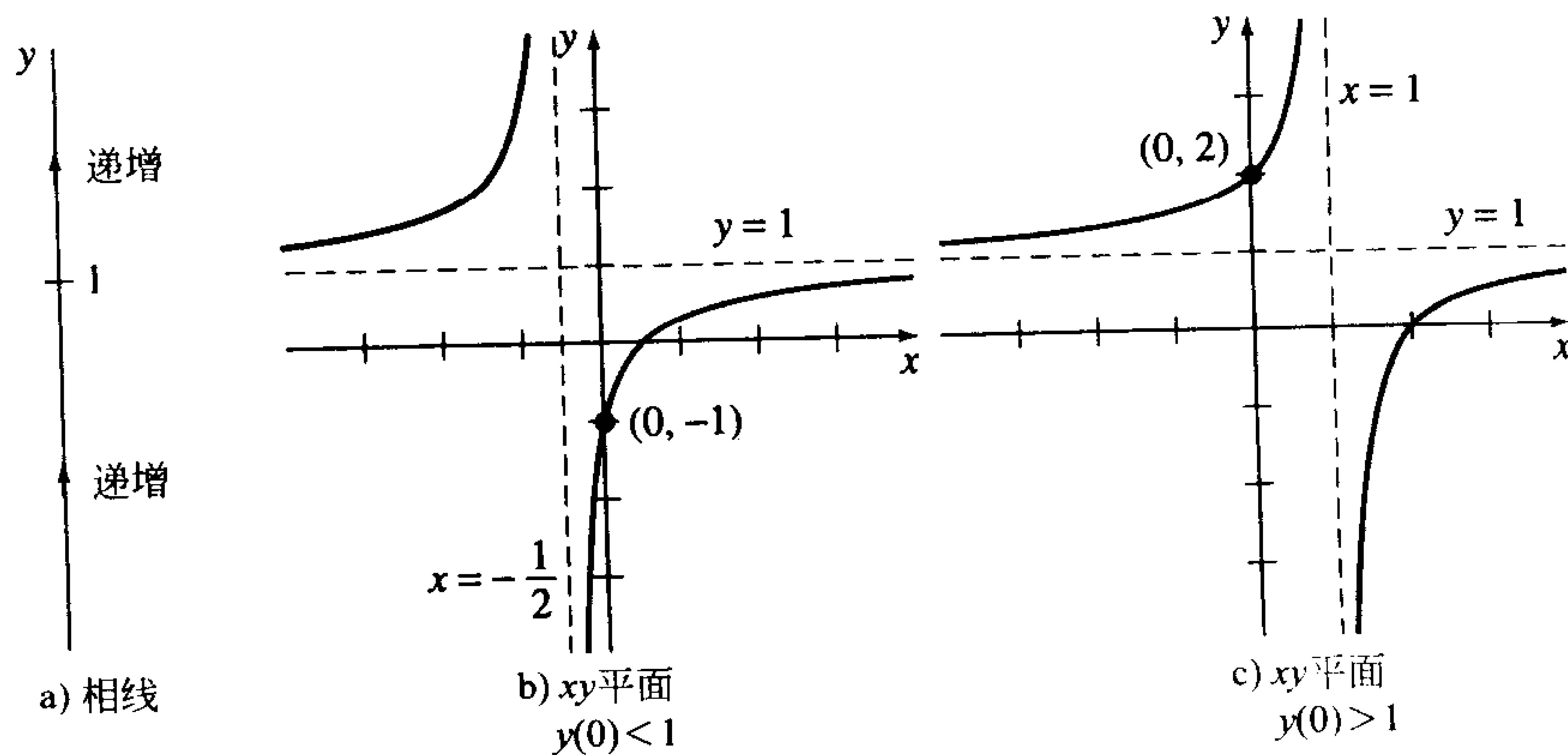


图 2.7

现给出微分方程的一个单参数解族 $y(x)=1-1/(x+c)$. (请参考练习 2.2 中习题 4). 给定的初值问题决定了 c 的值. 例如给定 $y(0)=-1<1$ 和 $y(0)=2>1$，将会有 $y(x)=1-1/(x+1/2)$和 $y(x)=1-1/(x-1)$. 如图 2.7(b)和(c)所示，这些函数的图像都有一条垂直的

渐近线．不过要记住，初值问题

$$dy/dx=(y-1)^2,\ y(0)=-1 \text{ 及 } dy/dx=(y-1)^2,\ y(0)=2$$

的解定义在特殊区间上，它们分别是

$$y(x)=1-\frac{1}{x+\frac{1}{2}},-1/2<x<+\infty \text{ 和 } y(x)=1-\frac{1}{x-1},-\infty<x<1.$$

这两条解曲线是图 2.7(b)和(c)中为实线的那部分．如相图所示，图 2.7 (b)中的解在 $x\to+\infty$时有 $y(x)\to1$；图 2.7 (c)中的解在 $x\to1$(从左边)时有 $y(x)\to+\infty$. ■

吸引子和排斥子　对于(1)的解，在其临界点 c 附近有三种类型的性态．当 c 两边的箭头都指向 c 点，如图 2.8 (a)所示，所有从足够靠近 c 点的初值点(x_0，y_0)出发的解都有 $\lim_{x\to\infty}y(x)=c$．由此，认为 c 点是渐近稳定的(asymptotically stable)．与物理学做一对比，一个始于 c 附近的解就类似于一个带电粒子，它会被带有相反电荷的 c 拉住并向其靠近，所以 c 也被称为吸引子．图 2.8(b)中的箭头方向都背离 c 点，所以所有始于 c 附近的解都会随着 x 的增大而远离 c 点．这种情况中为 c 点称不稳定的(unstable)．一个不稳定的临界点也叫做排斥子．图 2.8(c)和(d)中的临界点 c 既不是吸引子也不是排斥子．不过因为 c 点既表现出了吸引子的性质，又表现出了排斥子的性质——即当初值点足够靠近 c 点的一边，解会被吸引到 c 点，而当靠近另一边时又会被排斥开，我们称 c 为半稳定(semi-stable)的．例 3 中的临界点 a/b 和 0 分别为渐近稳定的(吸引子)和不稳定的(排斥子)．例 5 中的临界点是半稳定的．

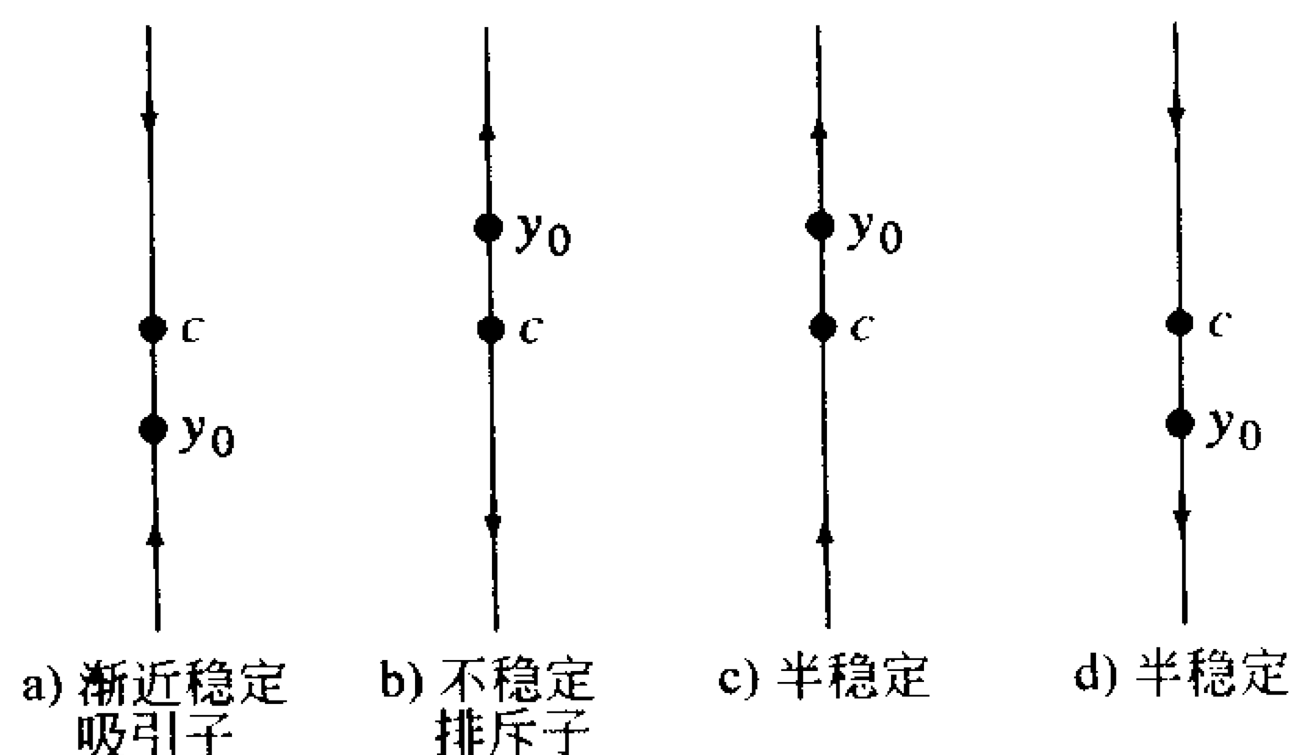


图　2.8

练习 2.1

在第 1～4 题中，根据计算机绘出的方向场，徒手绘出过给定点解曲线的近似图．

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

(a) $y(0)=5$　(b) $y(3)=3$

(c) $y(4)=2$　(d) $y(-5)=-3$

2. $\frac{dy}{dx}=e^{-0.01xy^2}$

(a) $y(-6)=0$　(b) $y(0)=1$

(c) $y(0)=-4$　(d) $y(8)=-4$

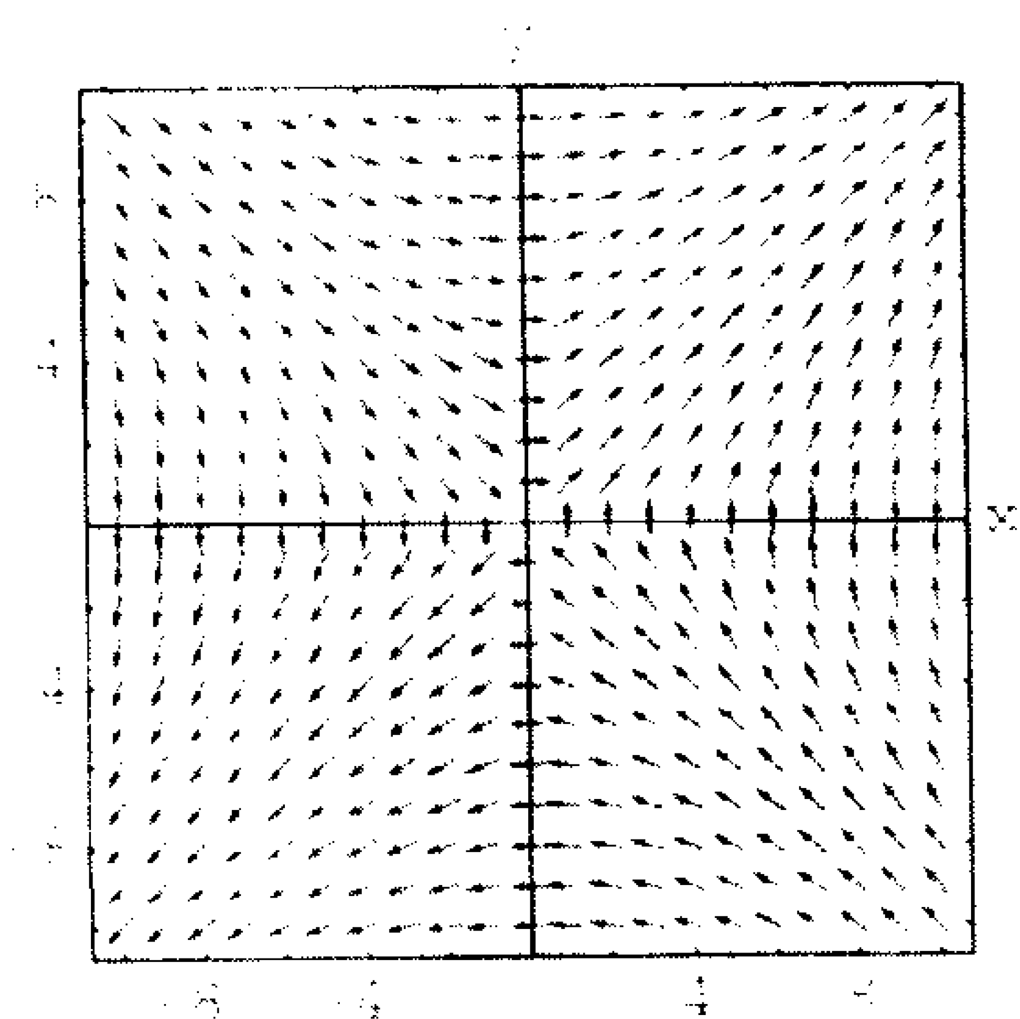


图　2.9

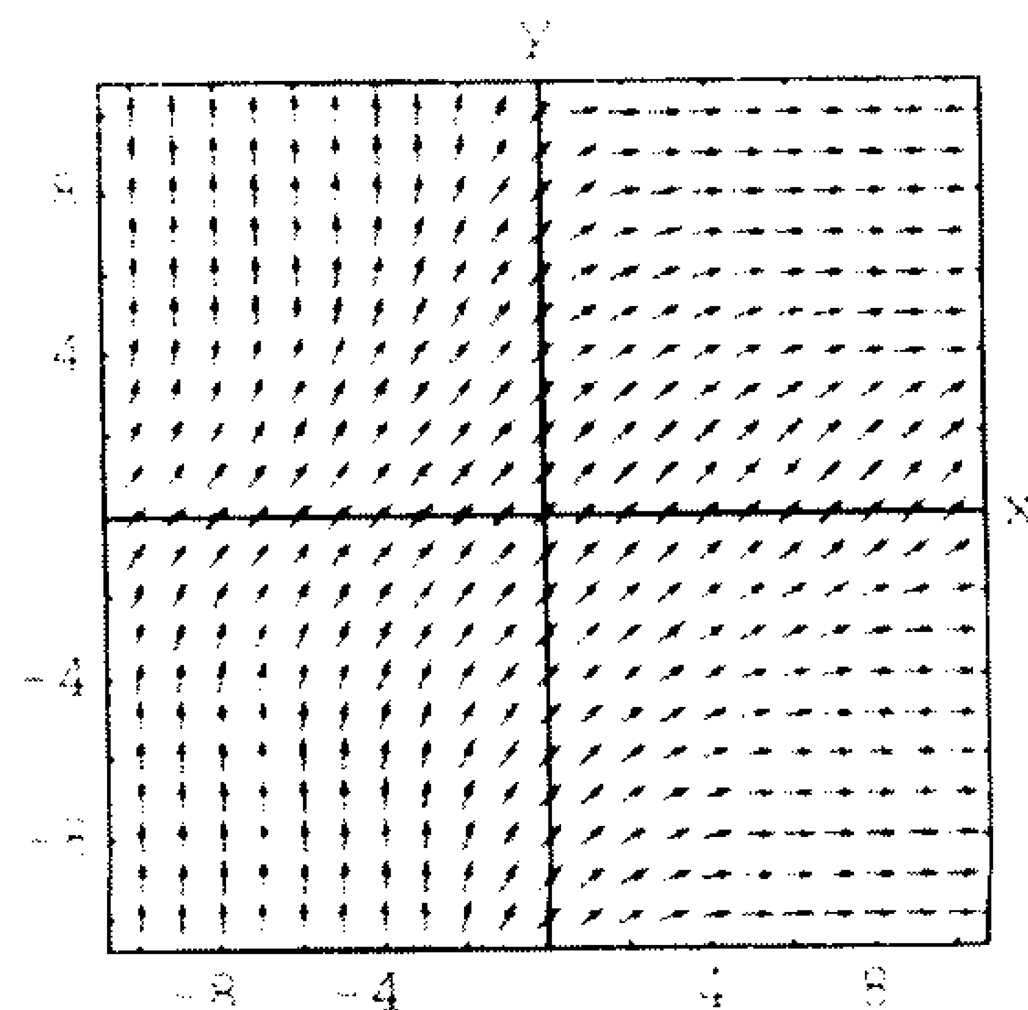


图　2.10

3. $\frac{dy}{dx}=1-xy$

(a) $y(0)=0$ (b) $y(-1)=0$

(c) $y(2)=2$ (d) $y(0)=-4$

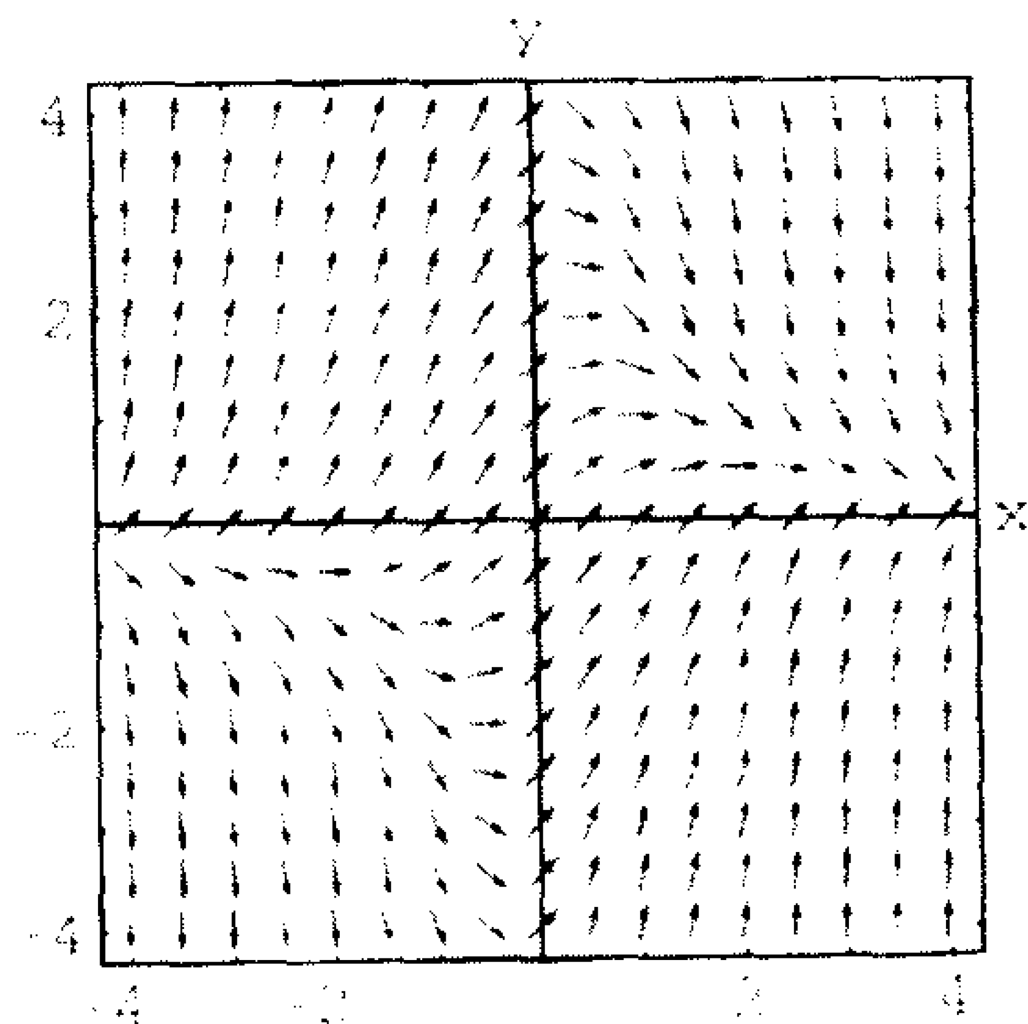


图 2.11

4. $\frac{dy}{dx}=(\sin x)\cos y$

(a) $y(0)=1$ (b) $y(1)=0$

(c) $y(3)=3$ (d) $y(0)=-\frac{5}{2}$

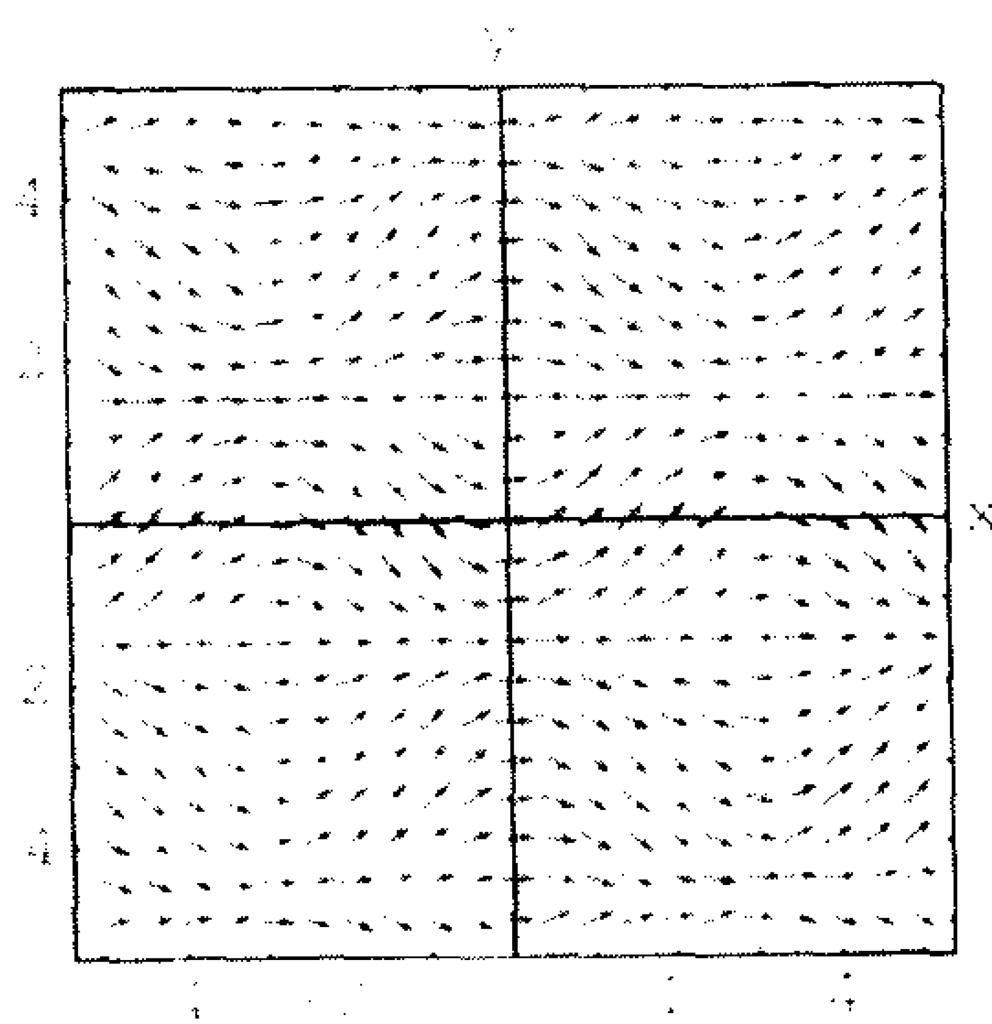


图 2.12

在第5～12题中，用软件绘出给定微分方程的方向场，然后徒手绘出过给定点解曲线的近似图.

5. $y'=x$

(a) $y(0)=0$ (b) $y(0)=-3$

6. $y'=x+y$

(a) $y(-2)=2$ (b) $y(1)=-3$

7. $y\frac{dy}{dx}=-x$

(a) $y(1)=1$ (b) $y(0)=4$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$

(a) $y(0)=1$ (b) $y(-2)=-1$

9. $\frac{dy}{dx}=0.2x^2+y$

(a) $y(0)=\frac{1}{2}$ (b) $y(2)=-1$

10. $\frac{dy}{dx}=xe^y$

(a) $y(0)=-2$ (b) $y(1)=2.5$

11. $y'=y-\cos\frac{\pi}{2}x$

(a) $y(2)=2$ (b) $y(-1)=0$

12. $\frac{dy}{dx}=1-\frac{y}{x}$

(a) $y\left(-\frac{1}{2}\right)=2$ (b) $y\left(\frac{3}{2}\right)=0$

在第13和14题中，分别绘出 $f(y)$ 和 $f(x)$ 的图像. 请在适当区域内徒手绘出 $dy/dx=f(y)$（习题13）和 $dy/dx=f(x)$（习题14）的方向场.

13.

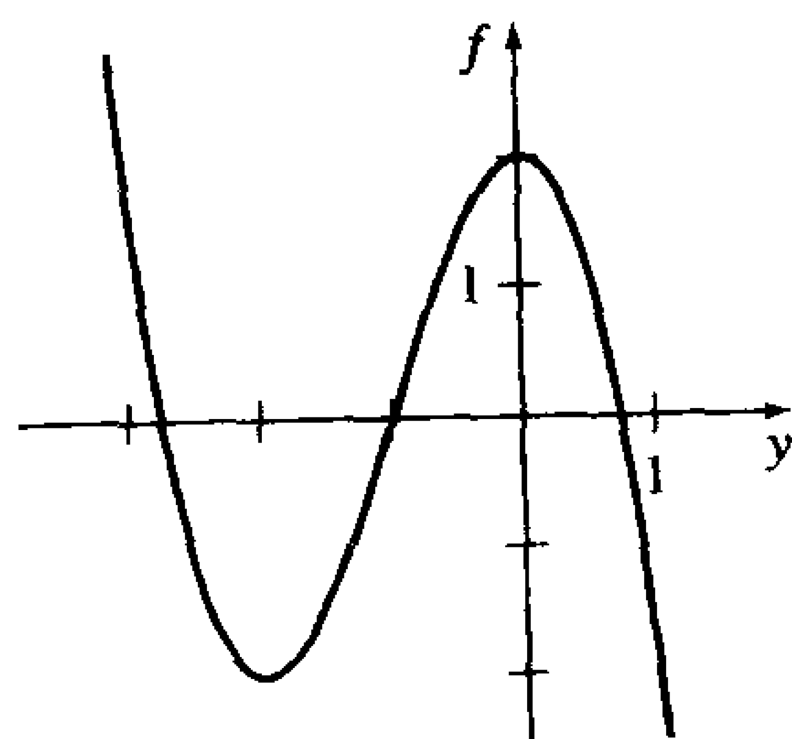


图 2.13

14.

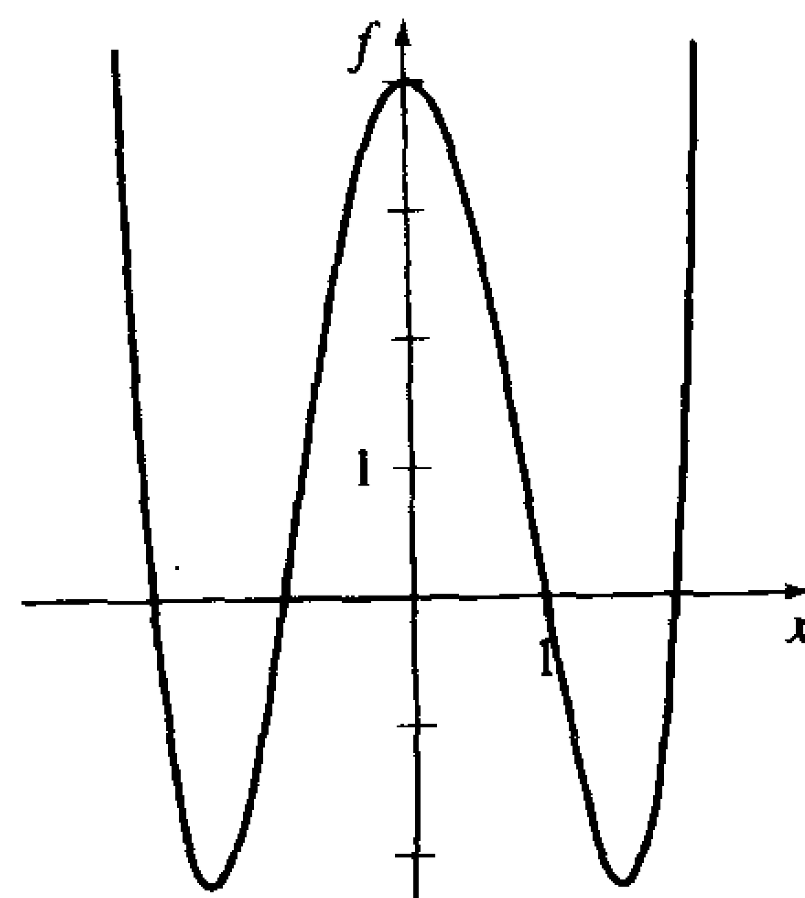


图 2.14

15. 考虑自治一阶微分方程 $dy/dx=y-y^3$ 的初值问题 $y(0)=y_0$，当 y_0 在以下所给范围内时，徒手绘出解 $y(x)$ 的图像.

(a) $y_0>1$　　(b) $0<y_0<1$　　(c) $-1<y_0<0$　　(d) $y_0<-1$

16. 考虑自治一阶微分方程 $dy/dx=y^2-y^4$ 的初值问题 $y(0)=y_0$，当 y_0 在以下所给范围内时，徒手绘出解 $y(x)$ 的图像.

(a) $y_0>1$　　(b) $0<y_0<1$　　(c) $-1<y_0<0$　　(d) $y_0<-1$

在第 17～24 题中，找出给定自治一阶微分方程的临界点并绘出其相图. 判断每一临界点是渐近稳定、不稳定，还是半稳定的. 再在均衡解划分的 xy 平面区域内徒手绘出具有代表性的解曲线图像.

17. $\dfrac{dy}{dx}=y^2-3y$

18. $\dfrac{dy}{dx}=y^2-y^3$

19. $\dfrac{dy}{dx}=(y-2)^4$

20. $\dfrac{dy}{dx}=10+3y-y^2$

21. $\dfrac{dy}{dx}=y^2(4-y^2)$

22. $\dfrac{dy}{dx}=y(2-y)(4-y)$

23. $\dfrac{dy}{dx}=y\ln(y+2)$

24. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^y-9y}{e^y}$

25. 考虑自治微分方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv,$$

这里 k 为正的比例常数，g 为重力加速度，它控制着质量为 m 的物体下落时重力对速度 v 的影响. 由于 $-kv$ 代表了空气阻力，物体从高处下落的速度不可能随时间的增大而无限增大.

(a) 利用方程的相图找到物体速度的临界值，并解释理由.

(b) 如果空气阻力与 v^2 成正比，求出物体下落的极限速度. 请参考 1.3 节中“落体运动”小节，或“练习 1.3”中第 15 题.

26. 当几种物质发生化学反应时，新物质的生成速率由以下自治微分方程决定：

$$\frac{dX}{dt}=k(\alpha-X)(\beta-X),$$

其中 $k>0$ 是常比例系数且 $\beta>\alpha>0$. $X(t)$ 表示在 t 时刻生成的新物质的数量. 请参考 1.3 节中“化学反应”小节.

(a) 由微分方程的相图，能预见当 $t\to+\infty$ 时 X 的性态吗？

(b) 令 $\alpha=\beta$，如果 $X(0)<\alpha$，那么当 $t\to+\infty$ 时 X 是怎样的？由微分方程的相图，能预见如果 $X(0)>\alpha$，当 $t\to+\infty$ 时 X 的性态吗？

(c) 当 $k=1$，$\alpha=\beta$ 时，证明 $X(t)=\alpha-1/(t+c)$ 为微分方程的显式解. 找到两个解分别满足 $X(0)=\alpha/2$ 和 $X(0)=2\alpha$. 绘出这两个解的图像. 这两个解的性态与(b)的答案一致吗？

在第 27 和 28 题中，考虑自治微分方程 $dy/dx=f(y)$，其中 f 的图像如题所给. 利用图像确定两个方程的临界点. 绘出每个微分方程的相图. 在均衡解划分的 xy 平面的子区域上，绘出具有代表性的解曲线.

27.

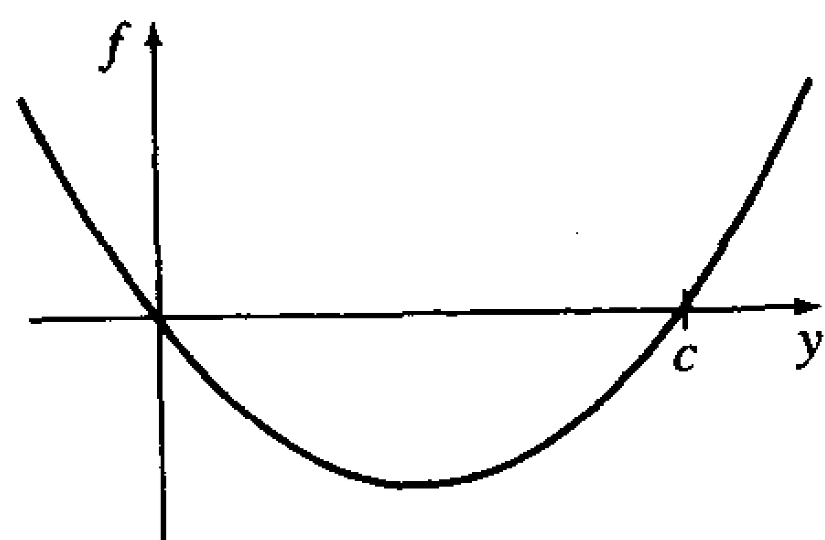


图 2.15

28.

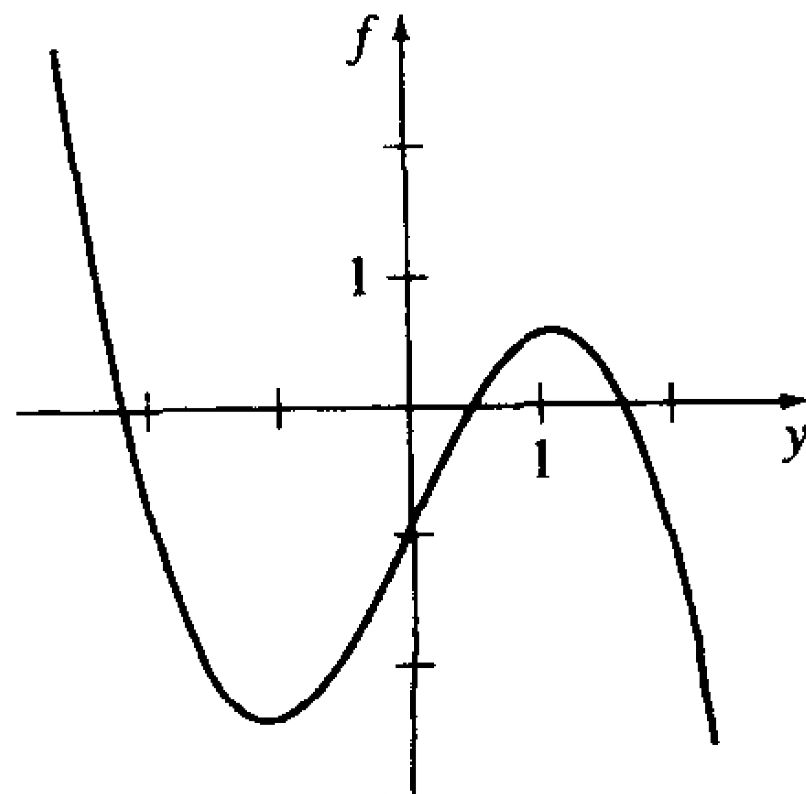


图 2.16

讨论题

29. 微分方程为 $dy/dx=x^2+y^2$. 那么如何描述圆 $x^2+y^2=c^2$, $c>0$ 在点(x, y)处的等斜线?

30. (a)考虑微分方程 $dy/dx=x(y-4)^2-2$ 的方向场，但不要用程序绘图. 求出 $x=0$, $y=3$, $y=4$, $y=5$ 时等斜线的斜率.

    (b)考虑 $dy/dx=x(y-4)^2-2$ 的初值问题 $y(0)=y_0$，这里 $y_0<4$. 根据(a)提供的信息，讨论当 $x\to\infty$ 时，是否会有解 $y(x)\to\infty$.

31. 对一阶微分方程 $dy/dx=f(x, y)$，定义一条曲线 $f(x, y)=0$，称其为*零群*(nullcline)，这是因为在曲线上某点处的等斜线斜率为 0. 利用计算机软件在一矩形区域内绘出方程 $dy/dx=x^2-2y$ 的方向场，并在其中添加零群 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像. 讨论解曲线在 $y<\frac{1}{2}x^2$ 和 $y>\frac{1}{2}x^2$ 两区域内的性态. 绘一些解曲线的近似图，试着把观察到的结果加以推广.

32. 自治一阶微分方程的临界点 c 被称为是*孤立的*(isolated)，如果存在一个开区间仅包含 c 点而不包含其他临界点. 讨论是否存在形如(1)的自治方程，其每个临界点都不是孤立的. 注意不要把问题考虑得太复杂.

33. 设 $y(x)$是自治微分方程(1)的非常数解. 如果 c 是(1)的一个临界点，讨论为什么 $y(x)$的图像不能穿越平衡解 $y=c$ 的图像. 讨论在图 2.5 中，为什么 $f(y)$的符号在子区域里不会改变? 为什么 $y(x)$不是摆动的且不能达到一个相对极值(最大值或最小值)?

34. 设 $y(x)$是自治方程 $dy/dx=f(y)$的解，且分别以两个连续临界点 $c_1<c_2$为上下界，如图 2.5 (b)中的子区域 R_2. 若在区域内 $f(y)>0$，则 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=c_2$. 讨论为什么不存在一个 $L<c_2$使得 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=L$. 作为讨论的一部分，注意在 $x\to+\infty$ 时 $y'(x)$ 的变化情况.

35. (a)利用自治方程(1)，讨论如何确定一条解曲线*拐点*(point of inflection)的位置.

    (b)考虑微分方程 $dy/dx=y^2-y-6$. 根据(a)，在 y 轴上寻找解曲线上凹和下凹的区间. 讨论 $dy/dx=y^2-y-6$ 的初值问题 $y(0)=y_0$, $-2<y_0<3$，为什么会具有相同的纵坐标的拐点. 这个纵坐标是多少? 绘出 $y(0)=-1$ 及 $y(2)=2$ 的解曲线.

2.2 可分离变量

求解微分方程时我们会经常使用积分，这就需要一些特殊的积分技巧. 我们有必要先通过微积分教材复习一下基本的积分方法，如果是使用计算机代数系统(CAS, computer algebra system)，则需要复习积分的命令语法. 有两点很重要，即分步积分和对一个有理函数的部分分式分解.

积分求解 我们从一阶方程 $dy/dx=f(x, y)$中最简单的一类方程开始求解方法的研究. 当 f 与变量 y 无关时，即 $f(x, y)=g(x)$，则微分方程

$$\frac{dy}{dx}=g(x) \tag{1}$$

可通过积分求解. 如果 $g(x)$ 是一个连续函数，则对(1)式两边积分得解 $y=\int g(x)dx=G(x)+c$，其中 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数(不定积分). 例如，$dy/dx=1+e^{2x}$，则 $y=\int(1+e^{2x})dx$；也即 $y=x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$.

方程(1)及其解法只是当方程 $dy/dx=f(x, y)$中的 f 为 x 或 y 的函数时的特殊情况.

定义 2.1 变量分离方程

具有以下形式的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y)$$

称为是可分离的(separable)或含有可分离变量(separable variable).

例如，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2xe^{3x+4y} \text{ 以及 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\sin x$$

分别是可分离的和不可分离的. 对于第一个方程，我们可以将 $f(x,y)=y^2xe^{3x+4y}$ 化为

$$f(x,y)=y^2xe^{3x+4y}=\underbrace{(xe^{3x})}_{g(x)}\underbrace{(y^2e^{4y})}_{h(y)},$$

但在第二个方程中，我们无法把 $y+\sin x$ 化为 x 的函数与 y 的函数的乘积形式.

在可分离方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=g(x)h(y)$ 两边同除以 $h(y)$，可得

$$p(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x), \tag{2}$$

这里为了方便起见，我们令 $p(y)$ 为 $1/h(y)$. 当 $h(y)=1$ 时(2)变为(1).

现如果 $y=\phi(x)$ 是(2)的一个解，则必有 $p(\phi(x))\phi'(x)=g(x)$，所以有

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

但因为 $\mathrm{d}y=\phi'(x)\mathrm{d}x$，所以(3)等价于

$$\int p(y)\mathrm{d}y=\int g(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } H(y)=G(x)+c, \tag{4}$$

这里 $H(y)$和 $G(x)$分别是 $p(y)=1/h(y)$和 $g(x)$的原函数.

求解方法 方程(4)给出了变量分离的求解过程. 通过对 $p(y)\mathrm{d}y=g(x)\mathrm{d}x$ 两边积分，就可以得到方程的一个单参数解族，这一解族通常是隐式解.

注 对变量分离方程积分后没必要保留两个参数. 因为我们得到 $H(y)+c_1=G(x)+c_2$ 后移项得到的 c_2-c_1 可由一个常数 c 代替，如(4)中那样. 在后面的很多例子中，我们为方便起见，会经常对参数做类似处理，例如多个参数的乘积或加减常被一个参数代替.

例 1 求解可分离变量的微分方程

解方程 $(1+x)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$.

解 将方程除以$(1+x)y$，方程变为 $\mathrm{d}y/y=\mathrm{d}x/(1+x)$，然后我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

$$\ln|y|=\ln|1+x|+c_1$$

$$y=e^{\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln|1+x|}\cdot e^{c_1} \quad \leftarrow \text{指数规则}$$

$$=|1+x|e^{c_1}$$

$$=\pm e^{c_1}(1+x). \quad \leftarrow \begin{cases}|1+x|=1+x, x\geqslant -1\\ |1+x|=-(1+x), x<-1\end{cases}$$

用 c 替换 $\pm e^{c_1}$ 得 $y=c(1+x)$.

另一种求解方法 因为两边积分的结果都是一个对数，所以对于积分常数，更明智的选择是 $\ln|c|$ 而不是 c. 把第二行的等式改为 $\ln|y|=\ln|1+x|+\ln|c|$，根据对数性质，我们可以把等式右边合并. 从 $\ln|y|=\ln|c(1+x)|$ 我们立即可得 $y=c(1+x)$. 尽管不定积分并不都得到对数，使用 $\ln|c|$ 往往会更有利. 然而这并不是固定的. ■

在 1.1 节中我们看到解曲线可能仅是一个隐式解 $G(x, y)=0$ 图像中的一条线段或一段弧.

例 2 解曲线

求解初值问题 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}, y(4)=-3$.

解 将方程改写为 $ydy=-xdx$，我们得到

$$\int ydy=-\int xdx \text{ 以及 } \frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c_1.$$

把 $2c_1$ 用 c^2 代替，我们可以将积分结果改写为 $x^2+y^2=c^2$. 这个解表示一个以原点为中心的同心圆解族.

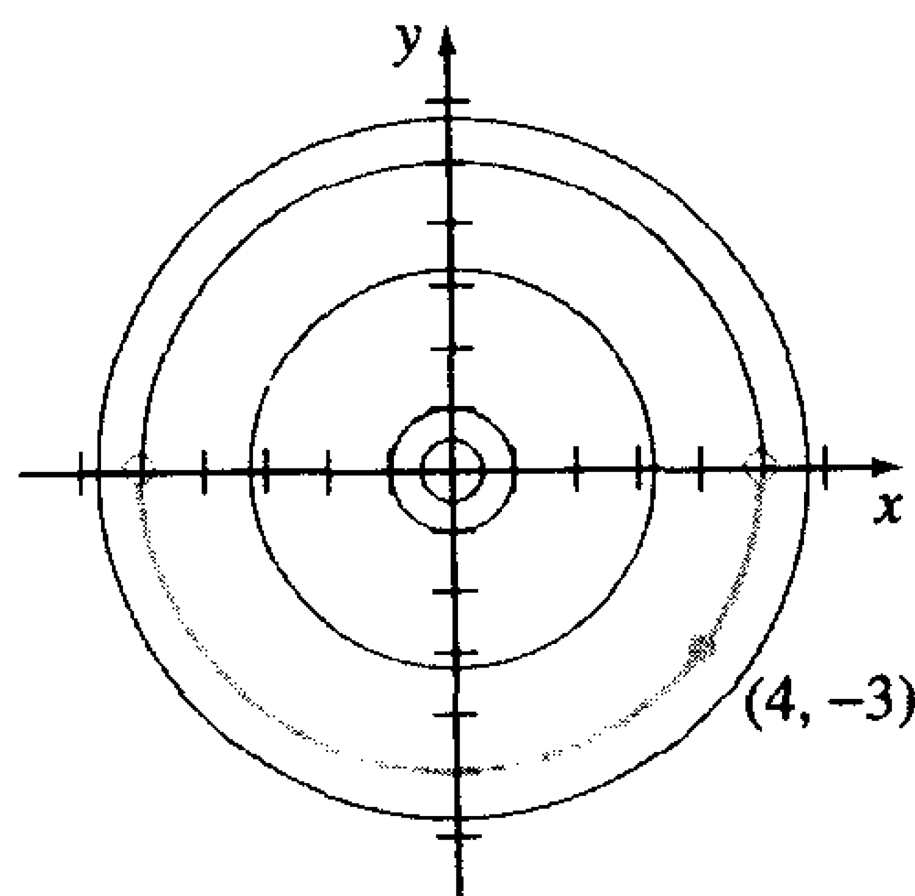


图 2.17

当 $x=4$，$y=-3$ 时，有 $16+9=25=c^2$. 则由初值问题决定了半径为 5 的圆 $x^2+y^2=25$. 因为这个解的形式比较简单，所以我们能求出符合初值条件的显式解. 我们曾在 1.1 节的例 3 中见到过解 $y=\phi_2(x)$ 或 $y=-\sqrt{25-x^2}$，$-5<x<5$. 解曲线即是这个可微函数的图像. 在这种情况里，解曲线是圆的下半部分，如图 2.17 中粗线部分所示，其中包含了点(4，−3). ■

失根 在分离变量时我们需要特别留意，因为作除数的变量可能会在某点取零. 举个例子，如果 r 是函数 $h(y)$的一个零点，而把 $y=r$ 代入 $dy/dx=g(x)h(y)$使得方程两边都等于零；换言之，$y=r$ 是微分方程的一个常数解. 但是在变量分离后，方程 $dy/h(y)=g(x)dx$ 的左边在 r 上没有定义. 因此，由后面的积分和化简得到的解族可能并不包括 $y=r$. 根据前面介绍的内容，这个解被称为一个奇异解.

例 3 失根

解方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2-4$.

解 我们把方程变形为

$$\frac{dy}{y^2-4}=dx \text{ 或 } \left[\frac{1/4}{y-2}-\frac{1/4}{y+2}\right]dy=dx. \tag{5}$$

(5)中的第二个方程是对第一个方程的右边做分式分解得到的结果. 积分并利用对数的性质得到：

$$\frac{1}{4}\ln|y-2|-\frac{1}{4}\ln|y+2|=x+c_1 \text{ 或 } \ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=4x+c_2 \text{ 或} \frac{y-2}{y+2}=\pm e^{4x+c_2}.$$

这里我们用 c_2 代替了 $4c_1$. 最后，我们用 c 代替了 $\pm e^{c_2}$ 然后解出 y，得到单参数解族

$$y=2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}. \tag{6}$$

如果我们把微分方程的右边改写成 $dy/dx=(y-2)(y+2)$，由 2.1 节的讨论，我们知道 $y=2$ 和 $y=-2$ 是两个常数(均衡)解．解 $y=2$ 是解族(6)中的一员(当 $c=0$ 时)．然而，$y=-2$ 是一个奇异解；无论参数 c 取何值都不可能由(6)获得．后面这个解在先前的求解过程中被丢失了．通过检验(5)，我们清楚地认识到必须在解集中补充上 $y=\pm 2$. ■

例 4 **初值问题**

求解 $(e^{2y}-y)\cos x\dfrac{dy}{dx}=e^{y}\sin 2x$，$y(0)=0$.

解 方程两边同除以 $e^{y}\cos x$ 得

$$\frac{e^{2y}-y}{e^{y}}dy=\frac{\sin 2x}{\cos x}dx.$$

在积分之前，我们对方程左边进行逐项约分，并在方程右边利用三角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 化简，则

$$\text{逐项积分}\rightarrow\int(e^{y}-ye^{-y})dy=2\int\sin x dx$$

得

$$e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2\cos x+c. \tag{7}$$

当 $c=4$ 时解满足初值条件 $x=0$ 时 $y=0$. 所以初值问题的解为

$$e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=4-2\cos x. \tag{8}$$

■

计算机应用 我们在 1.1 节末的注释中曾提到，利用一个隐式解 $G(x, y)=0$ 去求一个显式解 $y=\phi(x)$ 可能是困难的．等式(8)说明了用 x 表示出 y 的确是一件困难的事情——有时候是无法化简的．然而从某种意义上来说，诸如(8)的隐式解又是令人沮丧的；我们既无法清楚地了解这个方程的图像又无法知道满足 $y(0)=0$ 的解的定义区间．在有些情况下，我们可以利用技术手段来回答“隐式解到底是怎样的”这一问题．其中一个办法[⊖]就是应用 CAS 里的描点程序．回忆多元微积分学中含有两个变量的函数 $z=G(x, y)$，$G(x, y)=c$ 定义了一条二维曲线，这里 c 是常数，这条曲线被称为函数的等量线(level curve)．利用 CAS，函数 $G(x, y)=e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}+2\cos x$ 的一些等量线在图 2.18 中给出．由(7)定义的解族即是等量线 $G(x, y)=c$．图 2.19 中上面的曲线表示等量线 $G(x, y)=4$，它是解(8)中特殊的一条．图 2.19 中的另外一条等量线是 $G(x, y)=2$，它是解族 $G(x, y)=c$ 中满足 $y(\pi/2)=0$ 的一个．

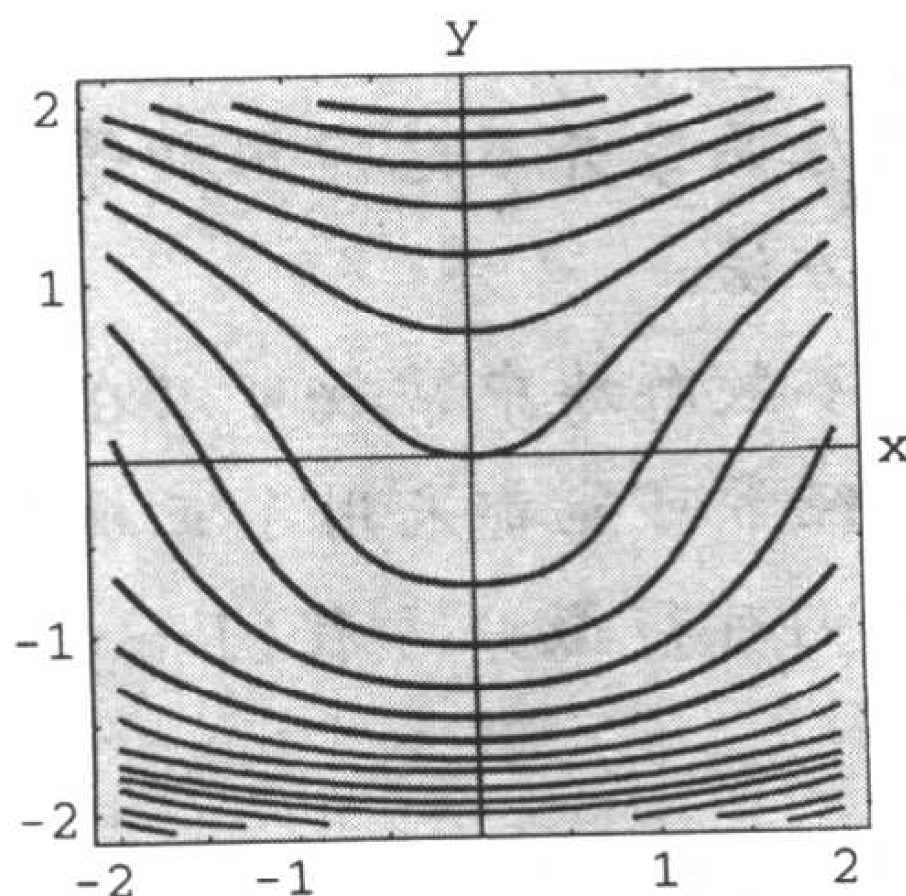


图 2.18 等量线 $G(x, y)=c$，其中 $G(x, y)=e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}+2\cos x$

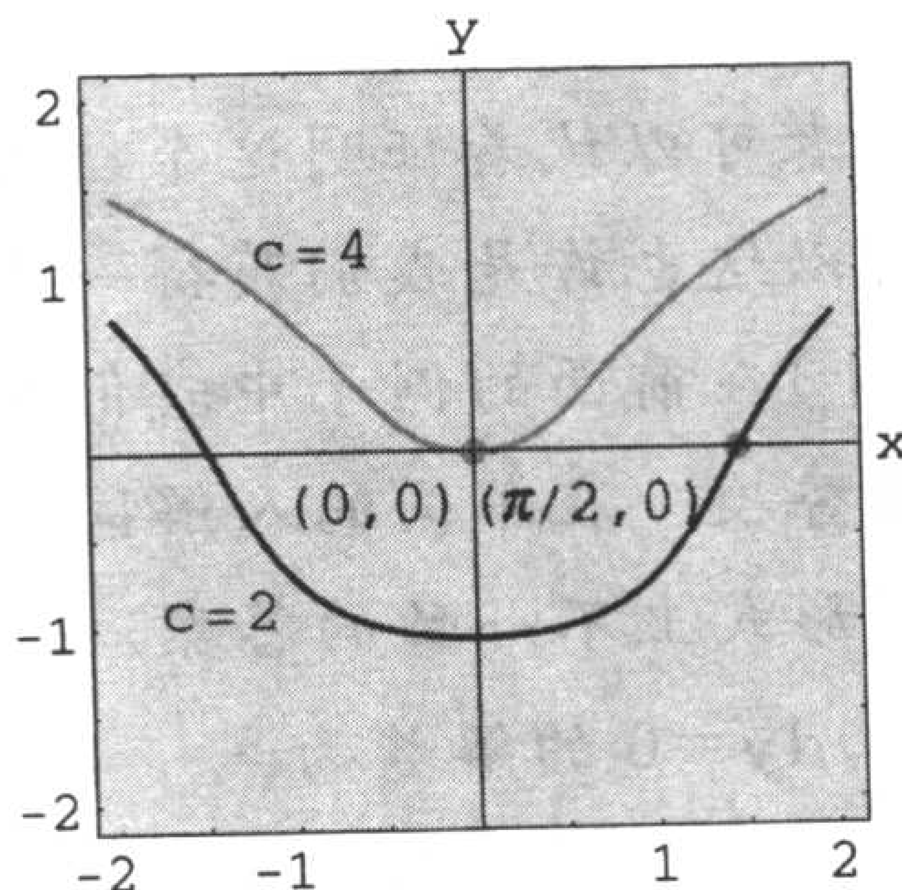


图 2.19 等量线 $c=2$ 和 $c=4$

⊖ 在第 2.6 节中我们将讨论其他几种基于数值解法的方法.

如果解一个一阶微分方程的初值问题，通过解出一个特殊的参数 c 而获得了一个特解，大多数学生(以及教师)都会感到满意. 然而一个初值问题的解可能并不是唯一的. 我们来看 1.2 节中例 3 的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^{1/2}, y(0) = 0 \tag{9}$$

其至少有两个解，$y=0$ 和 $y=\frac{1}{16}x^4$. 现在我们来解这个方程. 分离变量然后对 $y^{-1/2}\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x$ 积分得

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \text{或 } y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

若要 $x=0$ 时 $y=0$，则需 $c=0$. 此时 $y=\frac{1}{16}x^4$. 而在除以 $y^{1/2}$ 时平凡解 $y=0$ 丢失. 进一步，初值问题(9)有无穷多个解，因为分段定义的函数

$$y = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{(x^2-a^2)^2}{16}, x \geqslant a \end{cases}$$

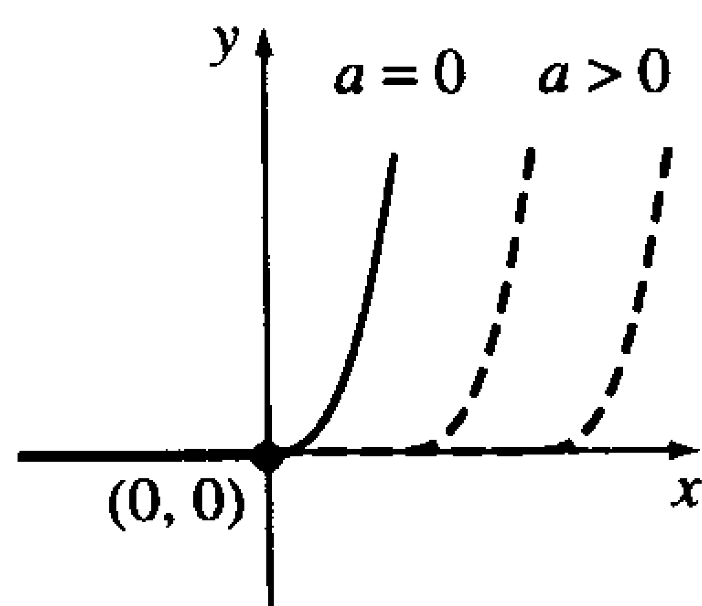


图 2.20

在参数 $a \geqslant 0$ 时既满足微分方程又满足初值条件. 如图 2.20 所示.

注 (ⅰ)如果 g 是一个在包含 x_0 的区间 I 上的连续函数，根据微积分学中的基本定理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t = g(x).$$

换言之，$\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$ 是函数 g 的一个原函数.

这个形式在有些情况下很方便. 例如，如果 g 是一个在包含 x_0 的区间 I 上的连续函数，则简单初值问题 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=g(x)$，$y(x_0)=y_0$ 在 I 上的一个解可以写成

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t.$$

读者可以试着证明这个结论. 因为一个连续函数的原函数并不总能用初等函数表示，所以这也许是我们获得一个初值问题显式解的最佳方法.

(ⅱ)在前面的例子中我们看到，一阶微分方程的单参数解族中常数可以在方便的时候被替换. 在不同的人解同一个方程的过程中，他们经常可能都采用了正确的方法而得到形式上不一致的答案. 例如，通过分离变量，我们可得微分方程 $(1+y^2)\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ 的解族为

$$\arctan x + \arctan y = c \text{ 或 } (x+y)/(1-xy) = c.$$

在进行后面几章的学习时，要注意，通过不同的常数替换或应用不同的代数及三角方法，可能得到在实质上等价(但表达式可能不同)的解族. 请参考练习 2.2 中的习题 27、28.

练习 2.2

在习题 1～22 中，用变量分离方法求解微分方程.

1. $\frac{dy}{dx}=\sin 5x$

2. $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2$

3. $dx+e^{3x}dy=0$

4. $dy-(y-1)^2dx=0$

5. $x\frac{dy}{dx}=4y$

6. $\frac{dy}{dx}+2xy=0$

7. $\frac{dy}{dx}=e^{3x+2y}$

8. $e^{x}y\frac{dy}{dx}=e^{-y}+e^{-2x-y}$

9. $y\ln x\frac{dx}{dy}=\left(\frac{y+1}{x}\right)^2$

10. $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

11. $\sec^2 x\,dy+\csc y\,dx=0$

12. $\sin 3x\,dx+2y\cos^3 3x\,dy=0$

13. $(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0$

14. $y\,dy=x(1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}dx$

15. $\frac{dS}{dr}=kS$

16. $\frac{dQ}{dt}=k(Q-70)$

17. $\frac{dP}{dt}=P-P^2$

18. $\frac{dN}{dt}+N=Nte^{t+2}$

19. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

20. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

21. $\frac{dy}{dx}=x\sqrt{1-y^2}$

22. $(e^x+e^{-x})\frac{dy}{dx}=y^2$

在习题 23～26 中，求解给定初值问题.

23. $\frac{dx}{dt}=4(x^2+1)$，$x(\pi/4)=1$

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x^2-1}$，$y(2)=2$

25. $x^2\frac{dy}{dx}=y-xy$，$y(-1)=-1$

26. $\frac{dy}{dt}+2y=1$，$y(0)=\frac{5}{2}$

在习题 27 和 28 中，求出给定初值问题的隐式解和显式解.

27. $\sqrt{1-y^2}dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$，$y(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

28. $(1+x^4)dy+x(1+4y^2)dx=0$，$y(1)=0$

29. (a)求解以下初值问题，方程即例 3 给出的微分方程，初值条件为 $y(0)=2$，$y(0)=-2$，及 $y(1/4)=1$.
(b)在例 4 的求解过程中，用 $\ln c_1$ 作为右边的积分常数，最后用 $\ln c$ 代替 $4\ln c_1$. 然后求解和(a)相同的初值问题.

30. 求出方程 $x\,dy/dx=y^2-y$ 过以下几点的解.
(a)(0，1)　(b)(0，0)　(c)(1/2，1/2)　(d)(2，1/4)

31. 分别求出习题 21、22 的一个奇异解.

32. 方程

$$2x\sin^2 y\,dx-(x^2+10)\cos y\,dy=0$$

的一个隐式解 $\ln(x^2+10)+\csc y=c$ 已经给出. 求出在这个解中被丢掉的微分方程的常数解.

微分方程的初值条件或方程自身的一点微小变动就会引起方程解的根本改变. 在习题 33～36 中，求出给定问题的显式解. 利用绘图工具绘出每个解的图像，并在点(0，1)附近对解曲线进行比较.

33. $\frac{dy}{dx}=(y-1)^2$，$y(0)=1$

34. $\frac{dy}{dx}=(y-1)^2$，$y(0)=1.01$

35. $\frac{dy}{dx}=(y-1)^2+0.01$，$y(0)=1$

36. $\frac{dy}{dx}=(y-1)^2-0.01$，$y(0)=1$

37. 每个自治一阶微分方程 $dy/dx=f(y)$ 都是可分离的．分别求出方程 $dy/dx=y-y^3$ 满足条件 $y_1(0)=2$，$y_2(0)=1/2$，$y_3(0)=-1/2$，及 $y_4(0)=-2$ 的显式解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$，$y_4(x)$．利用绘图工具绘出每个解的图像．将这些图像与练习 2.1 中习题 15 的结果做一比较．准确地给出每个解的定义区间．

38. (a)自治微分方程 $dy/dx=1/(y-3)$ 没有临界点．将点 3 在相线上标出并绘出方程的相图．计算 d^2y/dx^2 来判断解曲线在何处上凹，在何处下凹．(请参考练习 2.1 中的习题 35)．利用相图和凹性徒手绘出一些典型的解曲线．

(b)分别求出(a)中的微分方程满足初始条件 $y_1(0)=4$，$y_2(0)=2$，$y_3(1)=2$，及 $y_4(-1)=4$ 的显式解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$，及 $y_4(x)$．绘出这几个解的图像并与(a)进行比较．准确地给出每个解的定义区间．

39. (a)求出初值问题

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1}{2y},y(-2)=-1.$$

的一个显式解．



(b)利用绘图工具绘出(a)中解的图像，并由图像估计解的定义区间 I.

(c)用解析方法准确地给出定义区间 I.

40. 对习题 7 的微分方程加上初值条件 $y(0)=0$，然后重复习题 39 中(a)到(c)的步骤．

讨论题

41. (a)解释为什么例 2 中初值问题的显式解 $y=\phi_2(x)$ 的定义区间为开区间 $-5<x<5$.

(b)微分方程的任何解都可以穿越 x 轴吗？可以把 $x^2+y^2=1$ 作为初值问题 $dy/dx=-x/y$，$y(1)=0$ 的一个隐式解吗？

42. (a)如果 $a>0$，讨论初值问题 $dy/dx=x/y$ 的初值条件分别是 $y(a)=a$，$y(a)=-a$，$y(-a)=a$，及 $y(-a)=-a$ 时解的差异．

(b)初值问题 $dy/dx=x/y$，$y(0)=0$ 有解吗？

(c)求解 $dy/dx=x/y$，$y(1)=2$，并准确地给出解的定义区间 I.

43. 在习题 37 和 38 中我们看到所有自治一阶微分方程 $dy/dx=f(y)$ 都是可分离的．这一结论对于求解初值问题 $dy/dx=\sqrt{1+y^2}\sin^2 y$，$y(0)=1/2$ 有帮助吗？徒手绘出该问题的一条解曲线．

44. 不使用计算机，求解方程

$$(\sqrt{x}+x)\frac{dy}{dx}=(\sqrt{y}+y),$$

叙述求解思想．

45. 找出这样一个函数，它的平方加上它导数的平方等于 1.

46. (a)在 xy 平面上的正方形区域 $|x|<1$，$|y|<1$ 内，习题 27 中的微分方程等价于标准型

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.$$

但当 $|x|>1$，$|y|>1$ 时根号下的值亦为非负．写出所有 xy 平面内微分方程存在实函数解的区域．

(b)在区域 $|x|>1$，$|y|>1$ 内求出(a)中微分方程的一个隐式解和一个显式解，使得 $y(2)=2$.

计算机实验作业

47. (a)利用 CAS 和等量线的概念绘出微分方程 $dy/dx=-(8x+5)/(3y^2+1)$ 具有代表性解族的图像．在不同的矩形区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$ 中实验等量线的不同值．

(b)在不同的坐标系下给出对应于初值条件 $y(0)=-1$，$y(0)=2$，$y(-1)=4$，及 $y(-1)=-3$ 的非平凡解的图像.

48. (a)利用 CAS 和等量线的概念绘出微分方程 $dy/dx=x(1-x)/y(-2+y)$ 具有代表性的解族的图像. 在不同的矩形区域中试验等量线的不同值直至得到图 2.21 所示的结果.

(b)在不同的坐标系下给出对应于初值条件 $y(0)=3/2$ 的隐式解图像. 在图中用彩色铅笔描出满足初值条件的解 ϕ 的那段解曲线. 通过求根程序，近似求出解 ϕ 的最大定义区间. [提示：首先找到解曲线的切线垂直的点.]

(c)对初值条件 $y(0)=-2$ 重复(b)的过程.

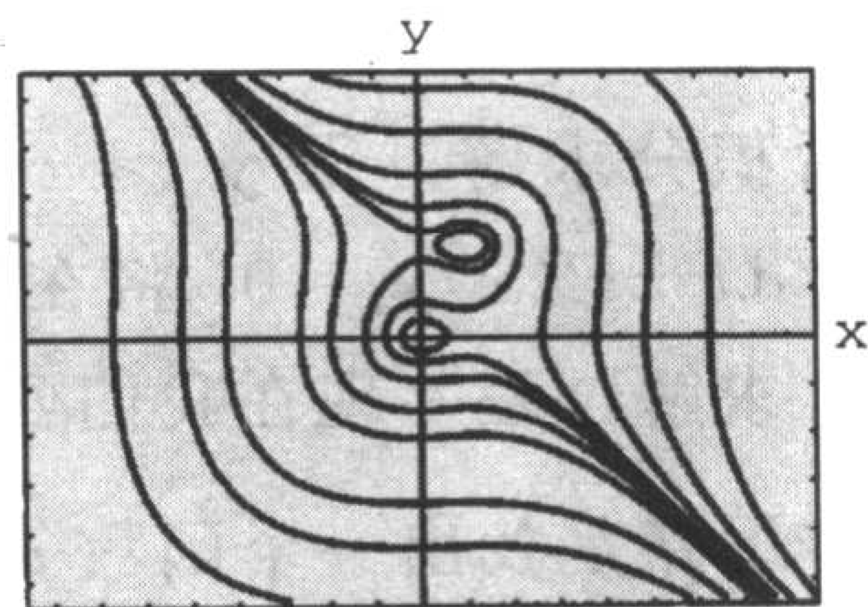


图 2.21

2.3 线性方程

本节我们继续讨论一阶微分方程的解法，接下来是线性方程. 线性方程是微分方程家族中非常"友好"的一员，因为给定的线性方程，无论是一阶的还是高阶的，我们总是有可能找到某种形式的解.

线性一阶微分方程 回顾 1.1 节，一个微分方程被称为线性的，如果所有独立变量及其导数都是一次的. 如果 1.1 节的(6)式中 $n=1$，则我们就得到了一个线性一阶微分方程.

定义 2.2 线性方程

具有如下形式的一阶微分方程

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{1}$$

称为线性方程(linear equation).

当 $g(x)=0$ 时，这个线性方程称为齐次的(homogeneous)，否则称为非齐次的(nonhomogeneous).

标准型 在(1)两边同时除以首项系数 $a_1(x)$，我们得到一个更有用的形式，即一个线性方程的标准型(standard form).

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x). \tag{2}$$

我们将在函数 P 和 f 都为连续的区间 I 上寻找(2)的一个解.

在接下来的讨论中我们将给出一个性质和一个求解过程，最后得到一个能代表所有(2)的解的公式. 但性质和求解过程比这个公式更重要，因为这两点在高阶线性方程中同样适用.

性质 微分方程(2)具有以下性质，它的解可表为两个解的和(sum)：$y=y_c+y_p$，其中 y_c 是相关齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{3}$$

的一个解，而 y_p 是非齐次方程(2)的一个特解. 我们来看下面的式子：

$$\frac{d}{dx}[y_c+y_p]+P(x)[y_c+y_p]=\underbrace{\left[\frac{dy_c}{dx}+P(x)y_c\right]}_{0}+\underbrace{\left[\frac{dy_p}{dx}+P(x)y_p\right]}_{f(x)}=f(x).$$

现在齐次方程(3)已被分离出来. 这样我们就可以把(3)改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}+P(x)\mathrm{d}x=0,$$

然后积分求解，得 $y_c=ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，为方便起见，我们记 $y_1=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，则有 $y_c=c\,y_1(x)$. $\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x+P(x)y_1=0$. 将在后面被用来求 y_p.

求解过程 现在我们要用常数变易法(variation of parameter)求出方程(2)的一个特解. 其基本思路是找出一个函数 u，使得 $y_p=u(x)y_1(x)=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是(2)的一个解. 换言之，我们假设用变量 u 替换了 $y_c=c\,y_1(x)$中的 c 后就可以得到 y_p. 把 $y_p=u\,y_1$代入(2)，得

$$\underbrace{u\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}+y_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}_{\text{乘积规则}}+P(x)uy_1=f(x)\text{ 或 }u\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}+P(x)y_1\right]}_{\text{零}}+y_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(x),$$

因此

$$y_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

分离变量并积分得

$$\mathrm{d}u=\frac{f(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x\text{ 和 }u=\int\frac{f(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x.$$

因为 $y_1(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，所以 $1/y_1(x)=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$. 故有

$$y_p=uy_1=\left(\int\frac{f(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x$$

以及

$$y=\underbrace{c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{y_c}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x}_{y_p}. \tag{4}$$

因此，如果方程(2)有一个解，其必为(4)的形式. 反之，容易证明(4)式是方程(2)的一个单参数解族.

无需记住(4)给出的公式，但应该记住特殊项

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{5}$$

因为它在求解(2)的过程中是一个等价项，而且更简单易用.

如果在(4)两边乘以(5)得

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}y=c+\int\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

则(6)是可导的，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}y\right]=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x), \tag{7}$$

然后我们可得

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x). \tag{8}$$

对最后的结果除以 $e^{\int P(x)dx}$ 得到(2).

求解方法 我们推荐的求解(2)的方法实际上是(6)～(8)的逆过程．也就是说，将(2)乘以(5)，我们得到(8)．(8)的左边被认为是 $e^{\int P(x)dx}$ 和 y 的乘积的导数，这样我们就能得到(7)．对(7)的两边积分可以得到(6)．因为我们可以通过在(2)两边乘以 $e^{\int P(x)dx}$ ，再积分求解方程，所以称这个函数为微分方程的*积分因子*[⊖](integrating factor)．为方便起见，我们仅概述了这些结果．再次强调，无需记住公式(4)，但每次必须按照如下步骤去做.

求解线性一阶方程

(i)把一个形如(1)的线性方程化为标准型(2).

(ii)在标准型中确定 $P(x)$ 并求出积分因子 $e^{\int P(x)dx}$.

(iii)在方程的标准型两边同时乘以积分因子，则得到的结果左边自动变成积分因子和 y 的导数：

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=e^{\int P(x)dx}f(x).$$

(iv)对等式两边进行积分.

例 1 **求解齐次线性微分方程**

解 $dy/dx-3y=0$.

解 这个线性方程可用分离变量法求解．换一个角度考虑，因为方程已经符合标准型(2)，我们看到 $P(x)=-3$ 且积分因子为 $e^{\int(-3)dx}=e^{-3x}$ ．在等式两边同时乘以这个因子，并可以看出

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx}-3e^{-3x}y=0 \text{ 与 } \frac{d}{dx}[e^{-3x}y]=0 \text{ 是相同的.}$$

对后面的等式两边积分得 $e^{-3x}y=c$．解出 y 得到显式解 $y=ce^{3x}$，$-\infty<x<+\infty$. ■

例 2 **求解非齐次线性微分方程**

解 $dy/dx-3y=6$.

解 这个微分方程的相关齐次方程已经在例 1 中解出．这个方程同样符合标准型(2)且积分因子仍为 $e^{\int(-3)dx}=e^{-3x}$ ．这次方程两边同乘以积分因子得到

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx}-3e^{-3x}y=6e^{-3x}\text{,它和}\frac{d}{dx}[e^{-3x}y]=6e^{-3x}\text{ 等价.}$$

对后面的等式两边积分得到 $e^{-3x}y=-2e^{-3x}+c$ 或 $y=-2+ce^{3x}$，$-\infty<x<+\infty$. ■

例 2 最终得到的解是两个解的和：$y=y_c+y_p$，其中 $y_c=ce^{3x}$ 是例 1 中齐次方程的解，$y_p=-2$ 是非齐次方程 $y'-3y=6$ 的一个特解．其实无需关心一个线性方程是齐次的还是非齐次的；只要按照上面给出的步骤去操作，就会得到一个非齐次方程的解 $y=y_c+y_p$．然而，在第 4 章求解线性高阶方程时，齐次微分方程和非齐次微分方程的解法会有很大不同.

当(1)中的 a_1、a_0 及 g 为常数时，微分方程是自治的．在例 2 中，可以由其标准型 $dy/dx=3(y+2)$ 证明 -2 是它的一个临界点，并且是不稳定的(排斥子)．所以随着 x 的增加，

⊖ 这个积分因子可由在第 2.4 节中对另一个过程的讨论得到.

始于均衡解 $y=-2$ 上下的解曲线都会远离这条水平线. 图 2.22 由绘图工具绘出，它反映了 $y=-2$ 及一些解曲线的图像.

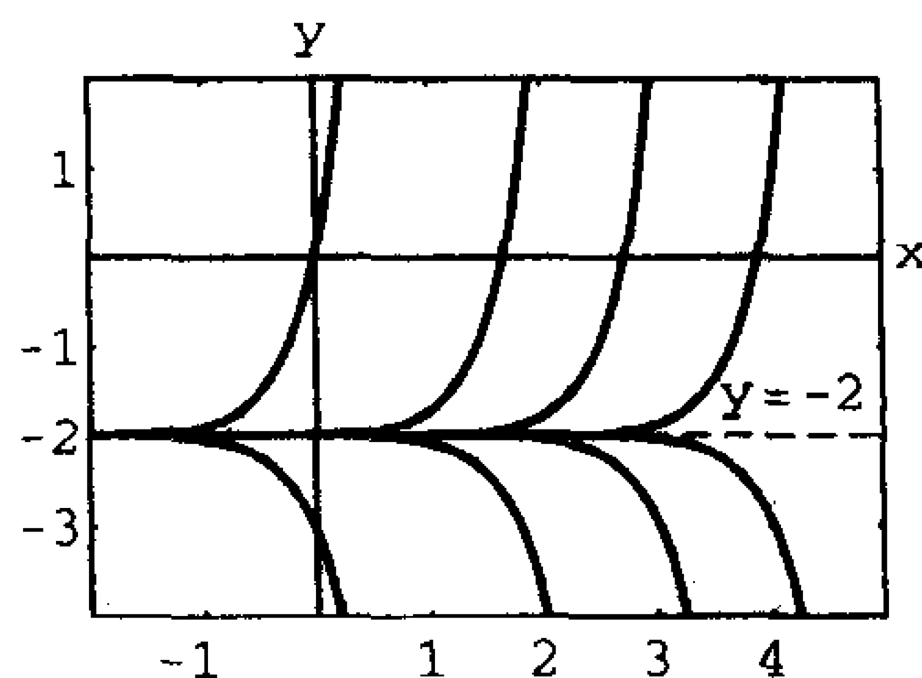


图 2.22 $y'-3y=6$ 的一些解

积分常数 读者可能注意到了我们在一般的讨论和例 1、例 2 中都忽略了 $e^{\int P(x)dx}$ 的指数中不定积分的积分常数. 考虑一下指数的性质以及在微分方程两边乘以积分因子这一步骤，就会明白为什么没必要写成 $\int P(x)dx+c$ 了. 请参考练习 2.3 中的习题 44.

通解 再次假设(2)中的 P 和 f 在区间 I 上连续. (4)的推导过程说明如果(2)在 I 上有一个解，则其必为(4)所给的形式. 反之，我们可以直接通过求微分证明(4)是微分方程(2)在 I 上的解. 换言之，(4)是方程(2)定义在 I 上的一个单参数解族，且每个由(2)定义在 I 上的解都是这个解族中的一员. 因此我们称(4)为微分方程在 I 上的通解(general solution). (请参考 1.1 节末的注释.)现把(2)写成标准型 $y'=F(x, y)$，则我们可以定义 $F(x, y)=-P(x)y+f(x)$ 和 $\partial F/\partial y=-P(x)$. 因为 P 和 f 在 I 上连续，所以 F 和 $\partial F/\partial y$ 也在 I 上连续. 由定理 1.1，我们有这样的结论：对于初值问题

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x), y(x_0)=y_0 \tag{9}$$

在包含 x_0 的区间 I_0 上存在且仅存在一个解. 对于 I 中的点 x_0，寻找(9)中的解其实就是在(4)中求一个合适的 c 值，也就是 I 中每一点 x_0 都对应一个不同的 c. 换言之，定理 1.1 中 I_0 的存在性和唯一性的区间对初值问题(9)来说是整个区间 I.

例 3 **通解**

求解 $x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$.

解 方程两边同除以 x，就得到标准型

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x. \tag{10}$$

通过这种形式我们定义 $P(x)=-4/x$ 及 $f(x)=x^5e^x$，并可知 P 和 f 在$(0, +\infty)$连续. 所以积分因子是

我们可以用 $\ln x$ 代替 $\ln|x|$，因为 $x>0$
↓
$$e^{-4\int dx/x}=e^{-4\ln x}=e^{\ln x^{-4}}=x^{-4}.$$

这里我们用到了基本定义 $b^{\log_b N}=N, N>0$. 同时我们在(10)两边乘以 x^{-4} 并把

$$x^{-4}\frac{dy}{dx}-4x^{-5}y=xe^x \text{ 写为 } \frac{d}{dx}[x^{-4}y]=xe^x.$$

对等式做分步积分可得方程在$(0, +\infty)$上的通解 $x^{-4}y=xe^x-e^x+c$ 或 $y=x^5e^x-x^4e^x+cx^4$. ■

除了首项系数是 1 的情况，把方程化为标准型(2)都要除以 $a_1(x)$. 使得 $a_1(x)=0$ 的点 x 称为方程的奇点(singular point). 奇点是个潜在的麻烦. 具体来说，如果在(2)中，$P(x)$

(由 $a_0(x)$除以 $a_1(x)$得到)在某点不连续，则这个不连续性可能会影响微分方程的解.

例 4 通解

求出方程$(x^2-9)\mathrm{d}y/\mathrm{d}x+xy=0$ 的通解.

解 我们把方程改写为标准型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{x}{x^2-9}y=0 \tag{11}$$

并且定义 $P(x)=x/(x^2-9)$. 虽然 P 在区间$(-\infty,-3)$，$(-3,3)$及$(3,+\infty)$上连续，但我们只在第一和第三个区间上求解方程. 在这些区间上的积分因子是

$$\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x/(x^2-9)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int 2x\mathrm{d}x/(x^2-9)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|}=\sqrt{x^2-9}.$$

在(11)两边乘以这个因子后，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sqrt{x^2-9}\,y]=0.$$

对最后这个等式两边积分得$\sqrt{x^2-9}\,y=c$. 所以在 $x>3$ 或 $x<-3$ 时，方程的通解为 $y=\frac{c}{\sqrt{x^2-9}}$. ■

注意到 $x=-3$ 和 $x=3$ 是例 4 方程中的奇点且其通解 $y=\frac{c}{\sqrt{x^2-9}}$ 中的每个函数在这两点都不连续. 另一方面，$x=0$ 是例 3 微分方程中的一个奇点，但其通解 $y=x^5\mathrm{e}^x-x^4\mathrm{e}^x+cx^4$ 中的每个函数显然都在 $x=0$ 处连续且定义域是$(-\infty,+\infty)$而非$(0,+\infty)$. 然而定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数族 $y=x^5\mathrm{e}^x-x^4\mathrm{e}^x+cx^4$ 并不能作为微分方程的通解，因为奇点 $x=0$ 在这里出现了一个问题，请参考练习 2.3 中的习题 39.

例 5 初值问题

求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x$，$y(0)=4$.

解 方程是标准型，且 $P(x)=1$ 和 $f(x)=x$ 都在$(-\infty,+\infty)$上连续. 积分因子为 $\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$，对

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^x y]=x\mathrm{e}^x$$

积分得 $\mathrm{e}^x y=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+c$. 从这个等式中解出 y 得到通解$y=x-1+c\mathrm{e}^{-x}$. 由初值条件我们可知，当 $x=0$ 时 $y=4$. 代入这些值，得到通解中的 $c=5$. 所以方程的解为

$$y=x-1+5\mathrm{e}^{-x},\ -\infty<x<+\infty \tag{12}$$

■

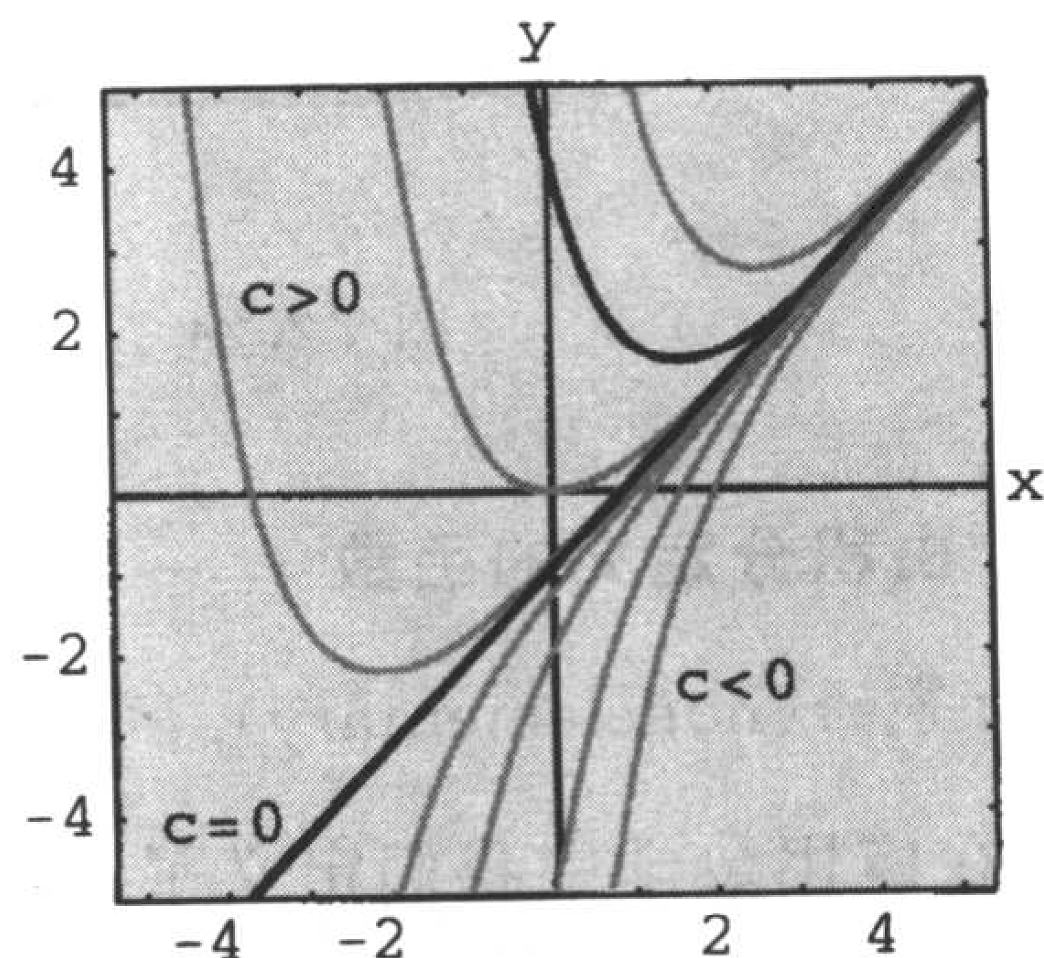


图 2.23 $y'+y=x$ 的一些解

图 2.23 由绘图工具得到，其中粗曲线是(12)的图像，其他图像代表了单参数解族 $y=x-1+c\mathrm{e}^{-x}$. 在通解中我们定义 $y_c=c\mathrm{e}^{-x}$及 $y_p=x-1$. 有趣的是在观察图 2.23 的过程中，我们发现随着 x 的增大，解族中的所有成员都在靠近特解

$y_p=x-1$. 这是因为随着 x 的增大，$y_c=ce^{-x}$对解的值的影响越来越小. 我们称 $y_c=ce^{-x}$为一个瞬时项(transient term)，因为随着 $x\to+\infty$，$y_c\to 0$. 当一个线性方程中并不是所有通解都具有这一性质时(请参考例 3)，瞬时项的记号往往在解实际应用问题中比较重要.

例 6　不连续函数 $f(x)$

求出一个连续解，满足

$$\frac{dy}{dx}+y=f(x),\text{其中 } f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

以及初值条件 $y(0)=0$.

解　由图 2.24 我们看出 f 是分段连续的，在 $x=1$ 处不连续. 因此，我们在 f 对应的两个区间内分别求解. 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 我们有

$$\frac{dy}{dx}+y=1,\text{或者等价地有}\frac{d}{dx}[e^x y]=e^x,$$

对后面的等式积分并解出 y 得到 $y=1+c_1e^{-x}$. 因为 $y(0)=0$，我们有 $c_1=-1$，从而 $y=1-e^{-x}$，$0\leqslant x\leqslant 1$. 当 $x>1$ 时，方程

$$\frac{dy}{dx}+y=0$$

有解 $y=c_2e^{-x}$. 所以我们可以记

$$y=\begin{cases}1-e^{-x}, 0\leqslant x\leqslant 1\\ c_2e^{-x}, x>1.\end{cases}$$

现在为使 y 成为一个连续函数，我们希望 $\lim\limits_{x\to 1^+}y(x)=y(1)$，这点等价于 $c_2e^{-1}=1-e^{-1}$或 $c_2=e-1$. 如图 2.25 所示，函数

$$y=\begin{cases}1-e^{-x}, 0\leqslant x\leqslant 1\\ (e-1)e^{-x}, \ x>1\end{cases}\tag{13}$$

在$[0, +\infty)$上连续. 请参考练习 2.3 中的习题 24.

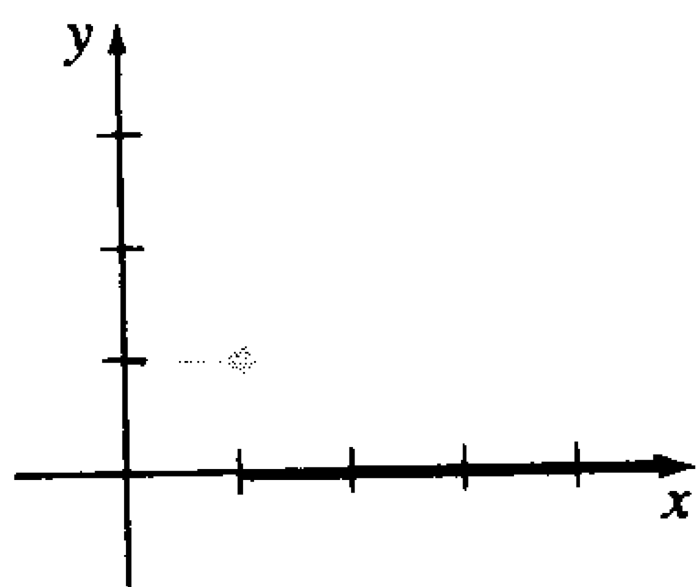


图 2.24

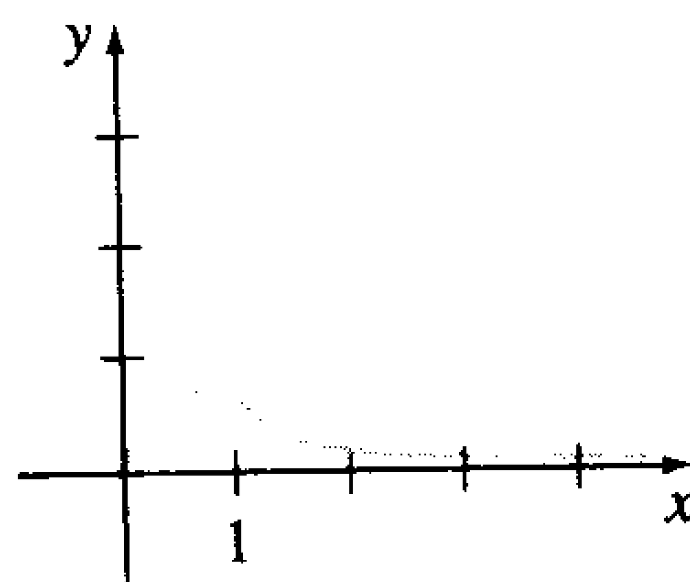


图 2.25

■

由积分定义的函数　一些简单函数没有初等形式的原函数,这种类型的函数积分被称为是非初等的(nonelementary). 例如,读者可能在微积分学中见过$\int e^{x^2}dx$ 和$\int \sin x^2 dx$ 就是非初等积分. 在应用数学中我们定义了一些重要的由非初等积分构成的函数. 以下两个函数

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \text{ 和 } \operatorname{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\tag{14}$$

分别为误差函数(error function)和余误差函数(complementary error function). 因为 $(2/\sqrt{\pi})\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=1$，所以由(14)可以看出，误差函数 $\mathrm{erf}(x)$和余误差函数 $\mathrm{erfc}(x)$满足关系 $\mathrm{erf}(x)+\mathrm{erfc}(x)=1$. 由于它们在概率统计领域有重要作用，其函数值常被列表. 注意 $\mathrm{erf}(0)=0$ 是一个明显的函数值. $\mathrm{erf}(x)$的函数值亦可由 CAS 求得. 在学习下一个例子之前，最好回顾一下 2.2 节末的注释(i).

例 7 **误差函数**

求解初值问题 $\frac{dy}{dx}-2xy=2$，$y(0)=1$.

解 因为方程已经是标准型了，并且可以看出积分因子是 e^{-x^2}，所以由

$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}]=2e^{-x^2}$ 我们可得 $y=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+ce^{x^2}$. (15)

将 $y(0)=1$ 代入后面的等式得 $c=1$. 所以该问题的解为

$$y=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}=e^{x^2}[1+\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(x)].$$

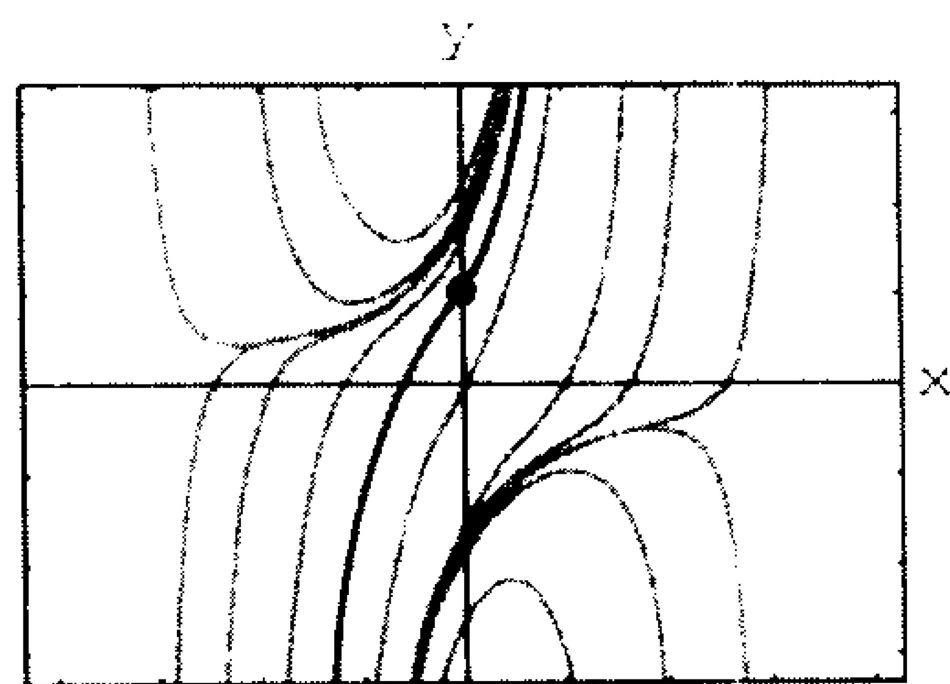


图 2.26 $y'-2xy=2$ 的一些解

利用计算机代数系统可得到图 2.26. ■

计算机应用 某些计算机代数系统可以求出一些类型的微分方程的显式解. 例如，输入以下命令求解方程 $y'+2y=x$：

DSolve[y'[x] + 2y[x] == x, y[x], x] (在 Mathematica 中)

及

dsolve(diff(y(x), x) + 2 * y = x, y(x)); (在 Maple 中)

得到输出结果

y[x] -> - (1/4) + x/2 + C[1]/E^2x

和

y(x) = 1/2x - 1/4 + exp(-2x) _C1

翻译成标准符号，我们得 $y=-1/4+\frac{1}{2}x+ce^{-2x}$.

注 (i)有时候一阶微分方程对于一个变量来说是非线性的，但对于其他变量来说是线性的. 例如微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y^2}$$

对变量 y 来说是非线性的. 但其倒数

$$\frac{dx}{dy}=x+y^2 \text{ 或 } \frac{dx}{dy}-x=y^2$$

对变量 x 来说是线性的. 可以证明利用积分因子 $e^{\int(-1)dy}=e^{-y}$ 及分部积分可得这个方程的一个隐式解：$x=-y^2-2y-2+ce^y$.

(ii)数学家在适当的时候从工程领域引入了一些特定的名词为己所用. 前面用

到的瞬时就是这种情况. 在后面的讨论中，偶尔会使用输入和输出. (2)中的 f 称为输入或施迫函数(input or driving function)；对于一个给定的输入，微分方程的解称为输出(output)或响应(response).

练习 2.3

在习题 1～24 中，求出给定微分方程的通解. 给出通解的最大定义区间. 判断通解中是否有瞬时项存在.

1. $\frac{dy}{dx}=5y$
2. $\frac{dy}{dx}+2y=0$
3. $\frac{dy}{dx}+y=e^{3x}$
4. $3\frac{dy}{dx}+12y=4$
5. $y'+3x^2y=x^2$
6. $y'+2xy=x^3$
7. $x^2y'+xy=1$
8. $y'=2y+x^2+5$
9. $x\frac{dy}{dx}-y=x^2\sin x$
10. $x\frac{dy}{dx}+2y=3$
11. $x\frac{dy}{dx}+4y=x^3-x$
12. $(1+x)\frac{dy}{dx}-xy=x+x^2$
13. $x^2y'+x(x+2)y=e^x$
14. $xy'+(1+x)y=e^{-x}\sin 2x$
15. $y\,dx-4(x+y^6)dy=0$
16. $y\,dx=(ye^y-2x)dy$
17. $\cos x\frac{dy}{dx}+(\sin x)y=1$
18. $\cos^2 x\sin x\,dy+(y\cos^3 x-1)dx=0$
19. $(x+1)\frac{dy}{dx}+(x+2)y=2xe^{-x}$
20. $(x+2)^2\frac{dy}{dx}=5-8y-4xy$
21. $\frac{dr}{d\theta}+r\sec\theta=\cos\theta$
22. $\frac{dP}{dt}+2tP=P+4t-2$
23. $x\frac{dy}{dx}+(3x+1)y=e^{-3x}$
24. $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2y=(x+1)^2$

在习题 25～30 中，求解给定的初值问题. 给出解的最大定义区间.

25. $xy'+y=e^x$，$y(1)=2$
26. $y\frac{dx}{dy}-x=2y^2$，$y(1)=5$
27. $L\frac{di}{dt}+Ri=E$，$i(0)=i_0$；L，R，E，及 i_0 为常数.
28. $\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$，$T(0)=T_0$；k，T_m，及 T_0 为常数.
29. $(x+1)\frac{dy}{dx}+y=\ln x$，$y(1)=10$
30. $y'+(\tan x)y=\cos^2 x$，$y(0)=-1$

在习题 31～34 中，求出满足给定微分方程和初值条件的连续解. 利用绘图工具绘出初值问题解曲线的图像.

31. $\frac{dy}{dx}+2y=f(x)$，$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & x>3\end{cases}$，$y(0)=0$
32. $\frac{dy}{dx}+y=f(x)$，$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -1, & x>1\end{cases}$，$y(0)=1$
33. $\frac{dy}{dx}+2xy=f(x)$，$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$，$y(0)=2$

34. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=f(x)$，$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ -x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$y(0)=0$

35. 求出初值问题 $y'+P(x)y=4x$，$y(0)=3$ 的一个连续解．其中

$$P(x)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2/x, & x>1.\end{cases}$$

利用绘图工具绘出初值问题解曲线的图像．

36. 利用函数 $\mathrm{erf}(x)$ 表示出初值问题 $y'-2xy=1$，$y(1)=1$ 的解．

37. 考虑初值问题 $y'+e^x y=f(x)$，$y(0)=1$．当 $f(x)=1$ 时，用一个非初等积分表示出 $x\geqslant 0$ 时初值问题的解．当 $f(x)=0$，$f(x)=e^x$ 时解是什么？

讨论题

38. 回顾例 2 后面第二段的内容．构造一个一阶微分方程，使得其所有的非常数解在 $x\to+\infty$ 时趋近于水平渐近线 $y=4$．

39. 回顾例 3，然后根据定理 1.1 讨论由方程 $xy'-4y=x^6e^x$ 和以下初值条件组成的初值问题解的存在性和唯一性．

(a) $y(0)=0$　　(b) $y(0)=y_0$，$y_0\neq 0$　　(c) $y(x_0)=y_0$，$x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$

40. 求出例 4 中的微分方程在区间 $(-3, 3)$ 上的通解．

41. 回顾例 5 然后讨论．构造一个线性一阶微分方程，使得其所有解当 $x\to+\infty$ 时趋近于直线 $y=3x-5$．

42. 回顾例 6 然后讨论，为什么说(13)中的函数是初值问题在 $[0, +\infty)$ 上的一个解这一结论是错误的？

43. (a)构造一个形如 $xy'+a_0(x)y=g(x)$ 的线性一阶微分方程，使得 $y_c=c/x^3$ 及 $y_p=x^3$．给出 $y=x^3+c/x^3$ 为微分方程通解的区间．

(b)分别给出一个初值条件 $y(x_0)=y_0$，使得(a)中建立的初值问题有通解 $y=x^3-1/x^3$，$y=x^3+2/x^3$．给出这些解的定义区间并绘出解曲线．是否存在这样一个初值问题，使得解可以定义在 $-\infty<x<+\infty$ 上？

(c)在(b)中构造的初值问题是唯一的吗？也就是说，对于 $y=x^3-1/x^3$，是不是存在不止一个的初值问题，使它是某些区间 I 上的解？

44. 在确定积分因子(5)时我们在求 $\int P(x)dx$ 值时并没有用到积分常数．解释为什么使用 $\int P(x)dx+c$ 对(2)的求解没有影响．

45. 设 $P(x)$ 在某区间 I 上连续且 a 是 I 上一点．那么初值问题 $y'+P(x)y=0$，$y(a)=0$ 的解是什么？

46. 在研究元素放射系列的问题时，我们会遇到下面这个特殊形式的微分方程组：

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt}=\lambda_1 x-\lambda_2 y,$$

其中的 λ_1 和 λ_2 为常数．讨论如何求解方程使得 $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$．

47. 在本题中先设 α 和 β 为常数；$P(x)$，$f(x)$，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在区间 I 上连续；且 x_0 为 I 上任意一点．

(a)设 y_1 是初值问题 $y'+P(x)y=0$，$y(x_0)=\alpha$ 的解，且 y_2 是 $y'+P(x)y=f(x)$，$y(x_0)=0$ 的解．求 $y'+P(x)y=f(x)$，$y(x_0)=\alpha$ 的一个解．证明所得结论．

(b)设 y_1 是 $y'+P(x)y=f_1(x)$，$y(x_0)=\alpha$ 的解，且 y_2 是 $y'+P(x)y=f_2(x)$，$y(x_0)=\beta$ 的解．那么如果 y 是 $y'+P(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解，$y(x_0)$ 的值是多少？证明所得结论．如果 y 是 $y'+P(x)y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ 的解，这里的 c_1 和 c_2 是任意给定的常数，那么 $y(x_0)$ 的值是多少？证明

所得结论.

计算机实验作业

48. (a)利用 erfc(x)求初值问题 $y'-2xy=-1$，$y(0)=\sqrt{\pi}/2$ 的解.

(b)查表或用计算机计算 $y(2)$的值. 利用 CAS 绘出初值问题在$(-\infty, +\infty)$上的解曲线.

49. (a)定义正弦积分函数(sine integral function)为 $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$，其中被积函数在 $t=0$ 时被定义为 1. 利用 Si(x)求初值问题 $x^3y'+2x^2y=10\sin x$，$y(1)=0$ 的解 $y(x)$.

(b)利用 CAS 绘出当 $x>0$ 时初值问题解曲线的图像.

(c)利用 CAS 求出 $x>0$ 时解 $y(x)$的最大绝对值.

50. (a)定义菲涅耳正弦积分(Fresnel sine integral)为 $\mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$，利用 S($x$)求初值问题 $y'-(\sin x^2)y=0$，$y(0)=5$ 的解 $y(x)$.

(b)利用 CAS 绘出初值问题在$(-\infty, +\infty)$上解曲线的图像.

(c)已知当 $x\to+\infty$时 $\mathrm{S}(x)\to1/2$，当 $x\to-\infty$时 $\mathrm{S}(x)\to-1/2$. 当 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$时解 $y(x)$分别趋近于何值?

(d)利用 CAS 求出解 $y(x)$的最大绝对值和最小绝对值.

2.4 恰当方程

虽然简单方程 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$ 是可分离的，但当我们发现方程的左边等价于 x 乘以 y 的微分时，即

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)=0$$

时，我们可以用其他解法来求解方程. 对 $\mathrm{d}(xy)=0$ 两边积分，我们立即得到方程的隐式解 $xy=c$. 微分方程 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$ 是我们即将学习的恰当一阶方程的一个例子.

含有两个变量的函数微分 如果一个二元函数 $z=f(x, y)$的两个一阶偏导数在 xy 平面的某区域 R 内连续，则其微分(也称全微分)为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{1}$$

如果 $f(x, y)=c$，则由(1)得

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0. \tag{2}$$

也就是说，对于一个单参数曲线族 $f(x, y)=c$，我们可以通过计算其微分构造一个一阶微分方程. 例如，如果 $x^2-5xy+y^3=c$，则由(2)得

$$(2x-5y)\mathrm{d}x+(-5x+3y^2)\mathrm{d}y=0 \tag{3}$$

出于我们的目的，问题的还原是更重要的；即对于诸如(3)的一阶微分方程，我们是否可以认为其等价于微分 $\mathrm{d}(x^2-5xy+y^3)=0$?

定义 2.3 恰当方程

相应于某函数 $f(x, y)$在 xy 平面的区域 R 上的微分表达式 $M(x, y)\mathrm{d}x+N(x, y)\mathrm{d}y$ 称为恰当微分(exact differential). 具有以下形式的微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

称为恰当方程(exact equation)，如果方程左边是一个恰当微分的话.

例如，$x^2y^3\mathrm{d}x+x^3y^2\mathrm{d}y=0$ 是一个恰当方程，因为方程左边是一个恰当微分：

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right)=x^2y^3\mathrm{d}x+x^3y^2\mathrm{d}y.$$

注意如果 $M(x,\ y)=x^2y^3$ 且 $N(x,\ y)=x^3y^2$，则 $\partial M/\partial y=3x^2y^2=\partial N/\partial x$. 定理 2.1 说明了这些偏微分的相等并非巧合.

定理 2.1　恰当微分的判定

设 $M(x,\ y)$ 和 $N(x,\ y)$ 在由 $a<x<b$，$c<y<d$ 定义的矩形区域 R 内连续并有连续一阶偏导数，则 $M(x,\ y)\mathrm{d}x+N(x,\ y)\mathrm{d}y$ 是一个恰当微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

必要性证明　为简单起见，我们假设对所有的 $(x,\ y)$，$M(x,\ y)$ 和 $N(x,\ y)$ 都有连续的一阶偏导数. 如果表达式 $M(x,\ y)\mathrm{d}x+N(x,\ y)\mathrm{d}y$ 是恰当的，则存在函数 f 对 R 上的所有 x 满足

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

所以

$$M(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial x},\ N(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial y},$$

以及

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

最后的等式是由一阶偏导数 $M(x,\ y)$ 和 $N(x,\ y)$ 的连续性得到的. ■

定理 2.1 的充分性即要证明存在一个函数 f，使得当(4)成立时满足 $\partial f/\partial x=M(x,\ y)$ 及 $\partial f/\partial y=N(x,\ y)$. 函数 f 的构造过程其实就是恰当方程的求解过程.

求解方法　给定一个微分形式的方程 $M(x,\ y)\mathrm{d}x+N(x,\ y)\mathrm{d}y=0$，判断(4)是否成立. 如果成立，则存在一个函数 f 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y).$$

我们可以通过对 $M(x,\ y)$ 关于 x 求积分得到 f，同时把 y 看作常数：

$$f(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+g(y), \tag{5}$$

这里任意函数 $g(y)$ 是积分的“常数”. 现对(5)求关于 y 的导数并假设 $\partial f/\partial y=N(x,\ y)$：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x+g'(y)=N(x,y).$$

我们得到

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

最后，对(6)求关于 y 的积分，然后把结果代入(5)，得方程的隐式解为 $f(x,\ y)=c$.

我们需要注意以下事项. 第一，(6) 中的表达式 $N(x,y)-(\partial/\partial y)\int M(x,y)\mathrm{d}x$ 是与 x 无关的，因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0.$$

第二，我们也可以从假设 $\partial f/\partial y=N(x,\ y)$ 开始前述的过程. 在对 N 求关于 y 的积分后再对结果求关于 x 的微分，我们分别得到类似于(5)和(6)的

$$f(x,y)=\int N(x,y)\mathrm{d}y+h(x)\text{ 及 }h'(x)=M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\mathrm{d}y.$$

这些公式不一定要记住.

例 1　**求解恰当微分方程**

解方程 $2xy\mathrm{d}x+(x^2-1)\mathrm{d}y=0$.

解　对于 $M(x,\ y)=2xy$ 和 $N(x,\ y)=x^2-1$，我们有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

所以方程是恰当的，根据定理 2.1 存在一个函数 $f(x,\ y)$ 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\text{ 和 }\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1.$$

对第一个等式积分后我们得到

$$f(x,\ y)=x^2y+g(y).$$

对等式求关于 y 的偏微分，然后令其结果为 $N(x,\ y)$，可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+g'(y)=x^2-1.\qquad\leftarrow N(x,y)$$

由此可得 $g'(y)=-1$ 和 $g(y)=-y$. 所以 $f(x,\ y)=x^2y-y$，且方程的隐式解为 $x^2y-y=c$. 很容易得到显式解 $y=c/(1-x^2)$，且其定义在任意不包含 $x=1$ 和 $x=-1$ 的区间上. ■

注　例 1 中微分方程的解并不是 $f(x,\ y)=x^2-y$，而是 $f(x,\ y)=c$. 如果在对 $g'(y)$ 的积分中使用常数，则我们可以把解记为 $f(x,\ y)=0$. 另外还要注意，这个方程也可以用变量分离法求解.

例 2　**求解一个恰当微分方程**

解方程 $(\mathrm{e}^{2y}-y\cos xy)\mathrm{d}x+(2x\mathrm{e}^{2y}-x\cos xy+2y)\mathrm{d}y=0$.

解　方程是恰当的，因为

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2\mathrm{e}^{2y}+xy\sin xy-\cos xy=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

所以存在一个函数 $f(x,\ y)$ 使得

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\text{ 及 }N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

现在做一些变化，我们由假设 $\partial f/\partial y=N(x,\ y)$ 开始求解，即

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x\mathrm{e}^{2y}-x\cos xy+2y,$$

$$f(x,y)=2x\int e^{2y}dy-x\int \cos xy\,dy+2\int y\,dy.$$

记住，x 之所以可以在对 y 的积分中被提到积分符号$\int$的前面，是因为 x 在这里被当作一个常数．然后有

$$f(x,y)=xe^{2y}-\sin xy+y^2+h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2y}-y\cos xy+h'(x)=e^{2y}-y\cos xy,\leftarrow M(x,y)$$

所以有 $h'(x)=0$ 或 $h(x)=c$．故方程的解族为

$$xe^{2y}-\sin xy+y^2+c=0.$$

■

例 3 **初值问题**

求解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy^2-\cos x\sin x}{y(1-x^2)}$，$y(0)=2$．

解 把微分方程改写为

$$(\cos x\sin x-xy^2)dx+y(1-x^2)dy=0.$$

方程是恰当的，因为

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2xy=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

现在

$$\frac{\partial f}{\partial y}=y(1-x^2),$$

$$f(x,y)=\frac{y^2}{2}(1-x^2)+h(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-xy^2+h'(x)=\cos x\sin x-xy^2.$$

由最后一个等式得 $h'(x)=\cos x\ \sin x$．对其积分后得

$$h(x)=-\int(\cos x)(-\sin x\,dx)=-\frac{1}{2}\cos^2x.$$

所以

$$\frac{y^2}{2}(1-x^2)-\frac{1}{2}\cos^2x=c_1\text{ 或 }y^2(1-x^2)-\cos^2x=c,\tag{7}$$

其中 c 代替了 $2c_1$．当 $x=0$ 时初值条件 $y=2$ 使得 $4(1)-\cos^2(0)=c$，所以 $c=3$．得到该问题的一个隐式解为 $y^2(1-x^2)-\cos^2x=3$．

初值问题的解曲线见图 2.27，它代表这个曲线族的一部分曲线．由(7)确定的单参数解族的图像可以通过几种方法获得：一种是利用软件绘出等量线的图像(请参考上一节的讨论)，另一种是给定不同的 c 值，利用绘图工具绘出显式解 $y^2=(c+\cos x)/(1-x^2)$的图像． ■

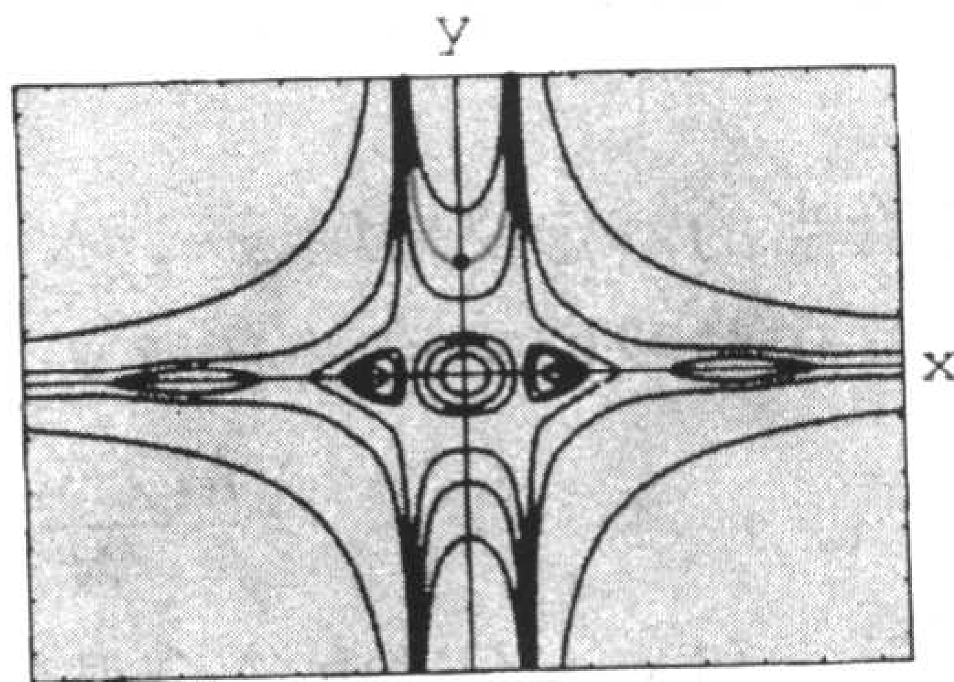


图 2.27 $y^2(1-x^2)-\cos^2x=c$ 解族的图像

积分因子 我们回顾上一节的内容，对于线性方程 $y'+P(x)y=f(x)$，在给方程乘上一个积分因子后方程左边变成一个微分形式．对于一个非恰当微分方程 $M(x,\ y)dx+$

$N(x, y)\mathrm{d}y=0$，我们有同样的基本思想，即有时我们能找到一个积分因子(integrating factor) $\mu(x, y)$，使得方程两边乘以积分因子后变为

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0, \tag{8}$$

使它成为一个恰当微分. 为了找到这样一个 μ，我们回到恰当性的判别式(4). 方程(8)是恰当的当且仅当$(\mu M)_y=(\mu N)_x$，这里脚标表示偏微分. 根据对乘积微分的法则，前面的等式等同于 $\mu M_y+\mu_y M=\mu N_x+\mu_x N$ 或

$$\mu_x N-\mu_y M=(M_y-N_x)\mu. \tag{9}$$

虽然 M，N，M_y及 N_x是关于 x 和 y 的已知函数，但困难在于若想从(9)中得到未知的 $\mu(x, y)$，就必须解一个偏微分方程. 因为我们现在并不会解偏微分方程，所以做一个简单的假设，设 μ 为一个一元函数. 例如，μ 是只依赖于变量 x 的函数. 在这种情况下，$\mu_x=\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$ 且(9)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{M_y-N_x}{N}\mu. \tag{10}$$

如果商式$(M_y-N_x)/N$ 是依赖于 x 和 y 的，则我们仍然无法求解. 然而，如果经过代数化简后我们得到商式$(M_y-N_x)/N$ 是仅依赖于变量 x 的，则(10)就是一个一阶常微分方程. 因为(10)是可分离的且是线性的，我们最终可求得 μ. 由 2.2 节或 2.3 节我们得到 $\mu(x)=e^{\int((M_y-N_x)/N)\mathrm{d}x}$. 类似地，如果 μ 是仅依赖于变量 y 的，则可由(9)得

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=\frac{N_x-M_y}{M}\mu. \tag{11}$$

在这种情况下，如果$(N_x-M_y)/M$ 尽是 y 的函数，则我们可以通过求解(11)得到 μ.

对微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{12}$$

我们做一下总结：

- 如果$(M_y-N_x)/N$ 仅是关于 x 的函数，则方程(12)的积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}\mathrm{d}x}. \tag{13}$$

- 如果$(N_x-M_y)/M$ 仅是关于 y 的函数，则方程(12)的积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M}\mathrm{d}y}. \tag{14}$$

例4 非恰当微分方程转化为恰当微分方程

非线性一阶微分方程

$$xy\,\mathrm{d}x+(2x^2+3y^2-20)\mathrm{d}y=0$$

不是恰当的. 定义 $M=xy$，$N=2x^2+3y^2-20$，我们可得偏微分 $M_y=x$ 和 $N_x=4x$. 由(13)得到的商式对我们来说没有意义，因为

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{x-4x}{2x^2+3y^2-20}=\frac{-3x}{2x^2+3y^2-20}$$

依赖于 x 和 y. 不过由(14)得到的商式只与 y 有关：

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{4x-x}{xy}=\frac{3x}{xy}=\frac{3}{y}.$$

所以积分因子为 $e^{\int 3dy/y}=e^{3\ln y}=e^{\ln y^3}=y^3$．在给定方程两边同乘以 $\mu(y)=y^3$ 得到

$$xy^4\,dx+(2x^2y^3+3y^5-20y^3)\,dy=0.$$

可以证明最后一个方程式是恰当的，然后利用这一节所述的解法，得到方程的一个解族为

$$\frac{1}{2}x^2y^4+\frac{3}{7}y^3-5y^4=c.$$

■

注 （ⅰ）当我们检验一个方程是否是恰当时，需要确定其是否满足形式 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 有时候一个微分方程可以记作 $G(x,y)dx=H(x,y)dy$. 在这种情况下，我们先把方程改写成 $G(x,y)dx-H(x,y)dy=0$，然后定义 $M(x,y)=G(x,y)$ 及 $N(x,y)=-H(x,y)$，再应用(4).

（ⅱ）在有些微分方程的教材中，把对恰当方程的研究放在对线性方程的研究之前. 本节所讨论的求积分因子的方法可应用于求方程 $y'+P(x)y=f(x)$ 的积分因子. 通过把该方程改写为微分形式 $(P(x)y-f(x))dx+dy=0$，则可得到

$$\frac{M_y-N_x}{N}=P(x).$$

由(13)我们可得到在2.3节中用到的积分因子 $e^{\int P(x)dx}$.

练习 2.4

在习题1～20中，判定给定方程是否是恰当方程. 如果是，解之.

1. $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$
2. $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$
3. $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$
4. $(\sin y-y\sin x)dx+(\cos x+x\cos y-y)dy=0$
5. $(2xy^2-3)dx+(2x^2y+4)dy=0$
6. $\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\sin 3x=0$
7. $(x^2-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$
8. $\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx=(1-\ln x)dy$
9. $(x-y^3+y^2\sin x)dx=(3xy^2+2y\cos x)dy$
10. $(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$
11. $(y\ln y-e^{-xy})dx+\left(\frac{1}{y}+x\ln y\right)dy=0$
12. $(3x^2y+e^y)dx+(x^3+xe^y-2y)dy=0$
13. $x\frac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$
14. $\left(1-\frac{3}{y}+x\right)\frac{dy}{dx}+y=\frac{3}{x}-1$
15. $\left(x^2y^3-\frac{1}{1+9x^2}\right)\frac{dx}{dy}+x^3y^2=0$
16. $(5y-2x)y'-2y=0$
17. $(\tan x-\sin x\sin y)dx+\cos x\cos y\,dy=0$
18. $(2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2})dx=(x-\sin^2x-4xye^{xy^2})dy$
19. $(4t^3y-15t^2-y)dt+(t^4+3y^2-t)dy=0$
20. $\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{y}{t^2+y^2}\right)dt+\left(ye^y+\frac{t}{t^2+y^2}\right)dy=0$

在习题21～26中，求解给定的初值问题.

21. $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0$，$y(1)=1$
22. $(e^x+y)dx+(2+x+ye^y)dy=0$，$y(0)=1$
23. $(4y+2t-5)dt+(6y+4t-1)dy=0$，$y(-1)=2$
24. $\left(\frac{3y^2-t^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{t}{2y^4}=0$，$y(1)=1$
25. $(y^2\cos x-3x^2y-2x)dx+(2y\sin x-x^3+\ln y)dy=0$，$y(0)=e$

26. $\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y(y+\sin x)$，$y(0)=1$

在习题 27 和 28 中，求出 k 的值使给定的方程为恰当方程.

27. $(y^3+kxy^4-2x)dx+(3xy^2+20x^2y^3)dy=0$

28. $(6xy^3+\cos y)dx+(2kx^2y^2-x\sin y)dy=0$

在习题 29 和 30 中，证明给定的方程不是恰当的. 在方程两边乘以已知的积分因子后，证明新的方程是恰当的，并解之.

29. $(-xy\sin x+2y\cos x)dx+2x\cos x dy=0$；$\mu(x, y)=xy$

30. $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$；$\mu(x, y)=(x+y)^{-2}$

在习题 31～36 中，通过例 4 的求解过程求出一个合适的积分因子，然后求解给定的微分方程.

31. $(2y^2+3x)dx+2xydy=0$

32. $y(x+y+1)dx+(x+2y)dy=0$

33. $6xydx+(4y+9x^2)dy=0$

34. $\cos x dx+\left(1+\frac{2}{y}\right)\sin x dy=0$

35. $(10-6y+e^{-3x})dx-2dy=0$

36. $(y^2+xy^3)dx+(5y^2-xy+y^3\sin y)dy=0$

在习题 37 和 38 中，通过例 4 的求解过程求出一个合适的积分因子，然后求解给定的初值问题.

37. $xdx+(x^2y+4y)dy=0$，$y(4)=0$

38. $(x^2+y^2-5)dx=(y+xy)dy$，$y(0)=1$

39. (a)证明方程

$$(4xy+3x^2)dx+(2y+2x^2)dy=0$$

的一个单参数解族为 $x^3+2x^2y+y^2=c$.

(b)证明由初值条件 $y(0)=-2$ 及 $y(1)=1$ 可以得到相同的隐式解.



(c)分别由初值条件 $y_1(0)=-2$ 和 $y_2(1)=1$ 求出(a)中方程的显式解 $y_1(x)$和 $y_2(x)$. 用绘图工具绘出 $y_1(x)$和 $y_2(x)$的图像.

讨论题

40. 考虑在习题 29～38 中积分因子的概念. 方程 $Mdx+Ndy=0$ 和 $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 的解必须是等价的吗？即一个方程的解也是另外一个方程的解吗？

41. 回顾例 3，然后讨论为什么我们说初值问题的显式解是定义在区间$(-1, 1)$上的(请见图 2.27 中带颜色的曲线).

42. 讨论如何求出 $M(x, y)$和 $N(x, y)$使得每个方程都是恰当的. 给出求解过程.

(a)$M(x, y)dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0$

(b)$\left(x^{-1/2}y^{1/2}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx+N(x, y)dy=0$

43. 有时候一些微分方程可以通过一些技巧来求解. 这里有一些相关的练习：虽然微分方程 $(x-\sqrt{x^2+y^2})dx+ydy=0$ 不是恰当的，说明如何通过将方程变形为 $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx$ 及 $\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=xdx+ydy$ 求解.

44. 判断对错：所有可分离的一阶方程 $dy/dx=g(x)h(y)$是恰当的.

2.5 换元法

求解一个微分方程时，首先要认清到它是哪一类特定的方程(例如可分离的)，然后按照针对这类方程的具体数学方法得到一个等价于原方程的微分方程. 这种求解过程常常是通过一个

代换(substitution)把给定方程转化为另一个微分方程. 例如，我们想通过代换 $y=g(x, u)$ 来转化一阶方程 $dy/dx=f(x, y)$，这里 u 是变量 x 的函数. 如果 g 的一阶偏导数存在，则根据链式法则(Chain Rule)，得

$$\frac{dy}{dx}=g_x(x,u)+g_u(x,u)\frac{du}{dx}.$$

如果我们用 $g(x, u)$ 替换导数 dy/dx 和 $f(x, y)$ 中的 y，则微分方程 $dy/dx=f(x, y)$ 可变为 $g_x(x, u)+g_u(x, u)du/dx=f(x, g(x, u))$，解出 du/dx，其形如 $du/dx=F(x, u)$. 如果我们能在后面这个方程中求出解 $u=\phi(x)$，则原微分方程的解即为 $y=g(x,\phi(x))$.

齐次方程 如果一个函数 f 对某实数 α 具有性质 $f(tx, ty)=t^\alpha f(x, y)$，则 f 被称为是一个 α 次齐次函数(homogeneous function). 例如，$f(x, y)=x^3+y^3$ 是一个 3 次齐次函数，因为

$$f(tx,ty)=(tx)^3+(ty)^3=t^3(x^3+y^3)=t^3f(x,y),$$

而 $f(x, y)=x^3+y^3+1$ 则是非齐次的. 形如

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

的一阶微分方程称为是齐次的(homogeneous)[1]，如果系数 M 和 N 是具有相同次数的齐次函数，也就是说，(1)是齐次的，如果有

$$M(tx,ty)=t^\alpha M(x,y) \text{ 及 } N(tx,ty)=t^\alpha N(x,y).$$

另外，如果 M 和 N 为 α 次的齐次函数，我们可以记

$$M(x,y)=x^\alpha M(1,u) \text{ 及 } N(x,y)=x^\alpha N(1,u), \text{其中 } u=y/x, \tag{2}$$

和

$$M(x,y)=y^\alpha M(v,1) \text{ 及 } N(x,y)=y^\alpha N(v,1), \text{其中 } v=x/y. \tag{3}$$

请参考练习 2.5 中的习题 31. 性质(2)和(3)说明，这样的代换可以用来求解一个齐次微分方程. 具体地说，代换 $y=ux$ 式或 $x=vy$，其中 u 和 v 是新的变量，使一个齐次方程简化为一个可分离的一阶微分方程. 为了说明这一点，由(2)我们可将一个齐次方程 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 写成

$$x^\alpha M(1,u)dx+x^\alpha N(1,u)dy=0 \text{ 或 } M(1,u)dx+N(1,u)dy=0,$$

这里 $u=y/x$ 或 $y=ux$. 将 $dy=udx+xdu$ 代入后面的方程，合并同类项，我们得到一个关于变量 u 和 x 的可分离的微分方程：

$$M(1,u)dx+N(1,u)[udx+xdu]=0$$

$$[M(1,u)+uN(1,u)]dx+xN(1,u)du=0$$

或

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)}=0.$$

在这里我们提出与前面几节中同样的建议：不要去记忆任何东西(尤其是最后一个公式)，只需要按照步骤去做. 类似地，由(3)以及 $x=vy$，$dx=vdy+ydv$ 同样可以得到一个可分离的方程.

[1] 这里的"齐次"与第 2.3 节中提及的是不同的意思. 那里是指当 $g(x)=0$ 时，线性一阶方程 $a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ 是齐次的.

例 1　求解齐次微分方程

解方程$(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y=0$.

解　检验$M(x, y)=x^2+y^2$和$N(x, y)=x^2-xy$，可以发现这些系数是二次齐次函数. 如果设$y=ux$，则$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$，这样经过代换后原方程变为

$$(x^2+u^2x^2)\mathrm{d}x+(x^2-ux^2)[u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u]=0$$

$$x^2(1+u)\mathrm{d}x+x^3(1-u)\mathrm{d}u=0$$

$$\frac{1-u}{1+u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0$$

$$\left[-1+\frac{2}{1+u}\right]\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0. \quad \leftarrow \text{长除法}$$

对最后一个等式积分得

$$-u+2\ln|1+u|+\ln|x|=\ln|c|$$

$$-\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|x|=\ln|c|. \quad \leftarrow \text{把 } u=y/x \text{ 代入}$$

利用对数的性质，我们可以把前面得到的解改写为

$$\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|=\frac{y}{x} \text{ 或} (x+y)^2=cx\mathrm{e}^{y/x}.$$

■

虽然前面提到的两个代换都可以应用于每个齐次微分方程，但在实践中当函数$M(x, y)$比$N(x, y)$简单时，我们使用$x=vy$. 在使用代换后，我们可能在积分时遇到困难或者无法求得封闭形式的解，这时使用另一个代换可能会使问题变得简单一些.

伯努利方程　微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=f(x)y^n, \tag{4}$$

当n为任意实数时，称之为伯努利方程(Bernoulli's equation). 注意当$n=0$及$n=1$时，方程(4)是线性的. 若$n\neq0$且$n\neq1$，则代换$u=y^{1-n}$可把方程化为形如(4)的一个线性方程.

例 2　求解伯努利方程

解方程$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x^2y^2$.

解　方程两边同时除以x，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=xy^2.$$

因为$n=2$，所以用$y=u^{-1}$代换，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-u^{-2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \leftarrow \text{链式法则}$$

将其代入原方程，则原方程被简化. 结果为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}u=-x.$$

这个线性方程在$(0, +\infty)$上的积分因子是

$$e^{-\int dx/x}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}.$$

积分

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}u]=-1$$

得 $x^{-1}u=-x+c$ 或 $u=-x^2+cx$. 因为 $u=y^{-1}$，我们有 $y=1/u$，所以给定方程的一个解为 $y=1/(-x^2+cx)$. ■

注意我们并没有得到例 2 中非线性微分方程的通解，因为 $y=0$ 是方程的一个奇异解.

方程变形为可分离变量形式 一个形如

$$\frac{dy}{dx}=f(Ax+By+C) \tag{5}$$

的微分方程总是可以通过代换 $u=Ax+By+C$，$B\neq 0$ 变形为一个可分离变量的方程. 例 3 说明了如何使用这一技巧.

例 3 初值问题

求解 $\dfrac{dy}{dx}=(-2x+y)^2-7, y(0)=0$.

解 若设 $u=-2x+y$，则 $du/dx=-2+dy/dx$，微分方程变形为

$$\frac{du}{dx}+2=u^2-7 \text{ 或 } \frac{du}{dx}=u^2-9.$$

最后一个方程是可分离的. 将其改写为部分分式

$$\frac{du}{(u-3)(u+3)}=dx \text{ 或 } \frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u+3}\right]du=dx$$

然后积分得

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right|=x+c_1 \text{ 或 } \frac{u-3}{u+3}=e^{6x+6c_1}=ce^{6x}$$ ← 用 c 替换 e^{6c_1}

在最后一个等式里解出 u 并回代得到解为

$$u=\frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}} \text{ 或 } y=2x+\frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}. \tag{6}$$

最后对(6)后面的一个等式应用初值条件 $y(0)=0$ 得 $c=-1$. 在用绘图工具绘出的图 2.28 中，粗线表示了方程的特解

$$y=2x+\frac{3(1-e^{6x})}{1+e^{6x}}.$$

另外的图像是解族中的其他解. ■

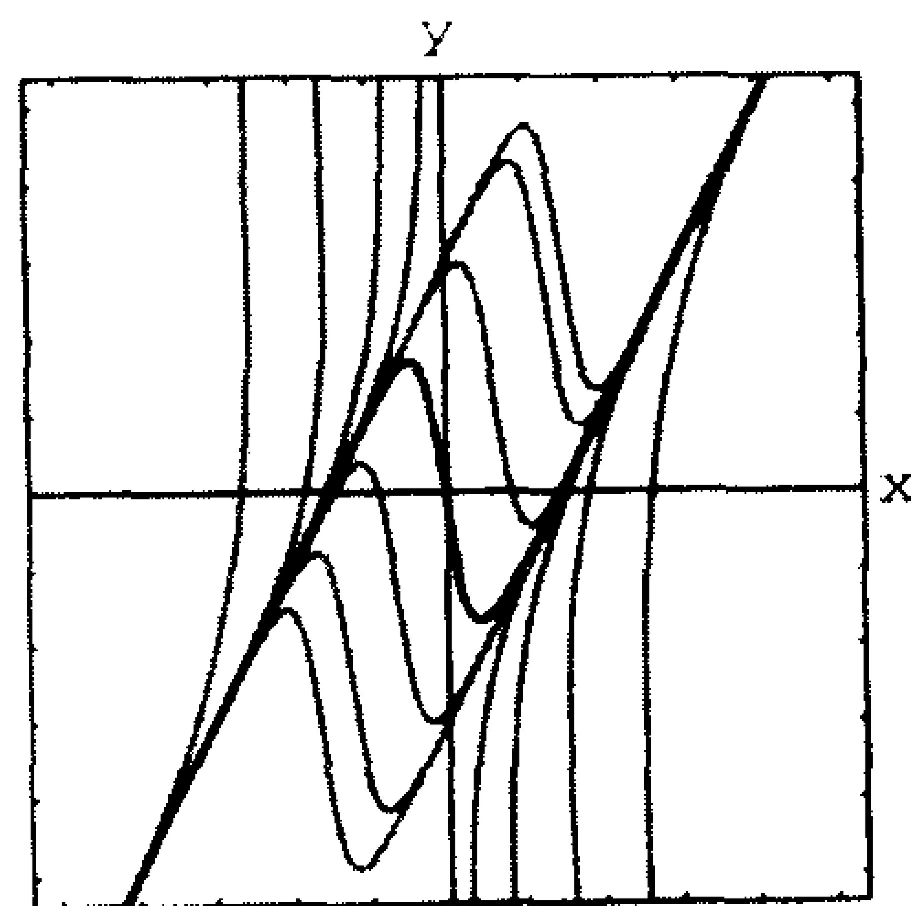


图 2.28 $y'=(-2x+y)^2-7$ 的一些解

练习 2.5

在习题 1～10 中，利用合适的代换求解给定的齐次方程.

1. $(x-y)dx+xdy=0$
2. $(x+y)dx+xdy=0$
3. $xdx+(y-2x)dy=0$
4. $ydx=2(x+y)dy$
5. $(y^2+yx)dx-x^2dy=0$
6. $(y^2+yx)dx+x^2dy=0$

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x+y}$

9. $-y dx+(x+\sqrt{xy})dy=0$

10. $x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

在习题 11～14 中，求解给定的初值问题.

11. $xy^2\frac{dy}{dx}=y^3-x^3$，$y(1)=2$

12. $(x^2+2y^2)\frac{dx}{dy}=xy$，$y(-1)=1$

13. $(x+ye^{y/x})dx-xe^{y/x}dy=0$，$y(1)=0$

14. $y dx+x(\ln x-\ln y-1)dy=0$，$y(1)=e$

在习题 15～20 中，利用合适的代换求解给定的伯努利方程.

15. $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$

16. $\frac{dy}{dx}-y=e^x y^2$

17. $\frac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$

18. $x\frac{dy}{dx}-(1+x)y=xy^2$

19. $t^2\frac{dy}{dt}+y^2=ty$

20. $3(1+t^2)\frac{dy}{dt}=2ty(y^3-1)$

在习题 21 和 22 中，求解给定的初值问题.

21. $x^2\frac{dy}{dx}-2xy=3y^4$，$y(1)=\frac{1}{2}$

22. $y^{1/2}\frac{dy}{dx}+y^{3/2}=1$，$y(0)=4$

在习题 23～28 中，仿照例 3 求解给定的微分方程.

23. $\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-y}{x+y}$

25. $\frac{dy}{dx}=\tan^2(x+y)$

26. $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)$

27. $\frac{dy}{dx}=2+\sqrt{y-2x+3}$

28. $\frac{dy}{dx}=1+e^{y-x+5}$

在习题 29 和 30 中，求解给定的初值问题.

29. $\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)$，$y(0)=\pi/4$

30. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+2y}{3x+2y+2}$，$y(-1)=-1$

讨论题

31. 解释为什么总可以把一个齐次微分方程 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 表示成

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=G\left(\frac{x}{y}\right).$$

的形式. 可以从证明

$$M(x,y)=x^{\alpha}M(1,y/x) \quad 及 \quad N(x,y)=x^{\alpha}N(1,y/x).$$

开始.

32. 例 3 中的解 $y(x)$在 $x\to\pm\infty$时是无界的. 不过当 $x\to-\infty$时，$y(x)$渐近于一条曲线. 而当 $x\to+\infty$ 时，它会渐近于另一条曲线. 这些曲线的方程是什么？

33. 形如 $dy/dx=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$ 的微分方程被称为里卡提方程(Riccati's equation).

(a)如果已知里卡提方程的一个特解 y_1，那么可以通过两步代换求出方程的解. 首先使用代换 $y=y_1+u$，然后讨论接下来的步骤.

(b)求出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}y+y^2$$

的一个单参数解族，已知 $y_1=2/x$ 为方程的一个解.

34. 为求解方程 $xy'=y\ln(xy)$，设计一个合适的代换.

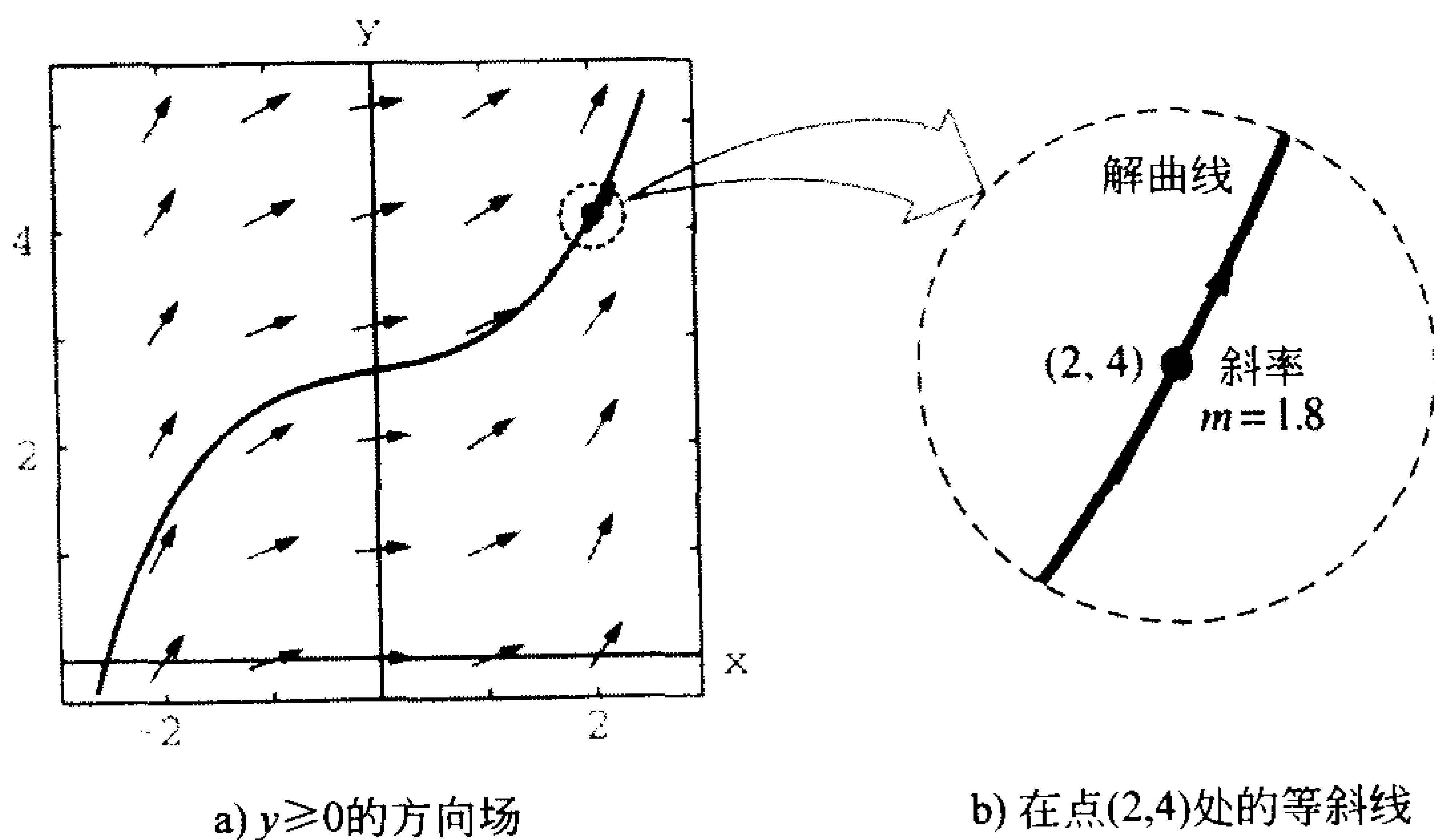
2.6 数值解法

到目前为止，我们已经用定性(2.1 节)和解析(2.2～2.5 节)方法分析了一阶常微分方程. 为了全面地介绍解不同类型微分方程的方法，我们最后介绍一种最简单的求微分方程近似解的方法. 被称为欧拉方法的数值解法利用了这样的思想，一个函数在某点的一个小邻域内的斜率值可以由这一点的切线来近似. 我们将从几何角度来解释如何利用欧拉方法在一些软件中获得方程数值解的图像. 更多求微分方程近似解的技巧将在第 9 章介绍.

切线的使用 一个求初值问题

$$y' = f(x,y),y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

近似解的方法就是利用切线. 例如，用 $y(x)$ 表示初值问题 $y' = 0.1\sqrt{y}+0.4x^2, y(2) = 4$ 的未知解. 这个非线性微分方程不能由 2.2～2.4 节中讨论的方法直接求解. 不过我们还是能找到 $y(x)$ 的近似值. 具体来说，假设我们希望知道 $y(2.5)$ 的值. 初值问题有一个解，且其方向场的走向如图 2.29(a)所示.



a) $y\geqslant 0$的方向场　　b) 在点(2,4)处的等斜线

图 2.29

图中方向场的等斜线都取自于这个区域内坐标为整数的结点. 由于解曲线通过初值点 (2, 4)，在这点的等斜线是由方程 $f(2,4) = 0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 1.8$ 来确定斜率的切线. 在图 2.29(b)中把图 2.29(a)“放大”，当 x 接近 2 时，解曲线上的点也接近切线(等斜线)上的点. 由点(2, 4)及斜率 $f(2, 4)=1.8$，并由直线的点斜式得到切线方程为 $y=L(x)$，这里 $L(x)=1.8x+0.4$. 上述方程称为 $y(x)$ 在 $x=2$ 处的线性化(linearization). 这个切线可以在 $x=2$ 的一个小邻域内当作 $y(x)$ 的近似. 如果 $y_1=L(x_1)$ 表示了切线上对应于 x_1 的 y 坐标，且 $y(x_1)$ 是解曲线上对应于 x_1 的 y 坐标，当 x_1 接近 $x=2$ 时，有 $y(x_1)\approx y_1$. 若 $x_1=2.1$，则 $y_1=L(2.1)=1.8(2.1)+0.4=4.18$. 所以 $y(2.1)\approx 4.18$.

欧拉方法 为总结上述求解过程，我们首先对(1)的未知解 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 处进行线性化：

$$L(x)=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0). \tag{2}$$

线性化后的图形是一条与 $y=y(x)$ 在 (x_0, y_0) 处相切的直线. 现在我们设 h 是 x 轴上的一个正增量，如图 2.30 所示，则在(2)中用 $x_1=x_0+h$ 替换 x 得

$$L(x_1)=y_0+f(x_0,y_0)(x_0+h-x_0)$$

或

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0),$$

这里 $y_1=L(x_1)$. 切线上的点 (x_1, y_1) 是解曲线上点 $(x_1, y(x_1))$ 的一个近似. 显然近似 $L(x_1)\approx y(x_1)$ 或 $y_1\approx y(x_1)$ 的精确度在很大程度上依赖于增量 h 的大小. 通常我们要使这个步长(step size)"适当小". 现在我们在 (x_1, y_1) 处利用第二条"切线"重复上面的过程[⊖]. 定义新的初始点为 (x_0, y_0)，取代前面的 (x_1, y_1)，我们由 x_0 可得对应于两个步长的近似 $y_2\approx y(x_2)$，即 $x_2=x_1+h=x_0+2h$ 和

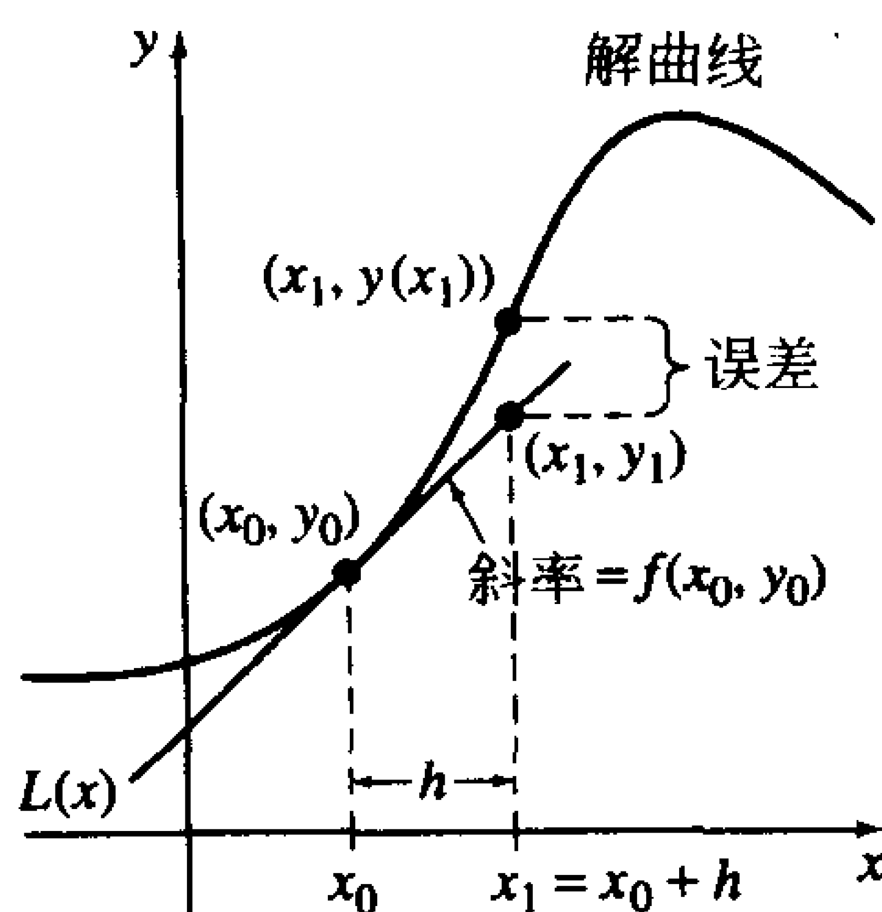


图 2.30

$$y(x_2)=y(x_0+2h)=y(x_1+h)\approx y_2=y_1+hf(x_1,y_1).$$

利用这一方法，我们看到 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 可以由一般公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \tag{3}$$

递推定义，这里 $x_n=x_0+nh$，$n=0, 1, 2, \cdots$，这一连续使用"切线"的过程称为欧拉方法(Euler's method).

例 1　欧拉方法

考虑初值条件 $y'=0.1\sqrt{y}+0.4x^2, y(2)=4$. 首先令 $h=0.1$，然后令 $h=0.05$，分别用欧拉方法求得 $y(2.5)$ 的一个近似值.

解　根据定义 $f(x,y)=0.1\sqrt{y}+0.4x^2$，(3)可写为

$$y_{n+1}=y_n+h(0.1\sqrt{y_n}+0.4x_n^2),$$

则对于 $h=0.1$，$x_0=2$，$y_0=4$，$n=0$，我们发现

$$y_1=y_0+h(0.1\sqrt{y_0}+0.4x_0^2)=4+0.1(0.1\sqrt{4}+0.4(2)^2)=4.18.$$

正如我们前面所看到的，它是 $y(2.1)$ 的一个估计值. 然而，如果我们用更小的步长 $h=0.05$，需要两步才能到达 $x=2.1$. 通过

$$y_1=4+0.05(0.1\sqrt{4}+0.4(2)^2)=4.09,$$

$$y_2=4.09+0.05(0.1\sqrt{4.09}+0.4(2.05)^2)=4.184\ 161\ 87$$

可得 $y_1\approx y(2.05)$ 及 $y_2\approx y(2.1)$. 其余结果在表 2.1 和表 2.2 中列出. 从表 2.1 和表 2.2 中我们看到当 $h=0.1$ 时需要五步而当 $h=0.05$ 时需要十步才能到达 $x=2.5$. 每次运算保留四位小数.

⊖ 这并非实际意义上的切线，因为在第一条切线上的点 (x_1, y_1) 并不在解曲线上.

表 2.1　$h=0.1$

x_n	y_n
2.00	4.000 0
2.10	4.180 0
2.20	4.376 8
2.30	4.591 4
2.40	4.824 4
2.50	5.076 8

表 2.2　$h=0.05$

x_n	y_n	x_n	y_n
2.00	4.000 0	2.30	4.604 5
2.05	4.090 0	2.35	4.721 0
2.10	4.184 2	2.40	4.842 3
2.15	4.282 6	2.45	4.968 6
2.20	4.385 4	2.50	5.099 7
2.25	4.492 7		

■

在例 2 中，我们将对一个已经求出解的微分方程应用欧拉方法．我们将在每一步比较近似值 y_n 与解的真值 $y(x_n)$.

例 2　近似值与精确值的比较

考虑初值问题 $y'=0.2xy$，$y(1)=1$. 首先令 $h=0.1$，然后令 $h=0.05$ 分别用欧拉方法获得 $y(1.5)$ 的一个近似值.

解　根据定义 $f(x, y)=0.2xy$，(3) 可写为

$$y_{n+1}=y_n+h(0.2x_ny_n),$$

这里 $x_0=1$ 且 $y_0=1$. 借助计算机软件，可以得到表 2.3 和表 2.4 中的值.

表 2.3　$h=0.1$

x_n	y_n	真实值	绝对误差	百分比相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.10	1.020 0	1.021 2	0.001 2	0.12
1.20	1.042 4	1.045 0	0.002 5	0.24
1.30	1.067 5	1.071 4	0.004 0	0.37
1.40	1.095 2	1.100 8	0.005 5	0.50
1.50	1.125 9	1.133 1	0.007 3	0.64

表 2.4　$h=0.05$

x_n	y_n	真实值	绝对误差	百分比相对误差	x_n	y_n	真实值	绝对误差	百分比相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00	1.30	1.069 4	1.071 4	0.002 0	0.19
1.05	1.010 0	1.010 3	0.000 3	0.03	1.35	1.083 3	1.085 7	0.002 4	0.22
1.10	1.020 6	1.021 2	0.000 6	0.06	1.40	1.098 0	1.100 8	0.002 8	0.25
1.15	1.031 8	1.032 8	0.000 9	0.09	1.45	1.113 3	1.116 6	0.003 2	0.29
1.20	1.043 7	1.045 0	0.001 3	0.12	1.50	1.129 5	1.133 1	0.003 7	0.32
1.25	1.056 2	1.057 9	0.001 6	0.16					

■

例 2 中的真实值可由已知解 $y=e^{0.1(x^2-1)}$ 计算求得(请证明之). 绝对误差(absolute error)定义为

$$|\text{真实值}-\text{近似值}|.$$

相对误差(relative error)和百分比相对误差(percentage relative error)分别定义为

$$\frac{\text{绝对误差}}{|\text{真实值}|} \quad \text{和} \quad \frac{\text{绝对误差}}{|\text{真实值}|}\times 100.$$

从表 2.3 和表 2.4 中可以看出，近似值的精确度随着步长 h 的减小而提高. 我们也可以看到，尽管百分比相对误差是伴随着每一步计算在逐渐增大，但情况还没有变的太坏. 但不能仅由此一个例子得出结论. 如果我们对例 2 中微分方程右边的系数做简单的改变，将 0.2 改为 2，则在 $x_n=1.5$ 处，百分比相对误差会变得非常大. 请参考练习 2.6 中的习题 4.

说明 欧拉方法只是众多求微分方程近似解的方法之一. 虽然其简单性很有吸引力，但欧拉方法很少在精确计算中使用. 这里只是以此方法来对数值方法做一初步的介绍. 我们将在后面更详细地讨论高精确度的数值解法，尤其是第 9 章中的四阶龙格-库塔方法(fourth-order Runge-Kutta method).

数值解 不管我们能否找到一个显式解或隐式解，只要微分方程的解存在，它一定与笛卡儿平面上一条光滑曲线相对应. 所有求解一阶常微分方程的数值方法的基本思想都是基于对事先给定的 x 值，求出解中相应 y 的近似值. 我们由一个具体的初值点开始一步一步地计算一系列的点(x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n)，其中 y 坐标 y_i 是点(x_1, $y(x_1)$), (x_2, $y(x_2)$), …, (x_n, $y(x_n)$)中纵坐标 $y(x_i)$ 的近似值. 后面这一列点都在未知解的解曲线上. 令 x 坐标的间隔比较小(即使 h 的值较小)，然后用小线段连接点(x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n)，我们获得一条与真实的解曲线足够接近的折线. 绘出曲线是计算机擅长的工作. 利用这种方法求数值解或给出近似解曲线的程序称为数值求解程序(numerical solver)或 ODE 求解程序(ODE solver). 我们可以得到很多不同的算法，有的内嵌于大的软件包中，如 CAS，有的作为一个专门的软件包. 有的软件包是简单地给出数值的近似解，有的则是利用比较复杂的数值方法求出近似解或解曲线. 为了显示由数值求解程序生成的折线图像的性质，图 2.31 中的两条折线是初值问题 $y'=0.2xy$, $y(0)=1$ 在区间[0, 4]上分别由欧拉方法和龙格-库塔方法获得的，其步长 $h=1$. 图中的光滑曲线是初值问题精确解 $y=e^{0.1x^2}$ 的图像. 注意到图 2.31 中，尽管步长 $h=1$ 的取值相当大，龙格-库塔方法还是生成了一条可靠的"解曲线". 实际上当步长 $h=0.1$ 时，由龙格-库塔方法获得的数值解在区间[0, 4]上就很难与真实解曲线区分得开了.

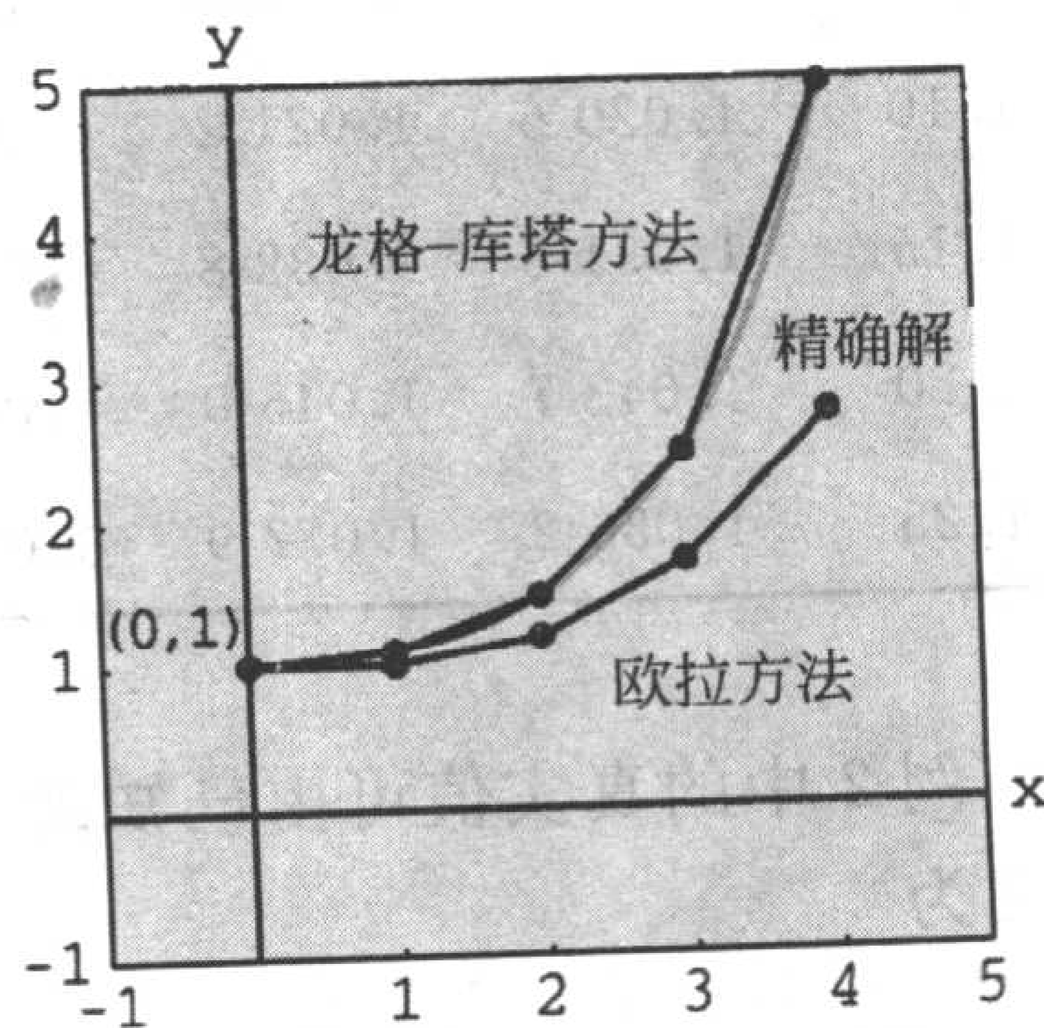


图 2.31 数值解的对比

数值求解程序的使用 在利用数值解法时，我们无需掌握每一种数值方法. 数值解法通常需要微分方程表示为标准形式 $dy/dx=f(x, y)$. 只需绘出解曲线的解法通常需要给出 $f(x, y)$、具体的初值点 x_0 和 y_0，以及要使用的数值方法. 如果还需要求出 $y(a)$ 的近似值，则需要给出步长 h，或者等价地，给出从 $x=x_0$ 到 $x=a$ 的步数. 例如，我们想得到图 2.31 中所示的初值条件中 $y(4)$ 的近似值，则从 $x=0$ 开始，对于步长 $h=1$，需要 4 步到达 $x=4$，而 40 步等价于步长 $h=0.1$. 虽然我们在这里不会深入研究求近似的过程中

可能遇到的计算问题，但至少应该清楚一个数值求解程序在求解一阶微分方程时可能在某点附近中止或产生不完善或有误导作用的图像. 图 2.32 显示了应用欧拉方法得到的关于一阶初值条件 $dy/dx=f(x,\ y)$，$y(0)=1$ 的图像. 应用其他 3 种数值求解程序后得到了相同的结果，而这个图像几乎不可能是一条合理的解曲线.（为什么?）这里有一些解决数值求解程序所遇到困难的方法，三个比较明显的方法是减小步长，使用其他数值方法，以及尝试不同的数值求解程序.

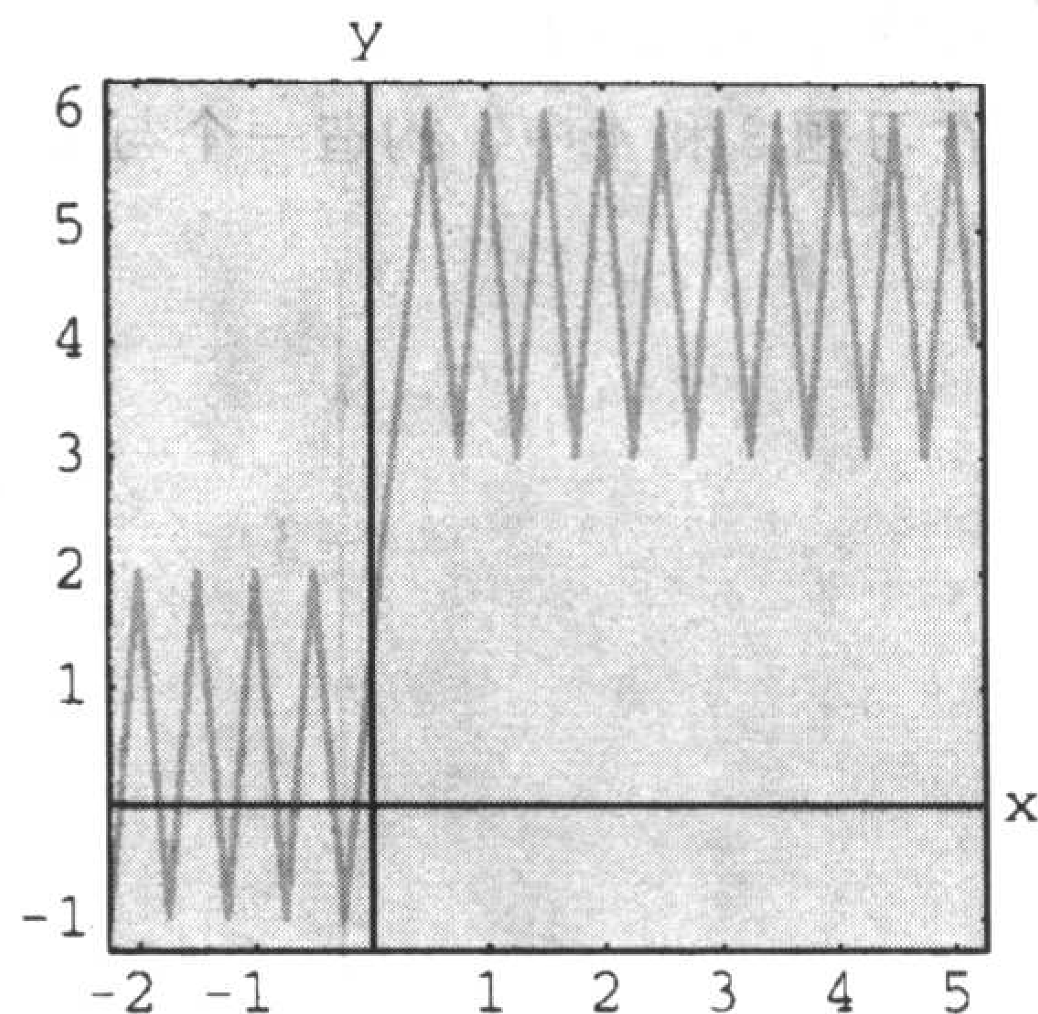


图 2.32

练习 2.6

在习题 1 和习题 2 中，应用欧拉方法获得所给值的近似值，精确到四位小数. 写出(3)中的递推过程，首先使用 $h=0.1$，然后使用 $h=0.05$.

1. $y'=2x-3y+1$，$y(1)=5$；$y(1.2)$
2. $y'=x+y^2$，$y(0)=0$；$y(0.2)$

在习题 3 和习题 4 中，使用欧拉方法获得要求值的近似值，精确到四位小数. 首先使用 $h=0.1$，然后使用 $h=0.05$. 求出初值条件的显式解，然后做类似于表 2.3 和表 2.4 的表格.

3. $y'=y$，$y(0)=1$；$y(1.0)$
4. $y'=2xy$，$y(1)=1$；$y(1.5)$

在习题 5～10 中，使用欧拉方法获得所给值的近似值，精确到四位小数. 首先令 $h=0.1$，然后令 $h=0.05$.

5. $y'=e^{-y}$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
6. $y'=x^2+y^2$，$y(0)=1$；$y(0.5)$
7. $y'=(x-y)^2$，$y(0)=0.5$；$y(0.5)$
8. $y'=xy+\sqrt{y}$，$y(0)=1$；$y(0.5)$
9. $y'=xy^2-\dfrac{y}{x}$，$y(1)=1$；$y(1.5)$
10. $y'=y-y^2$，$y(0)=0.5$；$y(0.5)$

在习题 11 和 12 中，使用数值求解程序绘出给定初值条件的解曲线. 首先使用欧拉方法然后使用龙格-库塔方法. 在每种方法中都令 $h=0.25$. 把两种方法得到的解曲线画在同一坐标系中. 如果可能的话，对每条曲线使用不同的颜色. 令 $h=0.1$ 和 $h=0.05$ 重复上述过程.

11. $y'=2(\cos x)y$，$y(0)=1$
12. $y'=y(10-2y)$，$y(0)=1$

讨论题

13. 在数值求解程序中使用欧拉方法求 $y(1.0)$的近似值，这里 $y(x)$是 $y'=2xy^2$，$y(0)=1$ 的解. 首先令 $h=0.1$，然后令 $h=0.05$. 用龙格-库塔方法重复上述过程. 讨论为什么得到的 $y(1.0)$的近似值有如此大的差别.

计算机实验作业

14. (a)用数值求解程序和龙格-库塔方法求出初值问题 $y'=-2xy+1$，$y(0)=0$ 的解曲线.
    (b)用本章前面所述的解析方法求解这个初值问题.
    (c)利用(b)中得到的解析解 $y(x)$和 CAS 找到所有相对极点的坐标.

第 2 章复习题

在习题 1 和 2 中填空.

1. 微分方程 $y'-ky=A$ 是自治的，这里 k 和 A 为常数. 其临界点________在 $k>0$ 时是一个________(吸引子或排斥子)，在 $k<0$ 时是一个________(吸引子或排斥子).

2. 初值问题 $x\mathrm{d}y/\mathrm{d}x-4y=0$，$y(0)=k$ 在 $k=$________时有无穷多个解，在 $k=$________时无解.

在习题 3 和 4 中，构造一个与给出相图一致的自治一阶微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(y)$.

3.

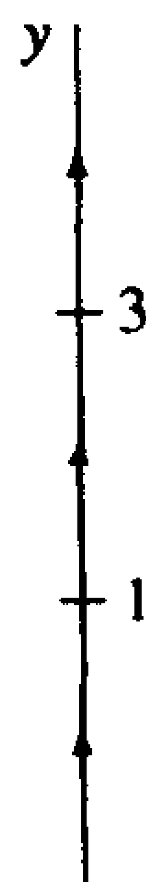


图 2.33

4.

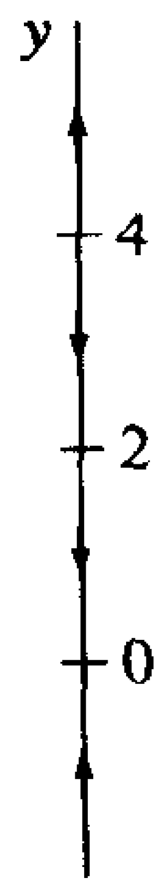


图 2.34

5. 零点是自治微分方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x^n$ 的一个临界点，这里 n 为一个正整数. 当 n 为何值时零点是渐近稳定、半稳定、不稳定的? 对微分方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-x^n$ 重复做上述问题.

6. 考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P),\quad 其中\ f(P)=-0.5P^3-1.7P+3.4.$$

函数 $f(P)$ 有一个零点，如图 2.35 所示. 在不求解微分方程的情况下，估计 $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)$ 的值.

7. 图 2.36 是微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x, y)$ 的方向场. 徒手绘出两条解曲线.

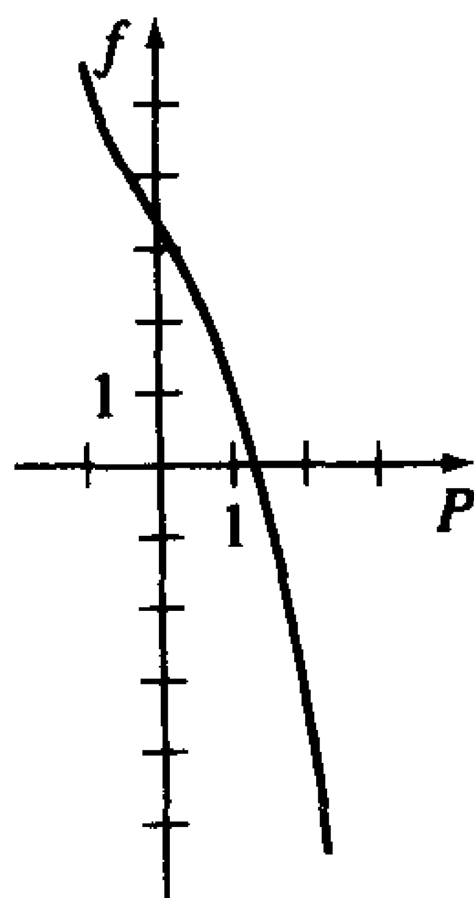


图 2.35

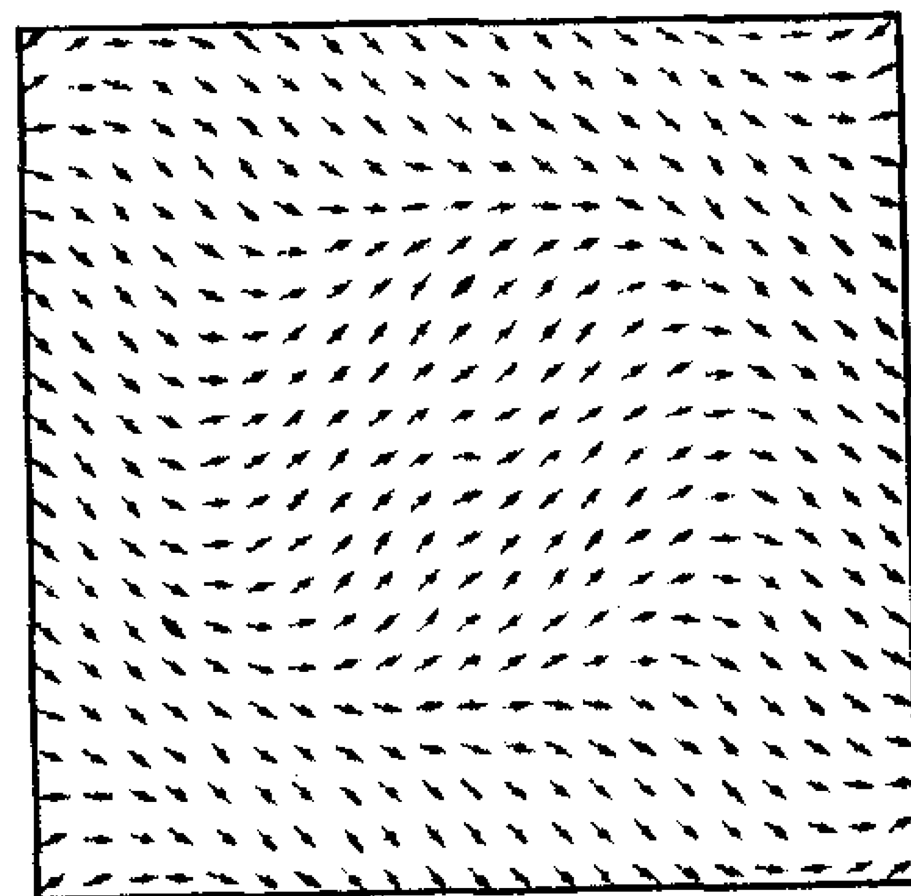


图 2.36

8. 将给定方程分为以下类别：可分离的、恰当的、线性的、齐次的及伯努利方程. 有些方程可能不仅属于一种类型. 不要求求解.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{x}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y-x}$

(c) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y+10$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x(x-y)}$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2+y}{x^2+x}$

(f) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5y+y^2$

(g) $y\mathrm{d}x=(y-xy^2)\mathrm{d}y$

(h) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ye^{x/y}-x$

(i) $xyy'+y^2=2x$

(j) $2xyy'+y^2=2x^2$

(k) $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$

(l) $\left(x^2+\frac{2y}{x}\right)\mathrm{d}x=(3-\ln x^2)\mathrm{d}y$

(m) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1$

(n) $\frac{y}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{2x^3+y^2}=0$

在习题 9～16 中求解给定的微分方程.

9. $(y^2+1)\mathrm{d}x=y\sec^2 x\mathrm{d}y$

10. $y(\ln x-\ln y)\mathrm{d}x=(x\ln x-x\ln y-y)\mathrm{d}y$

11. $(6x+1)y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3x^2+2y^3=0$

12. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{4y^2+6xy}{3y^2+2x}$

13. $t\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+Q=t^4\ln t$

14. $(2x+y+1)y'=1$

15. $(x^2+4)\mathrm{d}y=(2x-8xy)\mathrm{d}x$

16. $(2r^2\cos\theta\sin\theta+r\cos\theta)\mathrm{d}\theta+(4r+\sin\theta-2r\cos^2\theta)\mathrm{d}r=0$

在习题 17～18 中求解给定的初值问题，并给出使解有意义的最大区间 I.

17. $\sin x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(\cos x)y=0$，$y\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-2$

18. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2(t+1)y^2=0$，$y(0)=-\frac{1}{8}$

19. (a)在不求解的情况下解释初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{y},y(x_0)=y_0$$

当 $y_0<0$ 时无解的原因.

(b)当 $y_0>0$ 时求解(a)中的初值问题并给出使解有意义的最大区间 I.

20. (a)求出初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-x^2}{xy},y(1)=-\sqrt{2}.$$

的一个隐式解.

(b)求出(a)中问题的一个显式解并给出解的最大定义区间 I. 在这里应用绘图工具也许会有帮助.

21. 一阶微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x, y)$解族中的一些解曲线在图 2.37 中绘出. 一条解曲线过点(1，−1)，另一条过点(−1，3). 重做一张图，用彩色铅笔绘出隐式解所定义的 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$的图像，分别使得 $y_1(1)=-1$，$y_2(-1)=3$. 估计解 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$的定义区间.

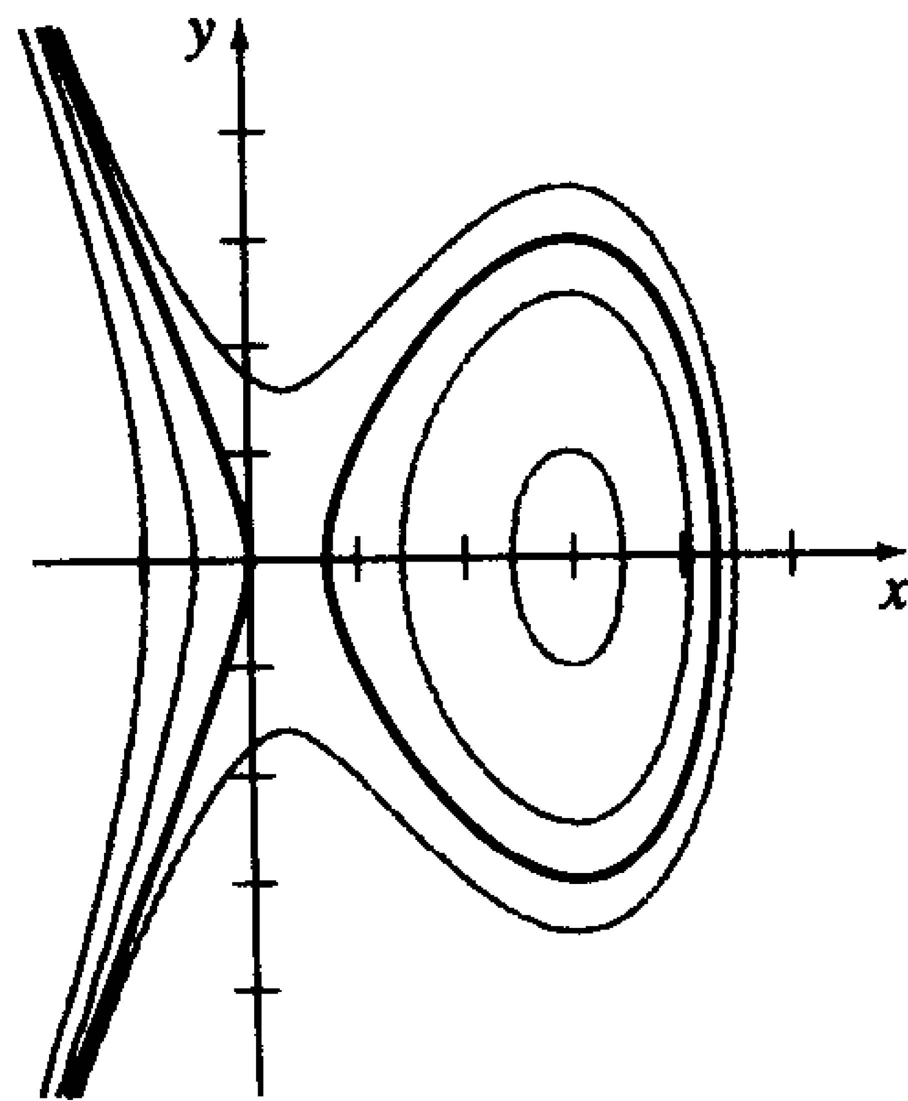
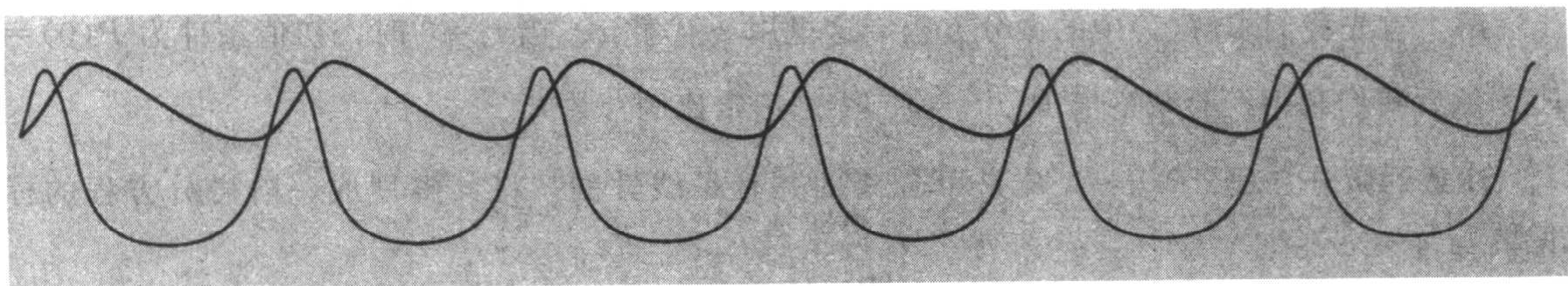


图 2.37

22. 使用欧拉方法求 $y(1.2)$的近似值，步长 $h=0.1$. 这里 $y(x)$是初值问题 $y'=1+x\sqrt{y},y(1)=9$ 的一个解.



捕食-被捕食模型的解；见图 3.20

第3章　一阶微分方程建模

在 1.3 节中我们看到的数学模型——人口增长、放射性衰减、连续复利、化学反应、物体冷却、排水问题、落体速度、记忆速率、串联电路中的电流都用到了一阶微分方程. 根据第 2 章介绍的一些方法，我们现在可以求解一些实际应用中提出的线性和非线性微分方程问题了. 本章在最后顺理成章地引出了后面要学习的内容——作为数学模型的一阶微分方程组.

3.1　线性方程

在本节中我们将求解 1.3 节中的数学模型所涉及的一些线性一阶微分方程. 回顾 2.3 节，在一个线性方程的标准型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+P(t)y=f(t)$$

两边乘以积分因子 $\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}$，可将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}y]=\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}f(t).$$

可以通过对最后这个等式两边积分求得方程的解.

增长与衰减　初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx,\quad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

其中 k 为一个比例常数，用于不同的增长(growth)或衰减(decay)模型. 我们看到在 1.3 节中的生物学应用中，某时刻人口数量(也适用于细菌、动物)的增长率与 t 时刻的人口数量成正比. 已知在某任意初始时刻 t_0 的人口数量，我们可以用(1)来预测未来的人口数量，即通过测量在时间 $t_1>t_0$ 时的 x，再由初值问题得到比例常数 k 的值. 在物理和化学模型中，(1)被认为是一阶反应——即在 t 时刻，其比率或速率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 直接与还未变化的或剩余的 x 成正比. U-238(铀)衰变为 Th-234(钍)的反应即为一阶反应.

例 1　**细菌增长问题**

一个细菌培养过程在初始时刻的细菌数量为 p_0. 在 $t=1\mathrm{h}$ 时，测得细菌数量为 $\frac{3}{2}p_0$. 如果在 t 时刻的增长速度与此时细菌的数量 $P(t)$ 成正比，求细菌数量增至原来的三倍所需要的时间.

解 首先我们求解(1)中的微分方程，这里用 p 代替 x. 当 $t_0=0$ 时，初值条件为 $P(0)=P_0$. 然后我们利用经验观察值 $P(1)=\frac{3}{2}P_0$ 来确定比例常数 k.

注意到微分方程 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=kP$ 是可分离的并且是线性的，将其整理成一阶微分方程的标准型

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-kP=0,$$

我们可以看到积分因子为 e^{-kt}. 在方程两边同乘以这一项后积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-kt}P]=0 \text{ 和 } e^{-kt}P=c,$$

所以 $P(t)=ce^{kt}$. 当 $t=0$ 时有 $P_0=ce^0=c$，所以 $P(t)=P_0e^{kt}$. 当 $t=1$ 时我们有 $\frac{3}{2}P_0=P_0e^k$，即 $e^k=\frac{3}{2}$. 从最后一个等式中我们可得 $k=\ln\frac{3}{2}=0.405\,5$，所以 $P(t)=P_0e^{0.405\,5t}$. 为了求细菌数量变为原来三倍的时间，我们解出 $3P_0=P_0e^{0.405\,5t}$ 中的 t，有 $0.405\,5\,t=\ln 3$，或

$$t=\frac{\ln 3}{0.405\,5}\approx 2.71\text{h}.$$

如图 3.1 所示. ■

注意在例 1 中，细菌在 $t=0$ 时的数量 P_0 对其增至原来三倍所需的时间并没有什么影响. 增至原来三倍所需的时间在一个初始值下，比如是 100 或 1 000 000 个细菌，都为 2.71 小时.

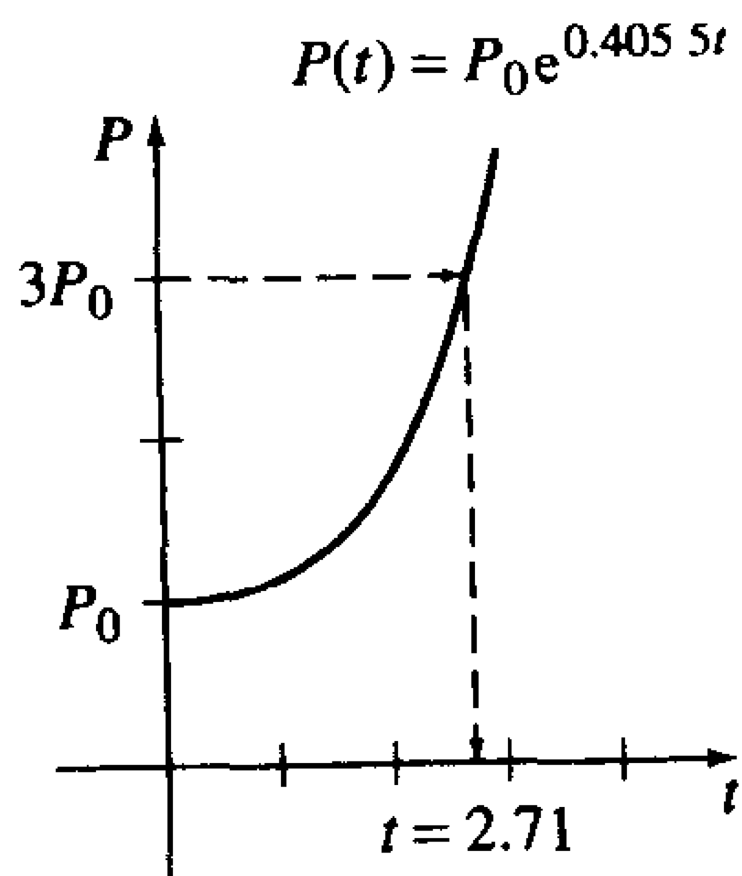


图 3.1

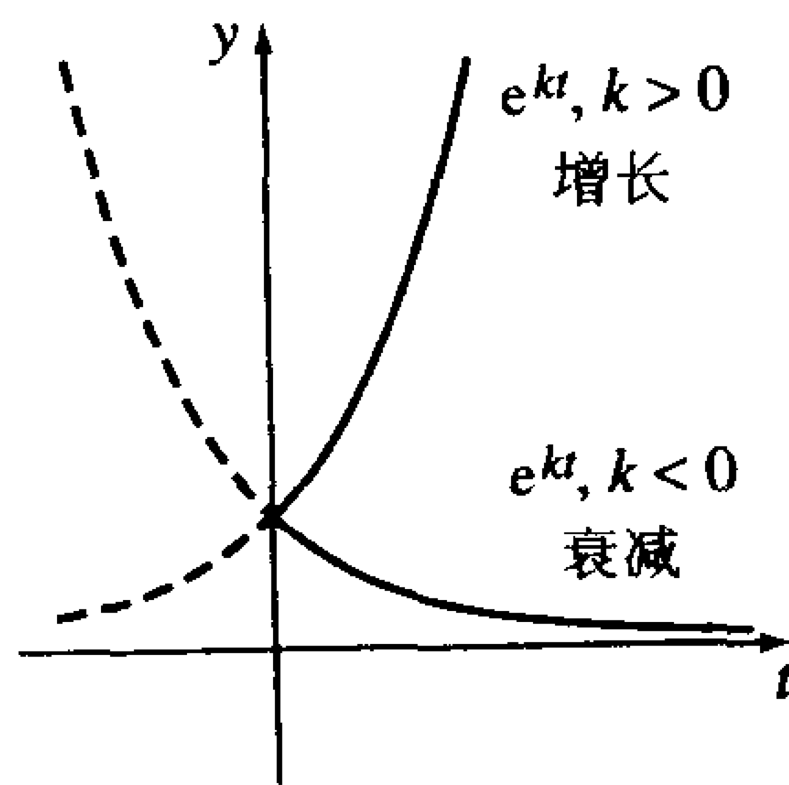


图 3.2

如图 3.2 所示，当 $k>0$ 时，指数函数 e^{kt} 随着 t 的增加而增加，而当 $k<0$ 时反之. 所以增长问题(人口、细菌，甚至资本)可以由这个正数 k 来描述，而一些与衰减有关的问题(例如放射性分解)则取决于一个负的 k 值. 由此，我们称 k 为**增长常数**(growth constant)($k>0$)或**衰减常数**(decay constant)($k<0$).

半衰期 在物理学中**半衰期**(half life)用来衡量放射性物质的稳定性. 半衰期即一种 A_0 数量的放射性元素中有一半儿分解或转化成另一种元素的原子所需的时间. 一种物质的半衰期越长它也就越稳定. 例如强放射性元素镭 Ra-226 的半衰期为 1700 年. 在 1700 年里一定量的镭中一半儿会转化为氡 Rn-222. 最常见的铀的同位素 U-238 的半衰期约为 4 500 000 000 年. 在 45 亿年里，一定量的 U-238 中有一半会转化为铅 Pb-206.

例 2 钚的半衰期

一个增殖反应堆可将相对稳定的铀 238 转化为同位素钚 239. 15 年后测得初始值为 A_0 的钚中有 0.043%已经分解. 如果分解速度与元素剩余量成正比，求出这种同位素的半衰期.

解 设 $A(t)$为任意时刻钚的剩余量. 如例 1，初值条件

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=kA, A(0)=A_0$$

的解为 $A(t)=A_0\mathrm{e}^{kt}$. 若 A_0 的 0.043%已经分解，则还有 99.957%剩余量. 为求 k，我们解 $0.999\,57A_0=A(15)$，即 $0.999\,57A_0=A_0\mathrm{e}^{15k}$. 解得 $k=\frac{1}{15}\ln 0.999\,57=-0.000\,028\,67$. 所以 $A(t)=A_0\mathrm{e}^{-0.000\,028\,67t}$. 半衰期对应方程 $A(t)=\frac{1}{2}A_0$ 的解. 在 $\frac{1}{2}A_0=A_0\mathrm{e}^{-0.000\,028\,67t}$ $\left(即\ \frac{1}{2}=\mathrm{e}^{-0.000\,028\,67t}\right)$中解出 t 得

$$t=\frac{\ln 2}{0.000\,028\,67}\approx 24\,180\mathrm{yr}. \qquad \blacksquare$$

碳定年 1950 年，化学家威拉德・利比设计出一种利用放射性碳来测定化石大致年代的方法. *碳定年*(carbon dating)理论是基于以下科学事实，同位素 C-14 是由宇宙射线照射在大气中的氮元素上发生反应而生成的. 在大气中同位素 C-14 与普通碳的比例为一个常数，所以同位素在活着的生物体中所占的比例与大气中的相同. 当生物死亡时，通过呼吸或摄食对 C-14 的吸收就停止了. 这样，通过将化石中与大气中 C-14 所占的比例进行比较，就可以合理地估计出化石的年代. 这种方法基于 C-14 的半衰期大约为 5 600 年，威拉德・利比因此获得了 1960 年的诺贝尔化学奖. 利比的方法曾被用于测定埃及古墓中的木制家具、死海的机织亚麻外套及都灵神秘寿衣的年代.

例 3 化石年代的测定

一块骨头化石被测定含有原数量千分之一的 C-14，确定化石的年代.

解 我们仍从 $A(t)=A_0\mathrm{e}^{kt}$ 入手. 为了确定衰减常数 k，我们利用 $A_0/2=A(5\,600)$或 $A_0/2=A_0\mathrm{e}^{5\,600k}$. 由 $5\,600k=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$，有 $k=-(\ln 2)/5\,600=-0.000\,123\,78$. 所以 $A(t)=A_0\mathrm{e}^{-0.000\,123\,78t}$. 再由 $A(t)=A_0/1\,000$，可得 $A_0/1\,000=A_0\mathrm{e}^{-0.000\,123\,78t}$，所以 $-0.000\,123\,78t=\ln(1/1\,000)=-\ln 1\,000$. 因此有

$$t=\frac{\ln 1\,000}{0.000\,123\,78}\approx 55\,800\mathrm{yr}. \qquad \blacksquare$$

由例 3 确定的年代确实在这个方法的精度范围之内. 通常 C-14 技术被限制在同位素的 9 个半衰期内，也就是大约 50 000 年. 这种限制的一个原因是因为当 C-14 的数量变为 $A_0/1\,000$ 时，化学分析所需的准确测量将变得非常艰难. 另外，这种分析还需要破坏相当数量的实验样本. 如果这种测量是基于样本实际的放射能间接完成的，我们会很难区分由化石产生的放射能和一般情况下产生的放射能.[⊖] 不过最近利用粒子加速器，科学家可以直接将 C-14 从稳定的

⊖ 利用一个盖格计数器来记录每分钟每克碳分解的数量. 仪器测量的下限大约是每分钟每克有 0.1%分解.

C-12 中分解出来. 当 C-14 与 C-12 比例的精确值可以计算出来时，这种方法满足精确度的范围可以扩大到 70 000 到 100 000 年. 其他诸如利用 K-40 和 Ar-40 的同位素技术的测定范围可达到几亿年.[⊖] 用于氨基酸的非同位素方法在有些时候也可以使用.

牛顿热力学定律 在 1.3 节方程(3)中，我们看到牛顿关于一个物体冷却的经验规律是由线性一阶微分方程表示的数学公式

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-T_m), \tag{2}$$

确定的，其中 k 是一个比例常数，$T(t)$ 是 $t>0$ 时物体的温度，T_m 是周围环境的温度，即物体周围介质的温度. 在例 4 中，我们假设 T_m 为常数.

例 4 **蛋糕的冷却**

当一块蛋糕从烤箱中被拿出时，测得其温度为 300℉. 3 分钟后其温度变为 200℉，使蛋糕冷却到室温 70℉需要多长时间?

解 在(2)中，定义 $T_m=70$. 我们需要求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-70), T(0)=300 \tag{3}$$

并确定 k 的值使得 $T(3)=200$.

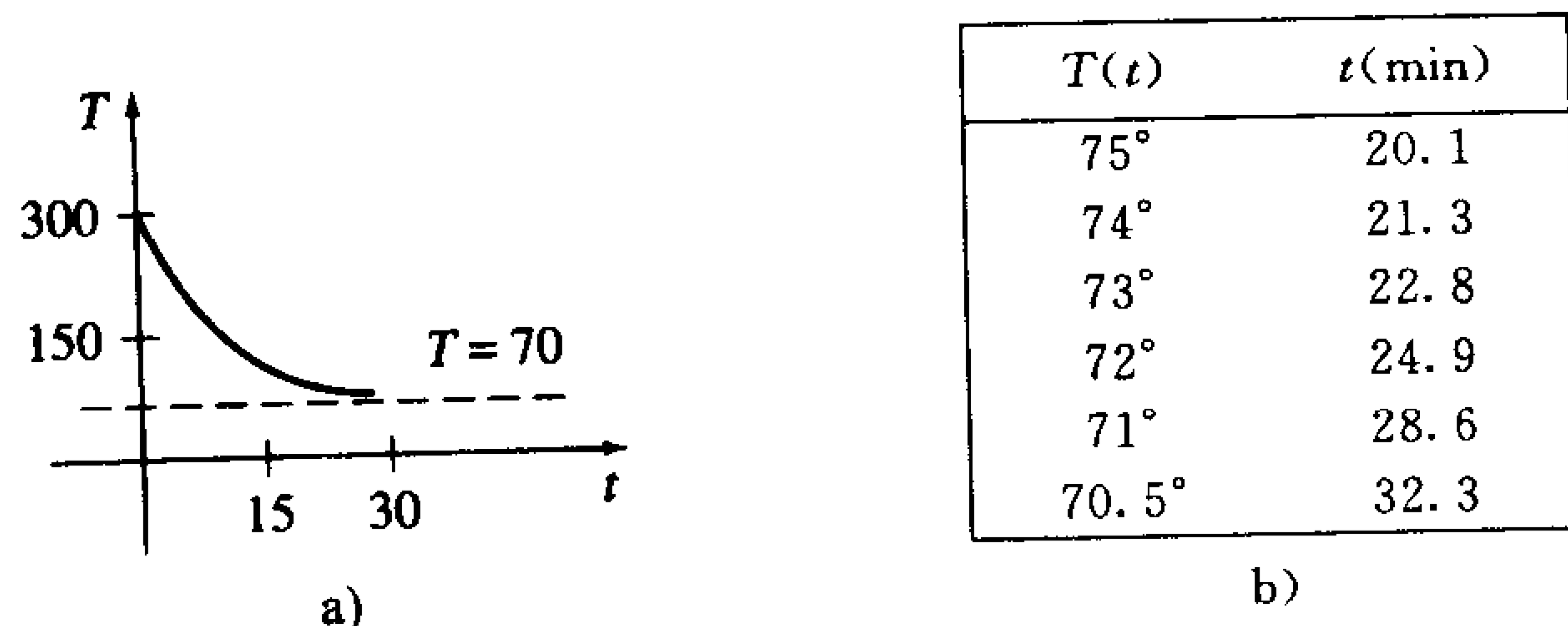
方程(3)既是线性的又是可分离的. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-70}=k\mathrm{d}t,$$

然后有 $\ln|T-70|=kt+c_1$，因此有 $T=70+c_2\mathrm{e}^{kt}$. 当 $t=0$ 时，$T=300$，再由 $300=70+c_2$ 得 $c_2=230$，所以 $T=70+230\mathrm{e}^{kt}$. 最后测得的 $T(3)=200$ 使得 $\mathrm{e}^{3k}=13/23$ 因此 $k=(1/3)\ln(13/23)=-0.190\,18$. 这样可得

$$T(t)=70+230\mathrm{e}^{-0.190\,18t}. \tag{4}$$

我们注意到，(4)式没有有限解 $T(t)=70$，因为 $\lim_{t\to+\infty}T(t)=70$. 从直观感觉上我们认为蛋糕将在合理长的时间后冷却至室温. 那么“合理长”是多长呢? 我们当然没必要被(3)的结果扰乱了直觉. 图 3.3 的(a)和(b)清楚地显示了蛋糕将在大约半小时后近似等于室温.



$T(t)$	t(min)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

b)

图 3.3

混合物 有时候两种溶液的混合可以用线性一阶微分方程来描述. 我们在 1.3 节对两种盐溶液的混合进行讨论时，假设容器中盐的数量的变化率 $A'(t)$ 为净速率:

⊖ 钾-氩定年法可以用来测定地球上的物质，如矿石、岩石、火山岩以及地球外的物质，如陨石、月球岩石的年代. 化石的年代可由测定岩层年代来估计.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\text{盐的倒}\\\text{入速率}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{盐的倒}\\\text{出速率}\end{pmatrix}=R_i-R_o. \tag{5}$$

在例 5 中我们将求解 1.3 节里的方程(8).

例 5　两种盐溶液的混合问题

回顾 1.3 节里的大容器，开始时盛了 300gal 盐溶液．盐同时进出容器；一种盐溶液以 3gal/min 的速率注入容器，与容器中的溶液混合，同时以 3gal/min 的速率抽出溶液．注入的盐溶液的浓度为 2lb/gal，所以盐的注入速率为 $R_i=(2\text{lb/gal})\cdot(3\text{gal/min})=6\text{lb/min}$，$A$ 离开容器的速率 $R_o=(3\text{gal/min})\cdot(A/300\text{lb/gal})=A/100\text{lb/min}$．由这些数据及(5)，我们得到 1.3 节里的方程(8)．我们提出以下问题：如果开始时将 50lb 盐放入容器生成 300gal 溶液，经过较长的一段时间后还有多少盐在容器内？

解　为找出 $A(t)$，我们求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=6-\frac{A}{100},A(0)=50.$$

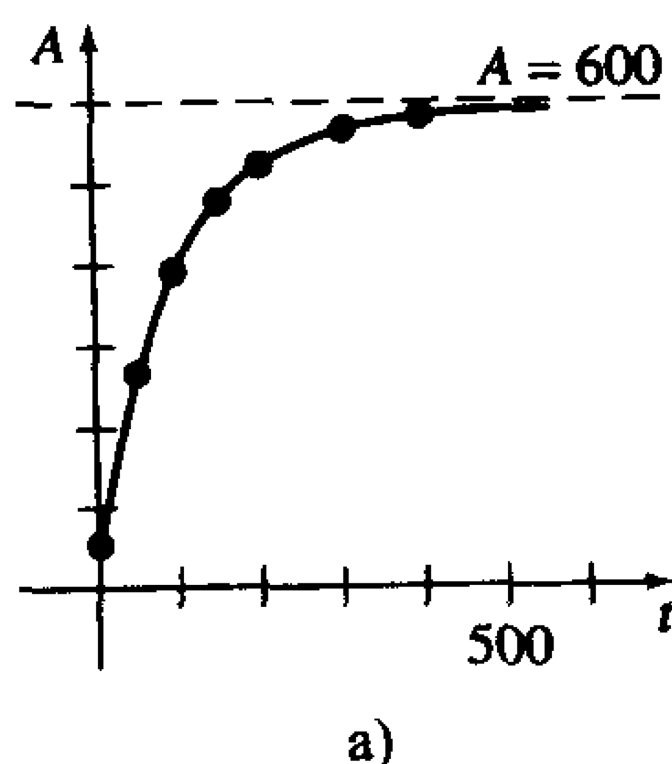
注意给出的条件是盐的初始数量，$A(0)=50$，而不是溶液的初始数量．因为线性微分方程的积分因子为 $\mathrm{e}^{t/100}$，我们可把方程写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{t/100}A]=6\mathrm{e}^{t/100}.$$

对方程积分得到通解 $A=600+c\mathrm{e}^{-t/100}$．当 $t=0$ 时，$A=50$，因此得 $c=-550$．所以在任意 t 时刻，容器中盐的数量为

$$A(t)=600-550\mathrm{e}^{-t/100}. \tag{6}$$

解(6)被用来构造图 3.4(b)中的表格．我们可以从(b)和图 3.4 中看到当 $t\to+\infty$时，$A\to 600$．当然，这正是我们所希望看到的；在很长一段时间后溶液中盐的数量为$(300\text{gal})\times(2\text{lb/gal})=600\text{lb}$. ■



a)

t(min)	A(lb)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

b)

图　3.4

在例 5 中我们假设溶液注入的速度与溶液抽出的速度相同．然而，这个条件并不是必需的；混合溶液被抽出的速度可以比溶液注入的速度快或慢．例如，例 5 中搅拌均匀的溶液被抽出来的速度稍微慢一点，比如说 2gal/min，则容器里的溶液将以$(3-2)$gal/min=1gal/min 的速度增加．经过 t 分钟后，容器里将有$(300+t)$gal 盐溶液．盐离开容器的速度为

$$R_o=(2\text{gal/min})\left(\frac{A}{300+t}\text{lb/gal}\right).$$

所以方程(5)变为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=6-\frac{2A}{300+t}\quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{300+t}A=0.$$

可以证明当 $A(0)=50$ 时，最后一个方程的解为 $A(t)=600+2t-(4.95\times10^7)(300+t)^{-2}$.

串联电路 设一个串联电路仅有一个电阻和一个电感线圈，由基尔霍夫第二定律，电感线圈上的电压($L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$)与电阻上的电压($Ri$)之和等于电路中的外加电压，如图 3.5 所示.

这样我们得到有关电流 $i(t)$ 的线性微分方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E(t), \tag{7}$$

这里 L 和 R 分别被称为感应系数和电阻. 电流 $i(t)$ 也被称为系统的响应(response).

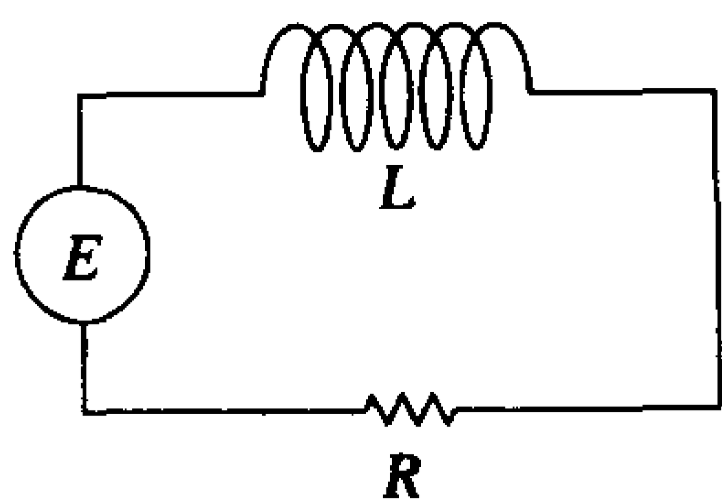


图 3.5 LR 串联电路

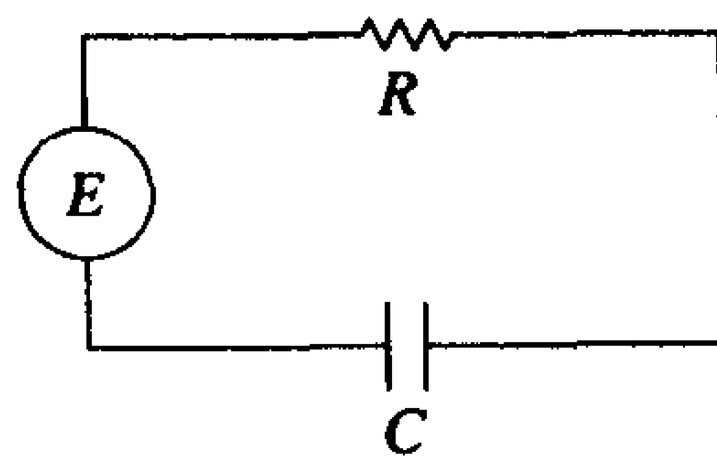


图 3.6 RC 串联电路

电容为 c 的电容器上的电压为 $q(t)/C$，这里 q 是电容器上的电荷量. 所以对于图 3.6 所示的串联电路，由基尔霍夫第二定律有

$$Ri+\frac{1}{C}q=E(t), \tag{8}$$

但是电流 i 和电荷 q 有关系 $i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$，所以(8)变为一阶微分方程

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=E(t). \tag{9}$$

例 6 **串联电路**

将一个 12V 的电池连入串联电路，电路中电感线圈的感应系数为 1/2H，电阻为 10Ω. 如果初始时刻电流为 0，求电流的表达式.

解 由(7)可知需求解方程

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+10i=12,$$

使得 $i(0)=0$. 首先我们在方程两边同乘以 2，然后得到积分因子 e^{20t}，然后有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{20t}i]=24\mathrm{e}^{20t}.$$

对最后一个等式关于 i 积分，得 $i(t)=6/5+c\mathrm{e}^{-20t}$. $i(0)=0$ 意味着 $0=6/5+c$ 或 $c=-6/5$. 所以响应为 $i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{e}^{-20t}$. ■

由 2.3 节的(4)，可写出(7)的通解：

$$i(t)=\frac{\mathrm{e}^{-(R/L)t}}{L}\int \mathrm{e}^{(R/L)t}E(t)\mathrm{d}t+c\mathrm{e}^{-(R/L)t}. \tag{10}$$

特别地，当 $E(t)=E_0$ 为一个常数时，(10)可写为

$$i(t)=\frac{E_0}{R}+ce^{-(R/L)t}. \tag{11}$$

注意到当$t\to+\infty$时，(11)中的第二项变为0. 这样的项通常称为瞬时项(transient term)；其他的剩余项称为解中的稳定(steady-state)部分. 在此情况下E_0/R也被称为稳定电流(steady-state current)；在大多数情况下电路中的电流简单地可由欧姆定律($E=Ri$)求出.

注 例1中初值问题的解$P(t)=P_0e^{0.4055t}$描述了$t>0$时一个细菌群中细菌的数量. 当然，$P(t)$是一个连续函数，所以可以取到区间$P_0\leqslant P<+\infty$上的任意实数. 进一步，我们不能期望细菌数的增长也如同我们预期的那样是连续的，即每秒、每微秒等都会有增长. 其实可能在某个时间区间$[t_1, t_2]$内数量完全没有增长. 所以图3.7(a)中的图像对P的描述也许比指数函数更贴近实际情况. 用一个连续函数描述一个离散现象通常是为了更方便从而忽略了精度. 然而在有些情况下我们还是可以获得满意的结果，如果我们在显微镜里及时观察，由模型得到的图3.7(b)和(c)与真实系统很贴近，若观察得更细微，则可以得到图3.7(a).

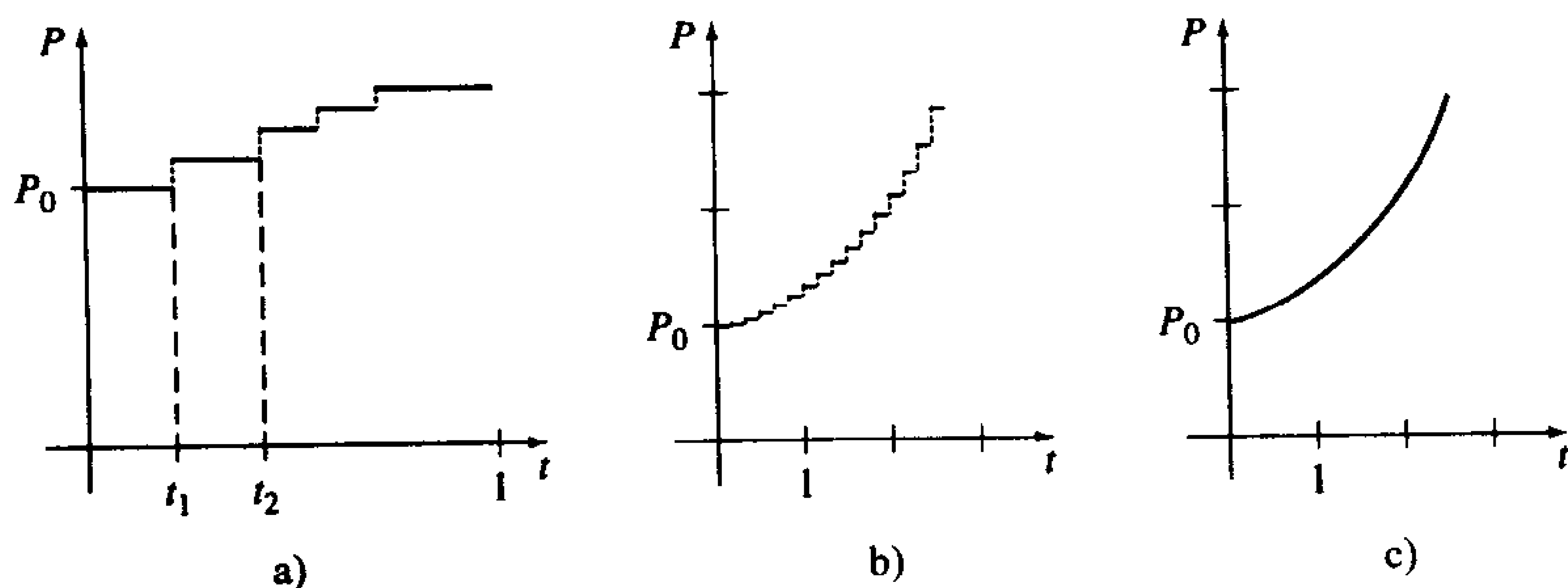


图 3.7

练习 3.1

增长和衰减

1. 已知一个社会人口的增长速率与t时刻成员的数量成正比. 如果人口数量在5年内变为原来的2倍，多长时间后会变为原来的3倍? 4倍?
2. 假设已知习题1中这个社会的人口在3年后为10 000. 那么初始人口数量是多少? 10年后人口会是多少?
3. 一个镇的人口增长速率与t时刻该镇人口的数量成正比. 初始人口为500且在10年内增长了15%. 30年后的人口会是多少?
4. 一个培养皿中的细菌数量的增长速率与t时刻的细菌数量成正比. 在观察了3小时后有400个细菌. 观察了10小时后有2 000个细菌. 初始的细菌数量是多少?
5. 当一个垂直的光波穿越某种透明介质时，其亮度I的衰减速度与$I(t)$成正比，这里t表示介质厚度(单位为ft). 在清澈的海水中，在水下3ft处光波强度变为入射时初始值I_0的25%. 在水下15ft处光波强度变为多少?
6. 当利率为连续复利时，存款的增长速率与t时刻的存款量S成正比，即$dS/dt=rS$，这里r为利率.

   (a)以$5\frac{3}{4}$%的年连续复利存入5 000美元，5年后这笔钱增加为多少?

(b)初始存款在多少年后会变为原来的两倍？

(c)用计算器计算利率为季度复利时的存款 $S=5\,000(1+1/4\ (0.057\,5))^{5(4)}$，并将其与(a)得到的结果进行比较.

7. 放射性同位素铅 Pb-209 的分解速率与 t 时刻该元素的剩余量成正比，其半衰期为 3.3 小时. 如果初始时刻有 1g 铅，那么分解 90%的铅需要多长时间？

8. 初始时刻有 100mg 放射性物质. 6 小时后减少了 30%. 如果其分解速率与 t 时刻该元素的剩余量成正比，求 24 小时后元素的剩余量.

9. 求习题 8 中元素的半衰期.

10. (a)考虑作为某放射性物质分解模型的初值问题 $dA/dt=kA$，$A(0)=A_0$. 证明：一般地，物质的半衰期为 $T=-(\ln^2)/k$.

(b)证明(a)中初值问题的解可以写成 $A(t)=A_0 2^{-t/T}$.

(c)如果某放射性物质的半衰期为(a)中给出的 T，初始数量为 A_0 的该物质多长时间后会减少为 $\frac{1}{8}A_0$？

碳定年

11. 考古学家们利用一些烧过的木头或木炭来确定法国拉斯拉岩洞中史前壁画的年代. 如图 3.8 所示. 如果发现木头中已经有 85.5%的 C-14 分解了，利用例 3 提供的信息确定其大致年代.

12. 都灵寿衣上的背景是一个钉在十字架上的人(如图 3.9 所示)，很多人相信被埋葬的寿衣与拿撒勒的耶稣有关. 1988 年罗马教廷同意对寿衣进行碳定年. 由三个独立的科学实验室得出的结论是寿衣的年龄大约为 660 年.⊖利用这一年龄，确定 1988 年时衣服中 C-14 的剩余量.



图 3.8 拉斯拉岩洞壁画



图 3.9 都灵寿衣

牛顿热力学定律

13. 将一个温度计从温度为 70℉的室内拿到温度为 10℉的室外，30s 后温度计上显示值为 50℉. 当 $t=1$ 时温度计显示值为多少？其显示值降至 15℉需要多长时间？

14. 将一个温度计从室内拿到温度为 5℉的室外. 1min 后温度计显示值为 55℉，5min 后为 30℉. 那么，初始时刻室内温度是多少？

15. 一个初始温度为 20℃的小金属棒掉进一个盛有沸水的容器里. 如果它的温度在 1s 内上升了 2℃，其温度上升至 90℃需要多长时间？上升至 98℃需要多长时间？

⊖ 一些学者不同意所得的结论. 如果想了解更多关于都灵寿衣神秘之处的信息，可以登录网站 http://www.shroud.com/.

16. 将一个初始显示值为70℉的温度计放进一个预先被加热至恒温的烤箱. 透过烤箱的玻璃门，一个观察者记录温度，30s 后温度计显示 110℉，1min 后为 145℉. 烤箱的温度是多少?

混合物

17. 一个容器中盛有 200L 溶液，有 30g 的盐溶于其中. 以 4L/min 的速率向容器中注入浓度为 1g/L 的盐溶液；混合均匀的溶液同时以相同速率被抽出. 求出 t 时刻时容器内剩余的盐 $A(t)$.
18. 假设用纯水注入容器，求解习题 17.
19. 一个大容器里盛有 500gal 纯水. 将浓度为 2lb/gal 的盐溶液以 5gal/min 的速率注入容器. 混合均匀的溶液以同样的速率被抽出. 求出 t 时刻容器中盐的含量 $A(t)$. $t=5$min 时溶液浓度是多少?
20. 假设在第 19 题中溶液被抽出的速率为 10gal/min. 容器什么时候会变空?
21. 一个大容器中盛有含 10lb 盐的 100gal 溶液. 将浓度为 1/2lb/gal 的溶液以 6gal/min 的速率注入容器. 混合均匀的溶液以 4gal/min 的速率被抽出. 求出 30min 后容器中盐的含量.
22. 在例 5 中我们并不知道盛装盐溶液的容器的容量. 假设在讨论中，溶液注入的速率为 3gal/min，而溶液抽出的速率为 2gal/min. 这样，因为容器中的溶液以 1gal/min 的速率增加，任何容积有限的容器最终都将会有溶液溢出. 现假设容器是敞口的，其容积为 400gal.

    (a)溶液什么时候会溢出?

    (b)当溶液溢出时，其中含有多少磅盐?

    (c)假设虽然溶液已经溢出，但溶液仍以 3gal/min 的速率注入并以 2gal/min 的速率抽出. 设计一个方法，求出 $t=150$min 时容器中盐的数量.

    (d)求出当 $t\to+\infty$时容器内盐的数量. 得到的答案和预测的一致吗?

    (e)利用绘图工具绘出 $A(t)$在区间[0, 500)上的图像.

串联电路

23. 将一个 30V 的电源连入一个 LR 串联电路，其中 L 的电感系数为 0.1h，电阻 R 为 50Ω. 如果 $i(0)=0$，求电流 $i(t)$. 确定当 $t\to+\infty$时电流的值.
24. 假设 $E(t)=E_0\sin\omega t$，$i(0)=i_0$，求解方程(7).
25. 将一个 100V 的电源连入一个 RC 串联电路，其中电阻 R 为 200Ω，C 的电容为 10^{-4}f. 如果 $q(0)=0$，求出电容所带电荷 $q(t)$. 求出电流 $i(t)$.
26. 将一个 200V 的电源连入一个 RC 串联电路，其中电阻 R 为 1 000Ω，电容器 C 为 5×10^{-6}f. 如果 $i(0)=0.4$，求出电容所带电荷 $q(t)$. 求出 $t=0.005$s 时电容带电量和电流. 求出 $t\to+\infty$时的电容带电量.
27. 将一个电源

$$E(t)=\begin{cases}120, & 0\leqslant t\leqslant 20\\ 0, & t>20\end{cases}$$

连入一个 LR 串联电路，其中 L 的电感系数为 20h，电阻 R 为 2Ω. 如果 $i(0)=0$，求出电流 $i(t)$.

28. 设 RC 串联电路中有一个可变电阻. 如果 t 时刻时的电阻为 $R=k_1+k_2t$，这里 k_1 和 k_2 为已知正常数，那么(9)可写为

$$(k_1+k_2t)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=E(t).$$

如果 $E(t)=E_0$，$q(0)=q_0$，证明

$$q(t)=E_0C+(q_0-E_0C)\left(\frac{k_1}{k_1+k_2t}\right)^{1/\alpha_2}.$$

各种线性模型

29. 在 1.3 节的(14)中，我们看到落体的速度由一个微分方程决定. 落体受到的空气阻力与其瞬时速度成正比.

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv,$$

这里 $k>0$ 是比例常数，向下为正方向.

(a)给定初始条件 $v(0)=v_0$，求解方程.

(b)利用(a)中的解确定落体的极限速度，即最终速度．我们曾经在练习 2.1 中的习题 25 中看到过如何在不求解微分方程的情况下确定最终速度.

(c)如果落体在距地面上方的 s 点被释放，有关系 $ds/dt=v$，若 $s(0)=0$，求出 s 的一个显式表达式.

30. 设一颗重 16lb 的炮弹垂直地向上射出，如图 3.10 所示，初始速度为 $v_0=300\text{ft/s}$．那么“炮弹能射到多高”取决于我们是否考虑空气阻力的影响.

(a)设不考虑空气阻力．如果正方向为向上，那么上述模型可由 $d^2s/dt^2=-g$ 描述(1.3 中的方程(12))．对这个方程积分可得到速度 $v(t)=-32t+300$，这里 $g=32\text{ft/s}^2$.

(b)利用 $ds/dt=v(t)$ 确定炮弹距地面的高度 $s(t)$．求出炮弹所能到达高度的最大值.

31. 回顾习题 30，这次我们设空气阻力与瞬时速度成正比．这样炮弹所能达到的最大高度肯定比习题 30(b)中得到的小．设比例常数 $k=0.0025$，证明这一结论．[提示：需要对习题 29 中的微分方程做略微的调整.]

32. 一个跳伞运动员体重为 125lb，伞包和其他设备重量为 35lb．在从高度为 15 000ft 的飞机中跳出后，等待 15s 再打开降落伞．设习题 29 的模型中比例常数在自由下落时为 $k=0.5$，在打开降落伞后为 $k=10$．并设他在离开飞机时初速度为 0．在离开飞机 20s 后其速度是多少？他运动了多少距离？请见图 3.11．比较他在离开飞机 20s 后的速度与最终速度．他需要多长时间能够到达地面？[提示：用两个初值问题考虑.]

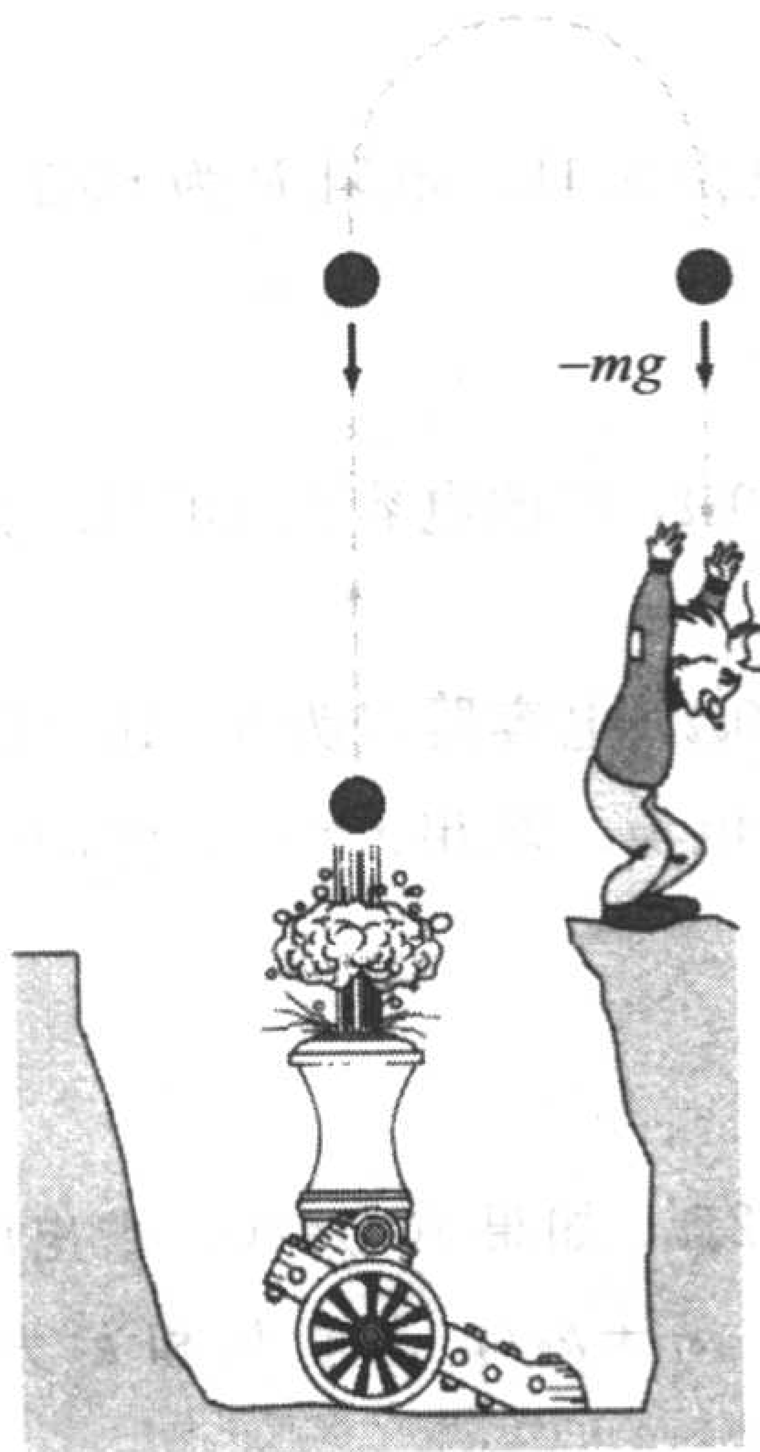


图 3.10



图 3.11

33. 当雨滴坠落的同时也在蒸发，并始终保持球形．假设雨滴蒸发速度与其表面积成正比，忽略空气阻力，那么得到关于雨滴速度 $v(t)$ 的方程

$$\frac{dv}{dt}+\frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t+r_0}v=g.$$

这里 ρ 是水的密度，r_0 是 $t=0$ 时雨滴的半径，$k<0$ 是比例常数，并以向下为正方向.

(a)如果雨滴从静止状态开始下落，求解 $v(t)$.

(b)回顾练习 1.3 中的习题 35，并证明雨滴在 t 时刻的半径 $r(t)=(k/\rho)t+r_0$.

(c)如果 $r_0=0.01\text{ft}$，雨滴从云中落下 10s 后 $r=0.007\text{ft}$，确定什么时候雨滴会完全蒸发掉.

34. 微分方程 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=(k\cos t)P$ 是人口 $P(t)$ 的年度或季度波动数学模型，这里 k 是一个正常数. 求解方程使得 $P(0)=P_0$. 选择不同的 P_0 值，并利用绘图工具绘出其图像.

35. 在一个有关社会人口 $P(t)$ 变化的模型中，假设

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t},$$

其中 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ 分别是出生率和死亡率.

(a)如果 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t=k_1P$，$\mathrm{d}D/\mathrm{d}t=k_2P$，求出 $P(t)$.

(b)分析 $k_1>k_2$，$k_1=k_2$ 及 $k_1<k_2$ 时的情况.

36. 在研究一系列元素受放射能影响而分解时，我们使用以下微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\lambda_1 x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda_1 x-\lambda_2 y,$$

其中 λ_1 和 λ_2 为常数. 在不用其他有关方程组特殊知识的情况下求解这一方程组，使得

$$x(0)=x_0 \text{ 且 } y(0)=y_0.$$

37. 当考虑遗忘因素时，对记忆的描述由

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=k_1(M-A)-k_2A,$$

描述，其中 $k_1>0$，$k_2>0$，$A(t)$ 是 t 时刻记住的量，M 是需要记住的总量. $M-A$ 是剩余需要记忆的量. (请参考练习 1.3 中的习题 23 和 24.)

(a)因为微分方程是自治的，利用 2.1 节中相图的概念找出当 $t\to+\infty$ 时 $A(t)$ 的极限值. 解释得到的结果.

(b)求解 $A(t)$，使得 $A(0)=0$. 绘出 $A(t)$ 的图像并证明在(a)中所做的预测.

38. 一种药物在血液中散开的速率由 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=r-kx$ 决定，其中 r 和 k 是正常数. 函数 $x(t)$ 表示 t 时刻药物在血液中的浓度.

(a)因为微分方程是自治的，利用 2.1 节中相图的概念找出当 $t\to+\infty$ 时 $x(t)$ 的极限值.

(b)求解微分方程使得 $x(0)=0$，绘出 $x(t)$ 的图像并证明在(a)中所做的预测. 什么时候浓度会达到极限值的一半?

讨论题

39. 假设一个验尸员到达凶杀现场时测得尸体温度为 82 ℉. 如果利用牛顿热力学定律(2)确定被害人死亡的大致时间，还需要知道什么数据.

40. 琼斯先生在早餐桌上同时放了两杯咖啡并且立即在自己的那杯中加了一些奶油，这些奶油放在一个容器中，并在桌上放了很长时间. 在他喝第一口之前看了 5min 早报. 琼斯夫人在 5min 后到桌子前面坐下，在她的咖啡里也加了些奶油，然后喝了一口. 假设琼斯先生和琼斯夫人加了等量的奶油，讨论谁喝的咖啡更热. 用可靠的数学方法说明所得结论.

41. 在习题 29 的落体模型中，有几种办法来确定比例常数 k 的值. 讨论如何设计一个简单的物理实验及相关的代数方程来确定 k.

计算机实验作业

42. 众所周知在习题 30 的模型中如果忽略空气阻力(习题 30 中的(a)),那么炮弹从发射到到达最高点的时间 t_a与其从最高点落到地面所需的时间 t_d是相等的. 进一步,其落地的速度 v_i的大小等于其初速度 v_0. 证明这些结论. 然后利用习题 31 中考虑空气阻力的模型,比较 t_a与t_d、v_i与v_0的值. 这里应用 CAS(或图像计算器)可能会有帮助.

3.2 非线性方程

现在我们开始求解非线性一阶数学模型. 本节中大多数而不是所有的微分方程都可以通过变量分离法求解. 复习一下 1.3 节和 2.2 节中的非线性模型,如果觉得有必要的话还应该复习一下积分的技巧.

人口动力学 如果 $P(t)$表示 t 时刻的人口数量,那么指数增长模型为 $dP/dt=kP$, $k>0$. 在这个模型中,相对的(relative)或特定的(specific)增长率(growth rate)定义为

$$\frac{dP/dt}{P}, \tag{1}$$

假设它为常数 k. 指数增长在实际中很难遇到,因为人口增长到一定阶段时会受到资源和环境的限制. 所以(1)可以被认为是随着 P 的增长而减少.

人口增长率(或减少率)仅依赖于当时的人口数量而与其他时间的因素(如季节现象)无关(请参考练习 1.3 中的习题 32)的假设可以由

$$\frac{dP/dt}{P}=f(P) \text{ 或 } \frac{dP}{dt}=Pf(P). \tag{2}$$

来描述. 微分方程(2)在动物数量模型的假设中应用广泛,称之为*密度依赖假设*(density-dependent hypothesis).

逻辑斯谛方程 假设一个环境能容纳不多于数量 K 的人口. K 称为这个环境的*承载能力*(carrying capacity). 所以对于(2)中的函数 f,我们有 $f(K)=0$,为简单起见,我们设 $f(0)=r$. 图 3.12 给出了三个符合上述两个条件的函数 f. 我们假设 $f(P)$为最简单的线性函数,即 $f(P)=c_1P+c_2$. 利用 $f(0)=r$ 和 $f(k)=0$,依次可得 $c_2=r$,$c_1=-r/K$,所以 f 有形式 $f(P)=r-(r/K)P$. 方程(2)变为

$$\frac{dP}{dt}=P\left(r-\frac{r}{K}P\right). \tag{3}$$

对常数进行重新定义,非线性方程(3)等价于

$$\frac{dP}{dt}=P(a-bP). \tag{4}$$

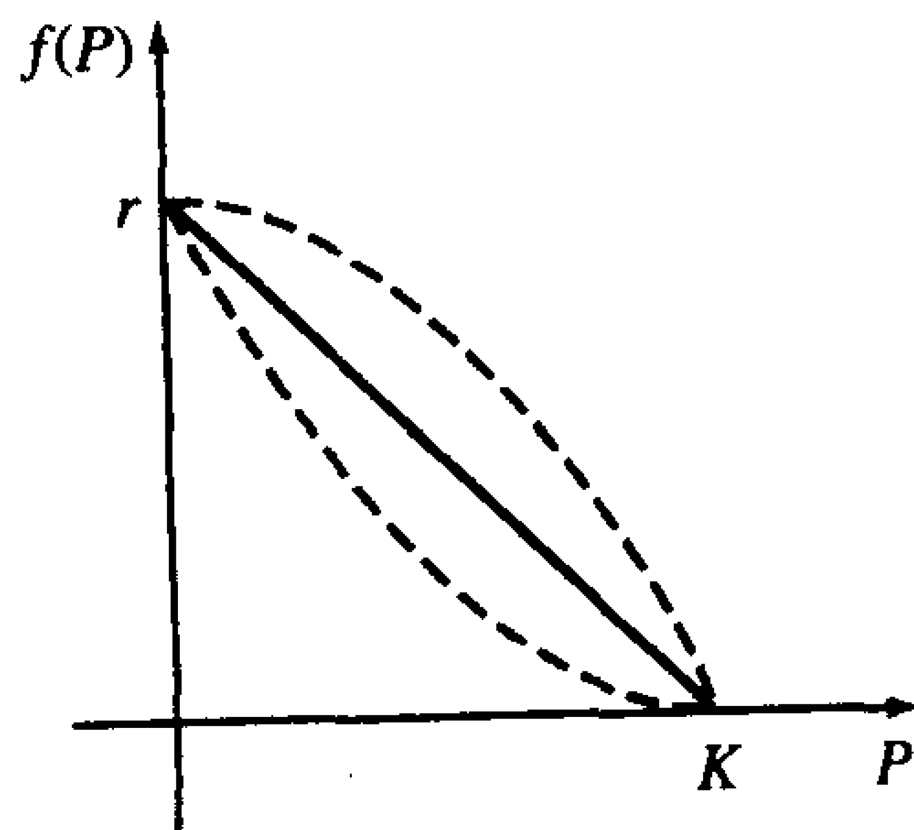


图 3.12

1840 年前后,比利时数学家和生物学家 P. F. Verhulst 利用这一模型预测了一些国家的人口数量. 他的研究中就有(4)式,其中 $a>0$, $b>0$. 方程(4)后来称为*逻辑斯谛方程*(logistic equation). 它的解称为*逻辑斯谛函数*(logistic function). 逻辑斯谛函数的图像称为*逻辑斯谛曲线*(logistic curve).

当人口数量很大或人口过于拥挤时,人口会对环境造成有

害影响，而人对食物、能源的竞争也对人口的增长产生了消极影响，所以微分方程 $dP/dt=kP$ 并不能准确地描述人口模型. 现在我们看到当 $t\to+\infty$时，(4)的解是有界的. 如果我们将(4)改写为 $dP/dt=aP-bP^2$，则非线性项 $-bP^2$，$b>0$ 可被解释为“抑制”或“竞争”项. 在大多数实际应用中，正常数 a 会远大于常数 b.

逻辑斯谛曲线已被证明可以非常准确地预测在有限空间中的增长形式，如细菌、原生动物、水蚤、果蝇等.

逻辑斯谛方程的解 求解(4)的一种方法是分离变量. 将方程 $dP/P(a-bP)=dt$ 的左边分解，然后两边积分得

$$\left(\frac{1/a}{P}+\frac{b/a}{a-bP}\right)dP=dt,$$

$$\frac{1}{a}\ln|P|-\frac{1}{a}\ln|a-bP|=t+c,$$

$$\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|=at+ac,$$

$$\frac{P}{a-bP}=c_1e^{at}.$$

由最后一个等式得

$$P(t)=\frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}}=\frac{ac_1}{bc_1+e^{-at}}.$$

如果 $P(0)=P_0$，$P_0\neq a/b$，我们可以求得 $c_1=P_0/(a-bP_0)$，因此在代换和简化后，解可写为

$$P(t)=\frac{aP_0}{bP_0+(a-bP_0)e^{-at}}. \tag{5}$$

$P(t)$的图像 不用花太多的工夫我们就可以得到逻辑斯谛函数图像的基本形状. 虽然变量 t 常用来表示时间而在应用中我们很少考虑 $t<0$ 的情况，但我们也无妨同样给出 P 在区间 $t<0$ 上的图像. 从(5)中我们可以看到

$$当\ t\to+\infty\ 时, P(t)\to\frac{aP_0}{bP_0}=\frac{a}{b}\ 以及当\ t\to-\infty\ 时, P(t)\to 0.$$

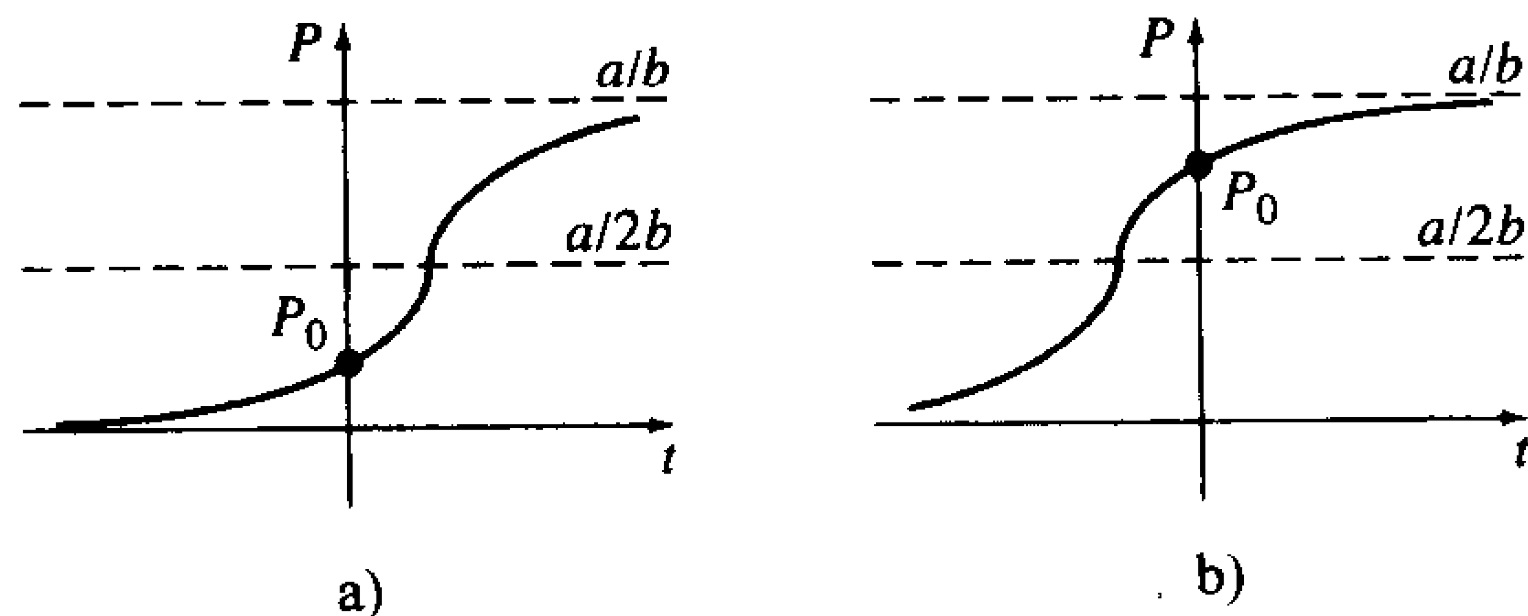


图 3.13

图 3.13 中的虚线 $P=a/2b$ 与逻辑斯谛曲线交于其拐点处，为了证明这一点，我们对(4)式求微分，由乘积规则得：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2}&=P\left(-b\frac{dP}{dt}\right)+(a-bP)\frac{dP}{dt}=\frac{dP}{dt}(a-2bP)\\&=P(a-bP)(a-2bP)\\&=2b^2P\left(P-\frac{a}{b}\right)\left(P-\frac{a}{2b}\right).\end{aligned}$$

由微积分可知，满足 $d^2P/dt^2=0$ 的点可能是拐点，而 $P=0$ 和 $P=a/b$ 显然被排除在外. 所以 $P=a/2b$ 是图像唯一可能改变凹凸性的地方. 当 $0<P<a/2b$ 时有 $P''>0$，当 $a/2b<P<a/b$ 时有 $P''<0$. 所以图像以 $P=a/2b$ 为界，从左到右由上凹变为下凹. 当初值满足 $0<P_0<a/2b$ 时，$P(t)$的图像为 S 形，如图 3.13(a)所示. 当 $a/2b<P_0<a/b$ 时，图像仍为 S 形，但其拐点出现在 t 取负值时，如图 3.13(b)所示.

我们已经在 1.3 节的(5)中见到过方程(4)，其形如 $dx/dt=kx(n+1-x)$，$k>0$. 这个微分方程合理地描述了初始时刻由一个患者将传染病带给一个静态人群的疾病传播模型. 解 $x(t)$ 表示了 t 时刻感染疾病的人数.

例 1　逻辑斯谛增长

假设一个携带流感病毒的学生回到了有 1 000 个学生的孤立校园. 如果假设病毒的传播速度不仅与已感染的人数 x 而且与未感染的人数成正比. 观察发现，4 天后 $x(4)=50$，确定 6 天后感染的人数.

解　假设在疾病的传播过程中没有人离开校园，所以我们要求解初值问题

$$\frac{dx}{dt}=kx(1\,000-x),x(0)=1.$$

可以看出 $a=1\,000k$，$b=k$，则由(5)立即可得

$$x(t)=\frac{1\,000k}{k+999ke^{-1\,000kt}}=\frac{1\,000}{1+999e^{-1\,000kt}}.$$

现在利用 $x(4)=50$，从

$$50=\frac{1\,000}{1+999e^{-4\,000k}}$$

中求出 k，然后有 $-1\,000k=1/4\ \ln(19/999)=-0.990\,6$. 所以

$$x(t)=\frac{1\,000}{1+999e^{-0.990\,6t}}.$$

最后得

$$x(6)=\frac{1\,000}{1+999e^{-5.943\,6}}=276.$$

$x(t)$的其他值在图 3.14(b)的表格中给出. ■

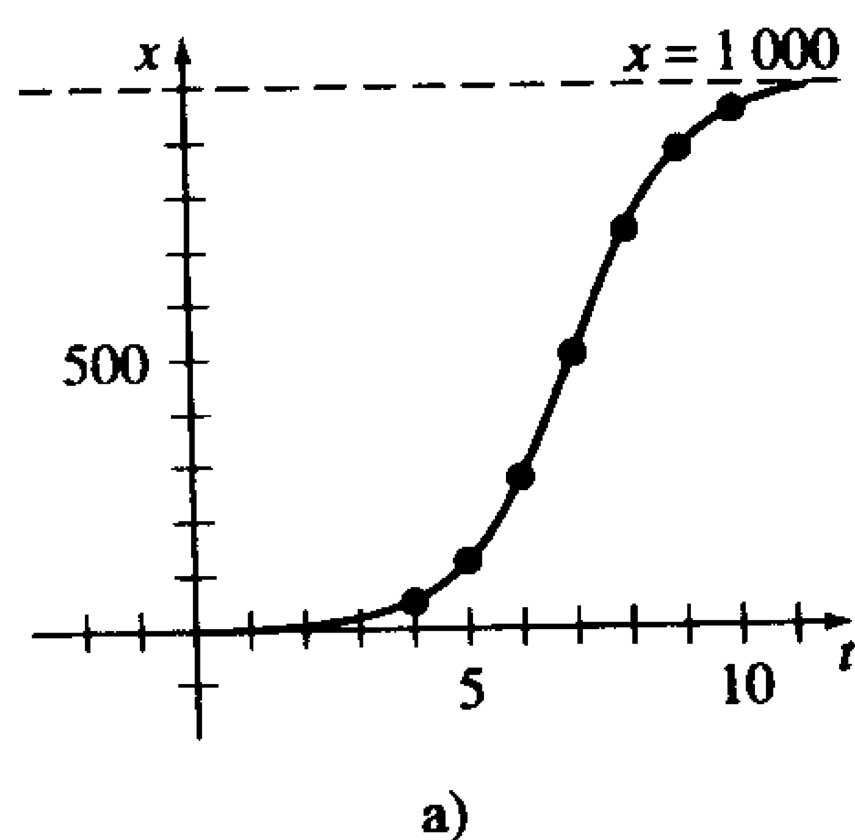
逻辑斯谛方程的变形　逻辑斯谛方程有很多变形. 例如，微分方程

$$\frac{dP}{dt}=P(a-bP)-h\ 和\ \frac{dP}{dt}=P(a-bP)+h \tag{6}$$

可以作为渔业生产中以速率 h 收获(harvested)成熟的鱼或投放(restocked)鱼苗的模型. 当 $h>0$ 为常数时，(6)中的微分方程可以很容易地进行定性分析，或通过变量分离求出解析解. (6)中的方程也可以分别作为因移民出境而人口减少或因移民入境而人口增多的模型. (6)中的速率 h 可以是与时间 t 或与人口(鱼)数量有关的函数；例如，收获可能会在特定的时期进行，以与 t 时刻鱼的数量 P 成正比的速率进行收获. 在后面的例子中，模型将由 $P'=P(a-bP)-cP$，$c>0$ 来描述. 请见本章最后的项目模型. 一个社会的人口移入可能会以以下的方式改变这个社会的人口数量：当社会人口 P 较小时人口移入的影响比较大，而当 P 较大时人口移入的影响比较小；这样一个合理描述社会人口的模型为 $P'=P(a-bP)+ce^{-kP}$，$c>0$，$k>0$. 请参考练习 3.2 中的习题 20. 另一个形如(2)的方程

$$\frac{dP}{dt}=P(a-b\ln P), \tag{7}$$

是逻辑斯谛方程的一个变形，称为*贡珀茨微分方程*(Gompertz differential equation). 这个微分方程可以应用于对人口增长或减少或肿瘤生长的研究，并对适当类型的实际问题做出预测. 请参考练习 3.2 中的习题 5 和 6.



a)

t(天)	x(已感染人数)
4	50(观察后)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

b)

图 3.14

化学反应 假设 ag 化学药品 A 与 bg 化学药品 B 发生化学反应. 如果生成的化合物由 M 份 A 和 N 份 B 形成，而 $X(t)$ 是化合物 C 的克数，则在 t 时刻剩余的 A 和 B 的量分别为

$$a-\frac{M}{M+N}X \text{ 和 } b-\frac{N}{M+N}X.$$

根据物质反应定律，当不考虑温度的变化时，两种物质的反应速度与 t 时刻还未转化的(剩余的) A 和 B 的数量的乘积成正比：

$$\frac{dX}{dt}\propto\left(a-\frac{M}{M+N}X\right)\left(b-\frac{N}{M+N}X\right). \tag{8}$$

如果我们从第一个括号中提出 $M/(M+N)$ 并从第二个括号中提出 $N/(M+N)$，然后引入比例常数 $k>0$，则(8)可变为形式

$$\frac{dX}{dt}=k(\alpha-X)(\beta-X), \tag{9}$$

其中 $\alpha=a(M+N)/M$，$\beta=b(M+N)/N$. 回顾 1.3 节中的(6)式，由非线性微分方程(9)决定的化学反应称为*二阶化学反应*(second-order reaction).

例 2　二阶化学反应

一种化合物 C 由 A 和 B 两种化学药品生成．反应中每消耗 1gA，会同时消耗 4gB，经观察发现 10min 内有 30g 的 C 生成．如果初始时刻有 50g 的 A 和 32g 的 B，反应速率与 A 和 B 的剩余量成正比，确定任意时刻 C 的量．在 15min 后有多少 C 生成？解释当 $t\to+\infty$ 时所得的解．

解　设 $X(t)$ 表示 t 时刻 C 的数量，则有 $X(0)=0$ 及 $X(10)=30$．

如果现在生成 2g 化合物 C，则一定消耗了 agA 和 bgB，所以有 $a+b=2$，$b=4a$．所以我们一定消耗了 $a=2/5=2(1/5)$g 的 A 和 $b=8/5=2(4/5)$g 的 B．通常，对于 Xg 的 C，消耗了

$$X/5\text{g 的 } A \text{ 和 } 4X/5\text{g 的 } B.$$

则此时剩余的 A 和 B 分别为

$$50-X/5 \text{ 和 } 32-4X/5.$$

现在我们知道生成 C 的速率满足

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\propto\left(50-\frac{X}{5}\right)\left(32-\frac{4}{5}X\right).$$

为了简化上式，从第一个括号中提出 1/5 并在第二个括号中提出 4/5，然后引入比例常数得：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=k(250-X)(40-X).$$

由变量分离法和部分分式，我们可以将方程写为

$$-\frac{1/210}{250-X}\mathrm{d}X+\frac{1/210}{40-X}\mathrm{d}X=k\mathrm{d}t.$$

积分得

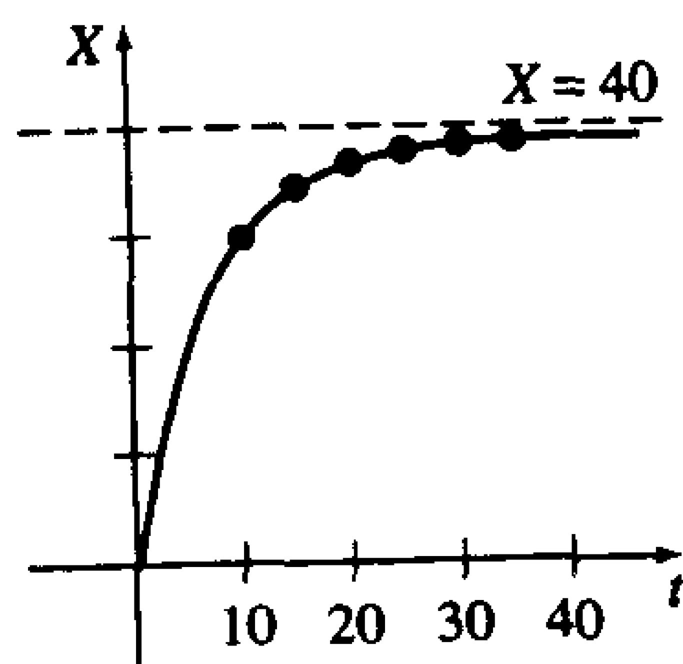
$$\ln\left|\frac{250-X}{40-X}\right|=210kt+c_1 \text{ 或} \frac{250-X}{40-X}=c_2\mathrm{e}^{210kt}. \tag{10}$$

当 $t=0$ 时，$X=0$，由此得 $c_2=25/4$．利用 $t=10$ 时 $X=30$，我们得 $210k=\frac{1}{10}\ln\frac{88}{25}=0.125\,8$．由这些信息，我们可从(10)的后一个等式中解出 X：

$$X(t)=1\,000\,\frac{1-\mathrm{e}^{-0.125\,8t}}{25-4\mathrm{e}^{-0.125\,8t}}. \tag{11}$$

作为时间的函数，X 的性态在图 3.15 中给出．从相应的表格和(11)中也可以清楚地看到当 $t\to+\infty$ 时 $X\to40$．这意味着最后生成了 40g 化合物 C，还剩余

$$50-40\times(1/5)=42\text{g 的 } A \text{ 和 } 32-40\times(4/5)=0\text{g 的 } B.$$



a)

t(min)	X(g)
10	30(测量后)
15	34.78
20	37.25
25	38.54
30	39.22
35	39.59

b)

图　3.15

■

注 不定积分$\int du/(a^2-u^2)$的值可由对数、反双曲正切函数或反双曲余切函数表示. 例如,下面两个结果

$$\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}+c,\ |u|<a \tag{12}$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c,\ |u|\neq a, \tag{13}$$

中的(12)可能在练习 3.2 中的习题 13 和 22 中使用起来比较合适,而(13)更适用于习题 23.

练习 3.2

逻辑斯谛方程

1. 一个国家使用计算机收款系统的超市数量可由以下初值问题来描述:

$$\frac{dN}{dt}=N(1-0.000\,5N),N(0)=1.$$

(a)利用 2.1 节中相图的概念预测经过很长一段时间后超市的数量会达到多少. 徒手绘出所给初值问题的解曲线.


(b)求解初值问题并利用绘图工具证明在(a)中得到的解曲线. 利用新方法确定当 $t=10$ 时超市数量将达到多少?

2. 在一个社区中看到了某一广告的人数 $N(t)$ 由一个逻辑斯谛方程决定,初始时 $N(0)=500$,观察得 $N(1)=1000$. 假设这个社区中看到该广告的人数的极限为 50 000 人,求出 $N(t)$.

3. 某大城市的一个郊区人口 $P(t)$ 的模型由初值条件

$$\frac{dP}{dt}=P(10^{-1}-10^{-7}P),P(0)=5\,000$$

给出,这里 t 按月计算. 人口极限值是多少?人口什么时候达到极限值的一半?

4. (a)表 3.1 给出了 1790 年到 1950 年间美国的人口普查数据. 利用 1790、1850 和 1910 年的数据建立一个逻辑斯谛人口模型.

表 3.1

年	人口(百万)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.433
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.996
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

(b)由(a)中得到的模型预测数据，建立表格并与实际人口做比较．计算表格中列出的每对数据的误差和百分比误差．

逻辑斯谛方程的变形

5. (a)假设贡珀茨微分方程(7)中 $a=b=1$．由于微分方程是自治的，所以利用2.1节中相图的概念在 $P_0>\mathrm{e}$ 和 $0<P_0<\mathrm{e}$ 的情况下可以绘出有代表性的解曲线．

(b)设(7)中 $a=1$，$b=-1$．利用新的相图在 $P_0>\mathrm{e}^{-1}$ 和 $0<P_0<\mathrm{e}^{-1}$ 的情况下绘出有代表性的解曲线．

6. 求出(7)的一个显式解，使得 $P(0)=P_0$．

化学反应

7. 两种化学药品 A 和 B 化合反应生成 C．反应速率与没有转化为 C 的 A 和 B 的数量的乘积成正比．初始时有40g的 A 和50g的 B，每消耗1g的 B，需要消耗2g的 A．观察得5min后有10g的 C 生成．20min后有多少 C 生成？经过很长一段时间后生成 C 的极限数量为多少？此时还有多少 A 和 B 剩余？

8. 如果习题7中的 A 的初始数量换为100g，再求解习题7．问什么时候有一半数量的 C 生成？

各种非线性模型

9. 一个圆柱形容器从其底部的一个圆形小洞向下漏水．如我们在1.3节中的(10)所见，当忽略水通过小洞时的摩擦时，容器中水的高度 h 可由

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

来描述，其中 A_w 和 A_h 分别为水和小洞的横截面积．

(a)如果水的初始高度为 H，求解 $h(t)$．徒手绘出解曲线并用符号 A_w、A_h 和 H 表示出其定义区间 I．这里 $g=32\mathrm{ft/s^2}$．

(b)设容器高度为10ft，底面半径为2ft，小洞半径为1/2in．如果初始时容器是满的，那么它里面的水何时流尽？

10. 当考虑水流通过小洞时的摩擦时，习题9中的模型变为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-c\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

其中 $0<c<1$．如果 $c=0.6$，在习题9的(6)中，容器什么时候会变空？请参考练习1.3中的习题11．

11. 一个顶点朝下的圆锥形容器从其底部的一个圆形小洞向下漏水．

(a)假设容器高为20ft，底面半径为8ft，小洞半径为2in．在练习1.3的习题12中，要证明容器中描述水高度 h 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{5}{6h^{3/2}},$$

在本题的模型中我们考虑水流通过小洞时的摩擦，设 $c=0.6$，$g=32\mathrm{ft/s^2}$．请见图1.26，如果初始时容器是满的，容器变空需要多长时间？

(b)假设容器顶角为60°，圆周半径为2in．求出决定水面高度的微分方程．这里 $c=0.6$，$g=32\mathrm{ft/s^2}$．如果初始时水的高度为9ft，那么容器变空需要多少时间？

12. 假设把习题11(a)中的锥形容器倒过来，如图3.16所示，水从圆锥底面中心一半径为2in的小洞漏出．此时一个盛满水的容器变空的时间与习题11中顶点朝下的情况相同吗？考虑摩擦/收缩系数为 $c=0.6$，$g=32\mathrm{ft/s^2}$．

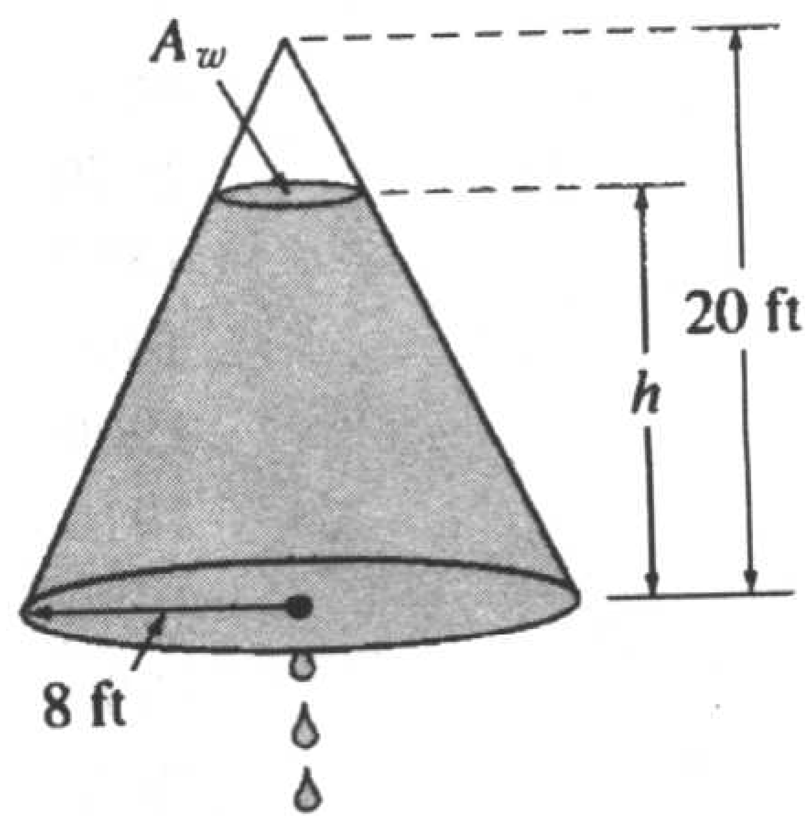


图 3.16

13. 用微分方程表示出质量为 m 的落体速度 v，其受到的空气阻力与瞬时速度的平方成正比，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv^2,$$

其中 $k>0$ 时比例常数，向下为正方向.

(a)所给初值条件为 $v(0)=v_0$，求解方程.

(b)利用(a)中得到的解确定物体的极限或最终速度. 我们曾在练习 2.1 中的习题 25 看到过怎样不求解微分方程而确定最终速度.

(c)如果落体由地面以上 s 米处释放，那么速度为 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=v$，如果 $s(0)=0$，求出 s 的显式表达式.

14. 考虑练习 3.1 习题 30 中重为 16lb 的炮弹，以 300ft/s 的初速度垂直向上射出. 如果空气阻力与瞬时速度的平方成正比，确定炮弹所能到达的最大高度. 假设正方向为竖直向上，$k=0.000\,3$.[提示：需要对习题 13 中的微分方程做略微改动.]

15. (a)求一个质量为 m 的物体在水中下沉的速度 $v(t)$ 的微分方程，其中水的阻力与其瞬时速度的平方成正比，受到向上的浮力大小遵循阿基米德原理. 请参考练习 1.3 中的习题 16. 假设正方向为竖直向下.

(b)求解(a)中得到的微分方程.

(c)确定下沉物体的极限或最终速度.

16. 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

描述了平面上曲线 C 的形状. 这个曲线能将所有射向它的光线反射至一点. 请参考练习 1.3 中的习题 27. 这个方程有几种求解方法.

(a)证明这个微分方程是齐次的(见 2.5 节). 利用代换 $y=ux$ 可得

$$\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(1-\sqrt{1+u^2})}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

利用 CAS 对方程左边积分. 证明曲线 C 是以原点为焦点且关于 y 轴对称的抛物线.

(b)证明(a)中方程可以通过代换 $u=x^2+y^2$ 求解.

17. (a)一个海啸或潮汐的简单模型由

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=W\sqrt{4-2W},$$

描述，其中 $W(x)>0$ 是波浪相对于海面高度的函数. 找出微分方程的所有常数解.

(b)求解(a)中的微分方程. 积分时需要用到 CAS.

(c)利用绘图工具绘出所有满足初值条件 $W(0)=2$ 的解的图像.

18. 在加州，一个作为复活节装饰的室外池塘可以看成一个半球形容器，水从容器底部注入. 假设容器半径$R=10$ft，水注入的速率为 πft^3/min，初始时容器是空的. 见图 3.17. 当容器注水时，水同时也在蒸发. 假设蒸发速率与水的表面积 A 成正比，比例常数 $k=0.01$.

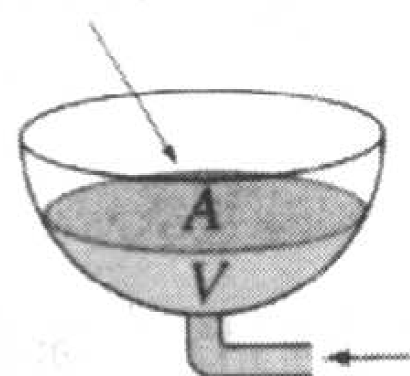
(a)t 时刻水的体积变化率 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 是一个净变化率. 利用这一净变化率确定一个 t 时刻水的高度 h 的微分方程. 图中所示的水的体积 $V=\pi Rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3$，其中 $R=10$. 用 h 表示出水的表面积 $A=\pi r^2$.

(b)求解(a)中得到的微分方程. 绘出解的图像.

(c)如果没有蒸发，那么灌满容器需要多长时间?

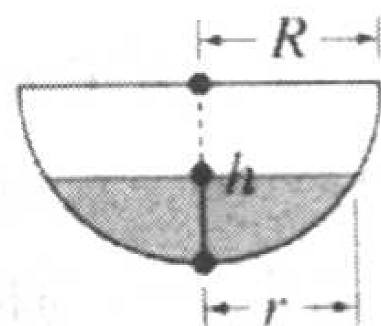
(d)考虑蒸发的情况，那么在(c)所求时刻的水深为多少? 容器会被注满吗? 证明所得结论.

输出：水的蒸发速率
与水的表面积成正比



输入：水注入的速率为π ft³/min

a) 半球形容器



b) 容器的横断面

图 3.17

计算机实验作业

19. 阅读 CAS 中关于散点图(散点绘图)和最小二乘拟合的文件．与给出的数据点拟合最好的那条直线称为回归线(regression line)或最小二乘线(least-square line)．现在需要建立一个关于美国人口的逻辑斯谛模型，定义(2)中的 $f(P)$为一条基于习题 4 表格中人口数据的回归线的方程．一种方法是对(2)中第一个方程的左边作近似，利用差商代替 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$：

$$Q(t)=\frac{1}{P(t)}\frac{P(t+h)-P(t)}{h}.$$

(a)做一个关于 t、$P(t)$和 $Q(t)$的表格，其中 $t=0$，10，20，…，160，$h=10$．例如，表格的第一行应包括 $t=0$，$P(0)$及 $Q(0)$．由 $P(0)=3.929$ 及 $P(10)=5.308$，可得

$$Q(0)=\frac{1}{P(0)}\frac{P(10)-P(0)}{10}=0.035.$$

注意到 $Q(160)$依赖于 1960 年的人口普查数据 $P(170)$．查找出这个值．

(b)利用 CAS 绘出由(a)得到的数据($P(t)$，$Q(t)$)的散点图．再利用 CAS 找到其回归线的方程并在散点图中添加这条回归线的图像．

(c)建立一个逻辑斯谛模型 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=Pf(p)$，这里 $f(p)$是(b)中得到的回归线的方程．

(d)利用初值条件 $P(0)=3.929$ 求解(c)中的模型．

(e)使用 CAS 绘出另一个散点图，这次采用由(a)所获表格中的数据 (t，$P(t)$)．利用 CAS 在散点图中添加(d)中得到的图像．

(f)查找 1970、1980 和 1990 年美国的人口普查数据．由(c)中的逻辑斯谛模型预测的这几年的人口是多少？模型预测当 $t\to+\infty$时美国人口 $P(t)$为多少？

20. (a)在 2.1 节的例 3 和例 4 中，我们看到(4)的任何解 $P(t)$在 $P_0>a/b$ 和 $0<P_0<a/b$ 时都有渐近行为，即当 $t\to+\infty$时 $P(t)\to a/b$；这样，均衡解 $P=a/b$ 被称为一个吸引子．利用 CAS(或图像计算器)的求根程序近似求出移民入境模型 $P'=P(1-P)+0.3\mathrm{e}^{-P}$的均衡解．

(b)利用绘图工具绘出函数 $F(P)=P(1-P)+0.3\mathrm{e}^{-P}$的图像．解释怎样利用这个图像来判断(a)中得到的数字是否是一个吸引子．

(c)用数值求解程序把初值问题

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(1-P),P(0)=P_0$$

的解曲线，其中 $P_0=0.2$，$P_0=1.2$，和初值问题

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(1-P)+0.3\mathrm{e}^{-P},P(0)=P_0$$

的解曲线，其中 $P_0=0.2$ 及 $P_0=1.2$ 加以比较. 在同一坐标系内绘出所有解曲线，如果可能的话，用另一种颜色绘出第二个初值问题的解曲线. 在很长一段时间后，移民入境模型预测的人口百分比增加为多少？与逻辑斯谛模型做比较.

21. 在习题 14 中，设 t_a 为炮弹达到最高点所需的时间，t_d 为炮弹从最高点落到地面的时间. 比较 t_a 与 t_d 的值和落地速度 V_i 与初始速度 V_0 的值. 请参考练习 3.1 中的习题 42. CAS(或图像计算器)中的求根程序可能会有帮助. [提示：利用习题 13 中的炮弹下落模型.]

22. 一个跳伞运动员装备了秒表和高度计. 如图 3.18 所示，他在跳出飞机 25s 后打开伞包，飞机高度为 20 000ft 而他打开伞包的高度为 14 800ft. 假设空气阻力与瞬时速度的平方成正比，他离开飞机时的初速度为 0，$g=32\text{ft/s}^2$.

    (a)求出由飞机上测量的跳伞运动员在 t 时间内自由下落的函数 $s(t)$. [提示：习题 13 中的比例常数 k 并设有具体给出. 利用习题 13 中(b)中获得的最终速度 v_t 在初值问题中消去 k. 然后最终求出 v_t.]

    (b)当 $t=15\text{s}$ 时跳伞运动员下落距离为多少？速度为多少？

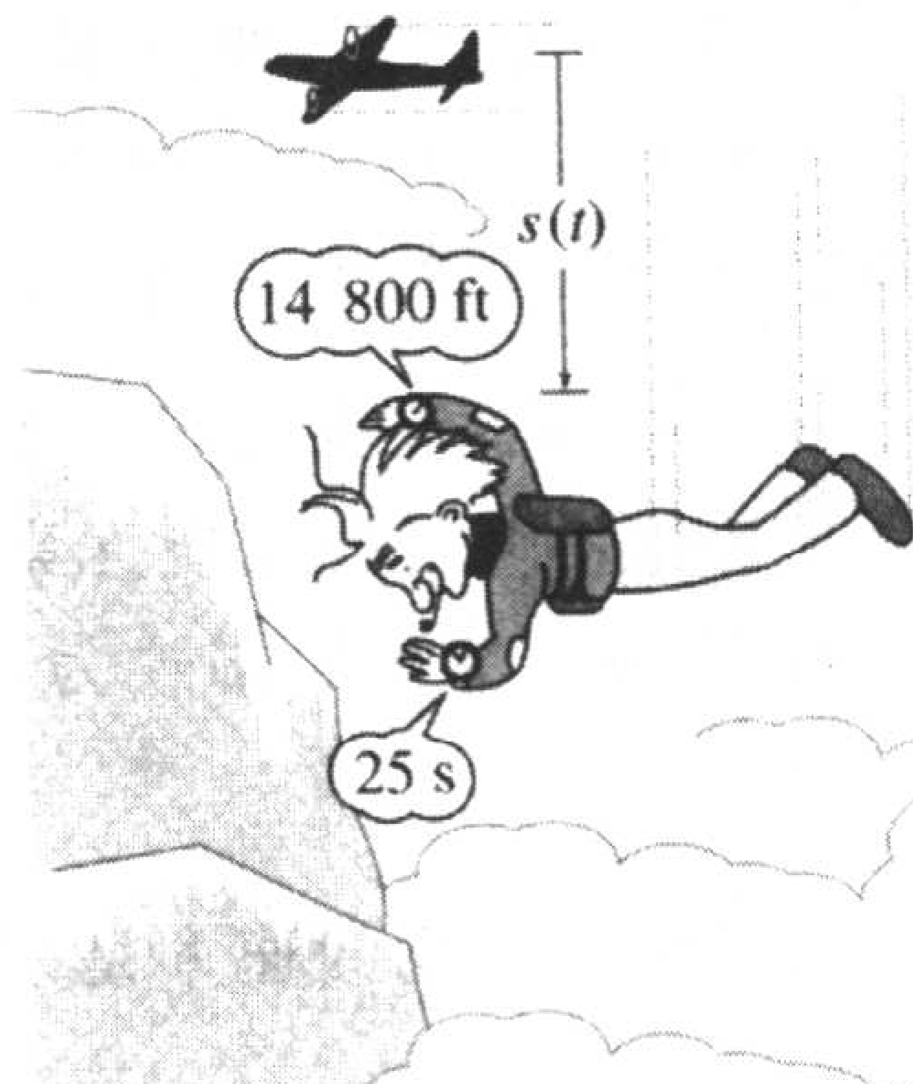


图 3.18

23. 一架直升飞机在一个巨大的敞口容器上方 500ft 盘旋，容器内装满了液体(不是水). 一个密度很大的物体从直升飞机上坠入(从静止状态被释放)液体. 假设物体在空气中受到的阻力与其速度 v 成正比，其在液体中受到的粘滞阻力与 v^2 成正比. 在空气中 $k=1/4$ 而在液体中 $k=0.1$. 假设正方向为竖直向下. 如果容器高度为 75ft，确定物体触到容器底部所需的时间以及触底时的速度. [提示：考虑两个不同的初值问题，并且不要害怕繁琐的计算. 如果要用到(13)，在去掉绝对值符号时要特别注意. 比较物体撞到液面时的速度(即第二个问题的初始速度)与物体在液体中下沉时的最终速度 v_t.]

3.3 线性微分方程组和非线性微分方程组

在本节中我们将以前两节的内容为基础讨论一些数学模型. 与 1.3 节类似，我们只讨论如何利用一阶微分方程组建立模型，而并不研究求解这些方程组的方法. 这是因为：第一，我们现在还没掌握求解方程组的必要工具. 第二，我们讨论的其中一些方程组无法利用初等函数求解. 我们将在第 8 章学习解线性一阶方程组的方法并在第 4 章和第 7 章学习解线性高阶微分方程组的方法.

线性/非线性方程组 到目前为止，我们所考虑的模型只涉及了单个微分方程. 一个微分方程可以描述一个环境里的人口数量；但如果两个相互影响，也许是存在竞争关系的物种生活在同一环境里(例如，兔子和狐狸)，则关于它们数量的模型就是由两个一阶微分方程构成的方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g_1(t,\ x,\ y),\qquad\qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g_2(t,\ x,\ y).$$

其中 g_1 和 g_2 对于变量 x 和 y 是线性的，即 g_1 和 g_2 形如

$$g_1(t,x,y) = c_1x + c_2y + f_1(t) \text{ 和 } g_2(t,x,y) = c_3x + c_4y + f_2(t),$$

这里系数 C_i 可以依赖于 t，则(1)被称为线性方程组(linear system)，不是线性的方程构成的方程组称为非线性的(nonlinear).

放射系 在 1.3 节和 3.1 节对放射性衰变的讨论中，我们假设 t 时刻的衰变速率与当时剩余的核子数量 $A(t)$ 成正比. 当一种物质在放射能的影响下衰变时，往往不能一步转变成一种稳定的物质；而是第一种物质衰变为另一种放射性物质，然后由第二种物质衰变成第三种，等等. 这样直到达到一种稳定元素为止的过程称为放射性衰变系(radioactive decay series). 例如，铀的衰变系是 U-238→Th-234→…→Pb-206，这里 Pb-206 是一种稳定的铅的同位素. 放射系中各种元素的半衰期从几十亿年(U-238 的是 4.5×10^9 年)到几分之一秒不等. 一个放射系可由示意图表述为 $X \xrightarrow{-\lambda_1} Y \xrightarrow{-\lambda_2} Z$，其中 $k_1=-\lambda_1<0$ 和 $k_2=-\lambda_2<0$ 分别为物质 X 和 Y 的变量常数，Z 为一种稳定元素. 设 $x(t)$、$y(t)$ 和 $z(t)$ 分别表示 t 时刻的物质 X、Y 和 Z 的量，则元素 X 的衰变可以描述为

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x,$$

而第二种元素的衰变速率是净速率：

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

这是由于 Y 从 X 的衰变中获得原子而在自身的衰变过程中又要消耗原子. 因为 Z 是一种稳定的元素，所以它可由元素 Y 的衰变获得原子：

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

也就是说，一个由三种元素构成的放射性衰变系的模型是由三个一阶微分方程构成的线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda_1 x, \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_1 x - \lambda_2 y, \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda_2 y. \end{aligned} \tag{2}$$

混合物 考虑图 3.19 所示的两个容器. 设容器 A 中装有溶解了 25lb 盐的 50gal 溶液，容器 B 中装有 50gal 纯水. 液体如图所示地注入和抽出；在两容器之间交换的混合物，以及从 B 中抽出的液体均是均匀混合的. 我们要建立一个数学模型来分别描述 t 时刻容器 A 和 B 中盐的含量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$.

做类似于 1.3 节中"混合物问题"和 3.1 节中例 5 的分析，可知容器 A 中 $x_1(t)$ 的交换速率为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \overbrace{(3\text{gal/min})\cdot(0\text{lb/gal}) + (1\text{gal/min})\cdot\left(\frac{x_2}{50}\text{lb/gal}\right)}^{\text{盐的倒入速率}} - \overbrace{(4\text{gal/min})\cdot\left(\frac{x_1}{50}\text{lb/gal}\right)}^{\text{盐的倒出速率}} \\ &= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2\,. \end{aligned}$$

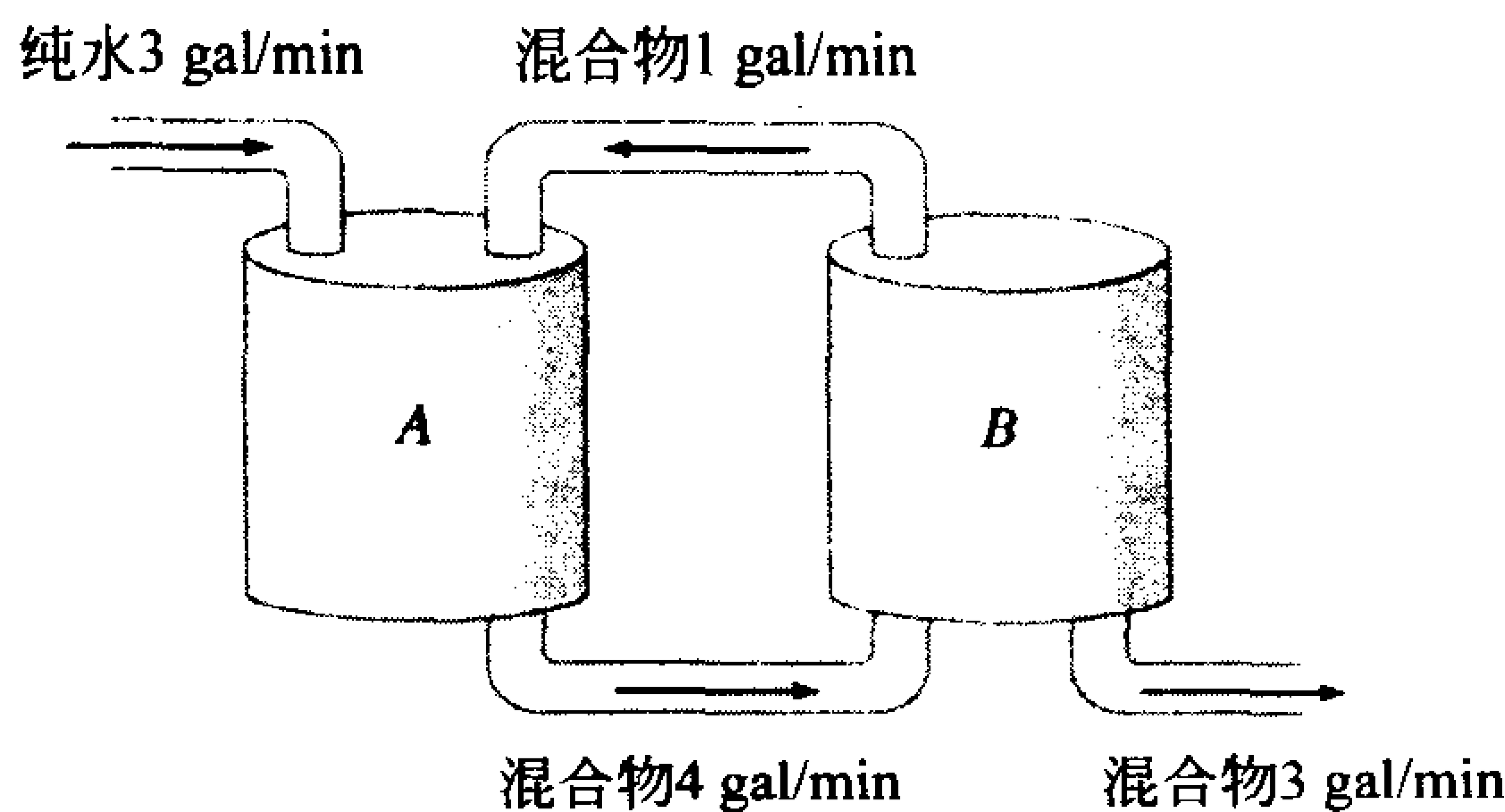


图 3.19

类似地，容器 B 中 $x_2(t)$ 的交换速率为

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=4\cdot\frac{x_1}{50}-3\cdot\frac{x_2}{50}-1\cdot\frac{x_2}{50}$$
$$=\frac{2}{25}x_1-\frac{2}{25}x_2.$$

这样我们得到线性方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=-\frac{2}{25}x_1+\frac{1}{50}x_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{25}x_1-\frac{2}{25}x_2.\end{aligned}\qquad(3)$$

观察可知，上述方程组满足初值条件 $x_1(0)=25$，$x_2(0)=0$.

捕食-被捕食模型 假设两种不同的动物生活在同一环境或生态系统中，并假设第一种动物只吃植物而第二种动物只吃第一种动物. 也就是说，一种动物是捕食者而另一种动物是被捕食者. 例如，狼捕食食草的驯鹿，鲨鱼吞食小鱼，雪枭捕食一种叫做旅鼠的北极啮齿动物. 在我们的讨论中，把捕食者想象成狐狸而把被捕食者想象成兔子.

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 t 时刻狐狸和兔子的数量. 如果没有兔子，可以预见狐狸的数量将因为缺少充足的食物供应而减少，用方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ax,\quad a>0\qquad(4)$$

来描述，当兔子存在于这一环境中时，两种动物在每一单位时间内的数量与它们的数量 x 和 y 成正比，也就是说与它们数量的乘积 xy 成正比. 当兔子存在时，对狐狸来说有食物供应，所以狐狸以 bxy，$b>0$ 的速率增加. 将这一速率添加到狐狸数量的模型(4)中得到：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ax+bxy.\qquad(5)$$

另一方面，如果没有狐狸存在，兔子的数量将在没有食物供应限制的假设下增长，其增长速率与 t 时刻兔子的数量成正比：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=dy,\quad d>0,\qquad(6)$$

但当狐狸存在时，由模型(6)得到的兔子数量将以 cxy，$c>0$ 的速率减少，即兔子将以此速率

被狐狸捕食.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=dy-cxy. \tag{7}$$

方程(5)和(7)构成了一个非线性微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-ax+bxy=x(-a+by)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=dy-cxy=y(d-cx)\end{aligned}, \tag{8}$$

其中 a，b，c，及 d 都是正常数．这个著名的方程组就是 Lotka-Volterra 捕食-被捕食模型(L-V-predator-prey model).

除了两组常数解 $x(t)=0$，$y(t)=0$ 及 $x(t)=d/c$，$y(t)=a/b$ 外，非线性方程组(8)不能利用初等函数求解．然而我们能够对这样的方程组进行定量和定性分析．请见第 9 章微分方程数值解和第 10 章平面自治方程组及稳定性.㊀

例 1　捕食-被捕食模型

假设

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-0.16x+0.08xy,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4.5y-0.9xy$$

表示一个捕食-被捕食模型．因为我们讨论的是动物的数量，所以有 $x(t)\geqslant 0$，$y(t)\geqslant 0$. 图 3.20 是通过数值求解程序绘出的在同一坐标系内典型的捕食者和被捕食者曲线．我们使用的初始条件为 $x(0)=4$，$y(0)=4$. 上面的曲线代表的是捕食者(狐狸)数量的 $x(t)$ 曲线，而下面的曲线代表的是被捕食者(兔子)数量 $y(t)$ 的曲线．观察发现，模型所预测的两种动物的数量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 随时间周期性地变化．这和我们的直觉一致，因为随着被捕食者数量的减少，捕食者的数量最终也会因为食物供应的短缺而减少，而捕食者数量的减少又会导致被捕食者数量的增加；这样，捕食者的数量又会增加，再次导致被捕食者的数量减少. ■

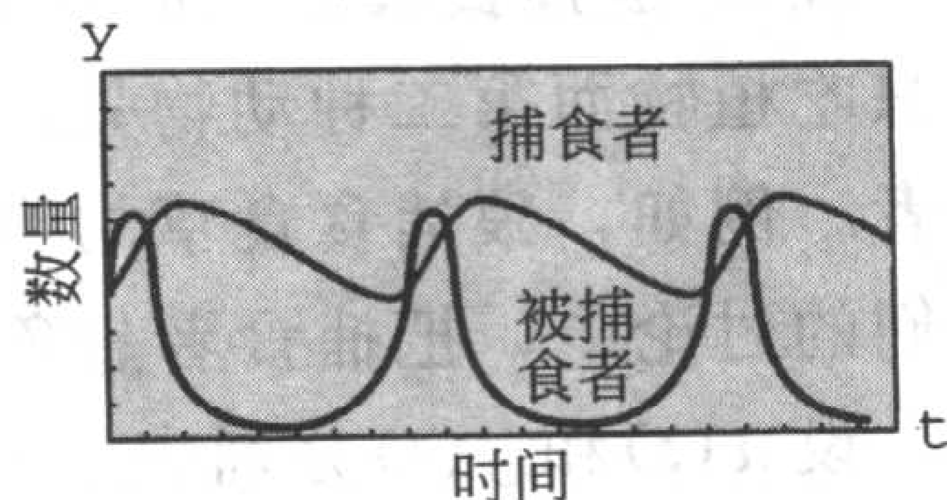


图 3.20

竞争模型　现假设两种动物生活在同一生态系统中，它们并不是捕食者和被捕食者，但会在同一系统中竞争相同的资源(例如食物和生存空间)．如果没有另一种动物存在，我们假设它们数量的增长速率分别为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cy. \tag{9}$$

因为两种动物在竞争，所以假设每种动物数量的增长速率都受到另一种动物数量的影响而减缓．这样，两种动物数量的模型由以下线性方程组给出：

㊀ 第 10～15 章是本教材的扩展部分.

$$\frac{dx}{dt} = ax - by,$$
$$\frac{dy}{dt} = cy - dx, \tag{10}$$

其中 a，b，c 和 d 为正常数.

另一方面，像在(5)中所做的假设一样，(9)中增长速率的减少与两种相互影响的物种数量成正比：

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy,$$
$$\frac{dy}{dt}=cy-dxy. \tag{11}$$

上述非线性方程组与 Lotka-Volterra 捕食-被捕食模型模型类似. 最后，与现实更接近的做法是将(9)中以指数方式增长的速率替换为以逻辑斯谛方式增长的速率(这样，在很长一段时间以后，动物的数量是有界的)：

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 x^2 \text{ 以及} \frac{dy}{dt} = a_2 y - b_2 y^2. \tag{12}$$

当这一新速率以一个与两种动物相互作用数量成正比的速率递减时，我们得到另一个非线性模型

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy = x(a_1 - b_1 x - c_1 y),$$
$$\frac{dy}{dt} = a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy = y(a_2 - b_2 y - c_2 x), \tag{13}$$

其中所有的系数均为正. 线性方程组(10)和非线性方程组(11)、(13)称为**竞争模型**(competition model).

电路 一个包含多个回路的电路网络可以用微分方程来描述. 如图 3.21 所示，电流 $i_1(t)$ 在图示的 B_1 点分开，则 B_1 被称为电路中的一个结点. 由基尔霍夫第一定律有

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \tag{14}$$

此外，我们在每个回路中应用**基尔霍夫第二定律**(Kirchhoff's second law). 在回路 $A_1B_1B_2A_2A_1$ 中，对各部分的电压求和得

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2. \tag{15}$$

类似地，在回路 $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ 中，我们有

$$E(t) = i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}. \tag{16}$$

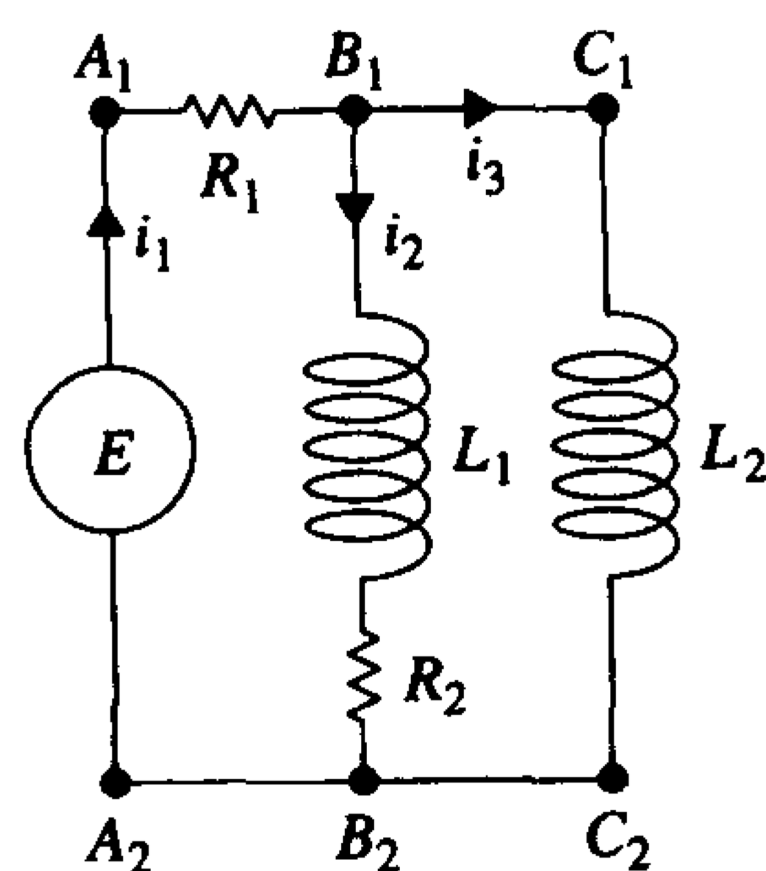


图 3.21

利用(14)消去(15)和(16)中的 i_1，得到两个关于电流 $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 的线性一阶方程：

$$L_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t),$$
$$L_2 \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + R_1 i_2 + R_1 i_3 = E(t). \tag{17}$$

证明可以用如下方程组描述如图 3.22 所示电路中的电流，这个电路中含有一个电阻、一个电感线圈和一个电容.

$$L \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + Ri_2 = E(t),$$
$$RC \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 - i_1 = 0. \tag{18}$$

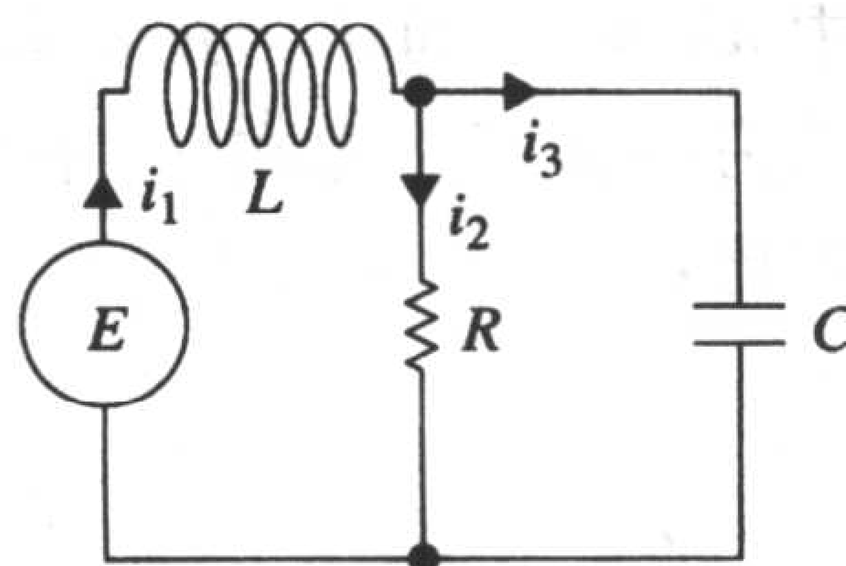


图 3.22

练习 3.3

放射系

1. 我们还没有讨论如何求解一阶微分方程组. 然而求解形如(2)的方程组只需要知道如何求解单个线性一阶方程. 根据初值条件 $x(0)=x_0$，$y(0)=0$，$z(0)=0$ 求出(2)的解.
2. 在习题 1 中，假设时间以天计算，衰减常数 $k_1=-0.138\,629$，$k_2=-0.004\,951$，$x_0=20$. 利用绘图工具在同一坐标系内绘出解 $x(t)$、$y(t)$及 $z(t)$的图像. 利用图像近似求出 X 和 Y 的半衰期.
3. 利用习题 2 得到的图像近似求出当 $x(t)$和 $y(t)$相等的时间，$x(t)$和 $z(t)$相等的时间，及 $y(t)$和 $z(t)$相等的时间. 为什么求得的 $y(t)$和 $z(t)$相等的时间与我们所预测的一致?
4. 建立一个包含 W、X、Y 及 Z 四种元素的放射系模型，其中 Z 为一种稳定元素.

混合物

5. 考虑 A 和 B 两个容器，液体以相同的速率注入和抽出，如方程组(3)所描述. 如果以浓度为 2lb/gal 的盐溶液代替注入容器 A 的纯水，那么相应的微分方程组是什么?
6. 利用图 3.23 给出的信息建立一个关于 t 时刻时容器 A、B 和 C 中盐的含量 $x_1(t)$、$x_2(t)$及 $x_3(t)$的数学模型.

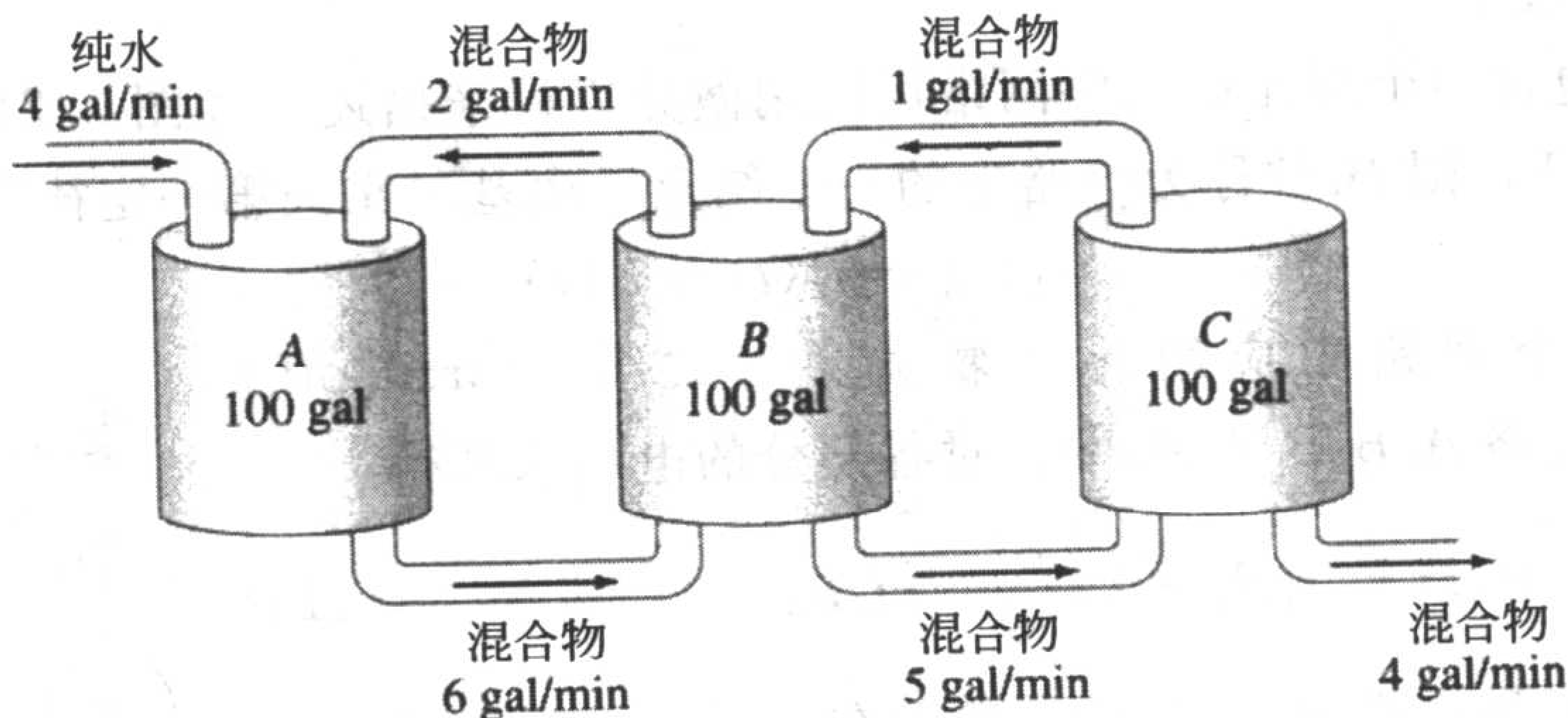


图 3.23

7. 两个大容器的 A 和 B 装有 100gal 盐溶液. 初始时 A 中溶解了 100lb 盐，B 中溶解了 50lb 盐. 系统是封闭的，并且在两容器间流动的溶液是均匀混合的，如图 3.24 所示.
   (a)利用图中给出的信息建立一个关于 t 时刻容器 A 和 B 中盐的含量 $x_1(t)$、$x_2(t)$和 $x_3(t)$的数学模型.
   (b)找出 t 时刻 $x_1(t)$与 $x_2(t)$之间的关系. 解释为什么这一关系与我们所预测的一致. 利用这一关系求

出当 $t=30\text{min}$ 时容器 B 中盐的含量.

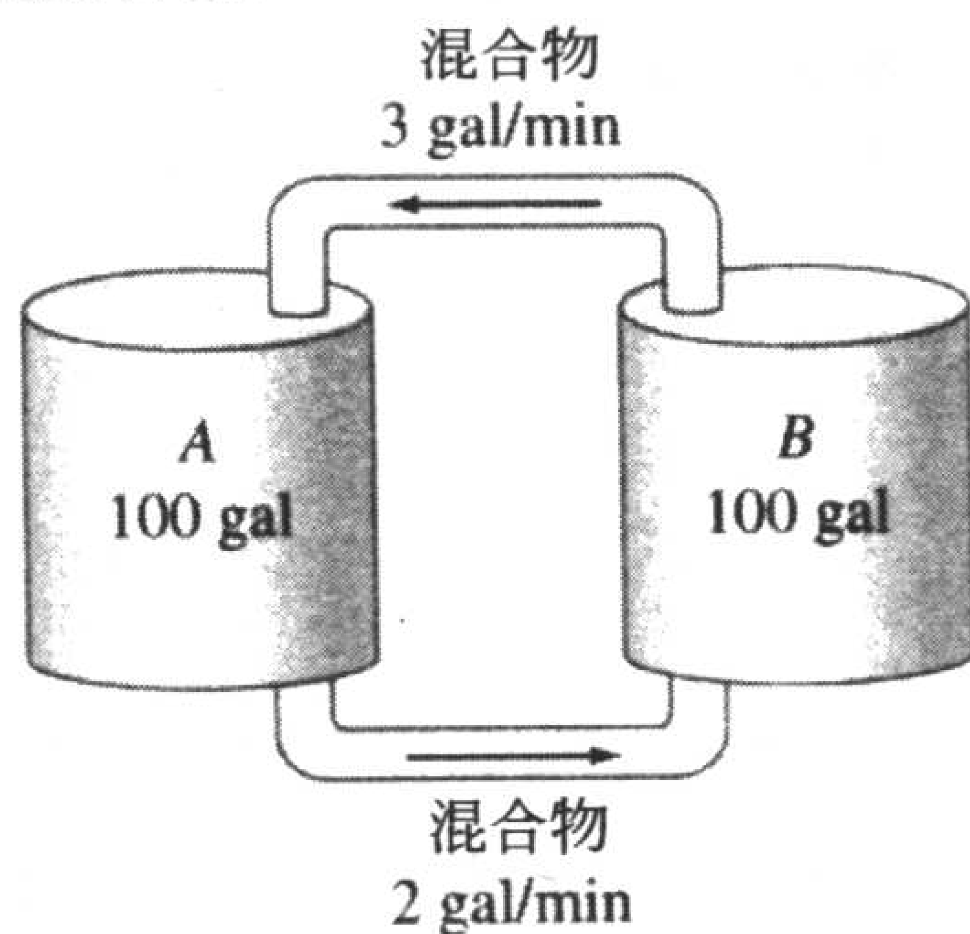


图 3.24

8. 三个含有盐溶液的大容器，如图 3.25 所示. 利用图中给出的信息建立一个关于 t 时刻容器 A、B、C 中盐的含量 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 及 $x_3(t)$ 的数学模型. 不求解方程组，预测当 $t\to+\infty$ 时 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 及 $x_3(t)$ 的极限值.

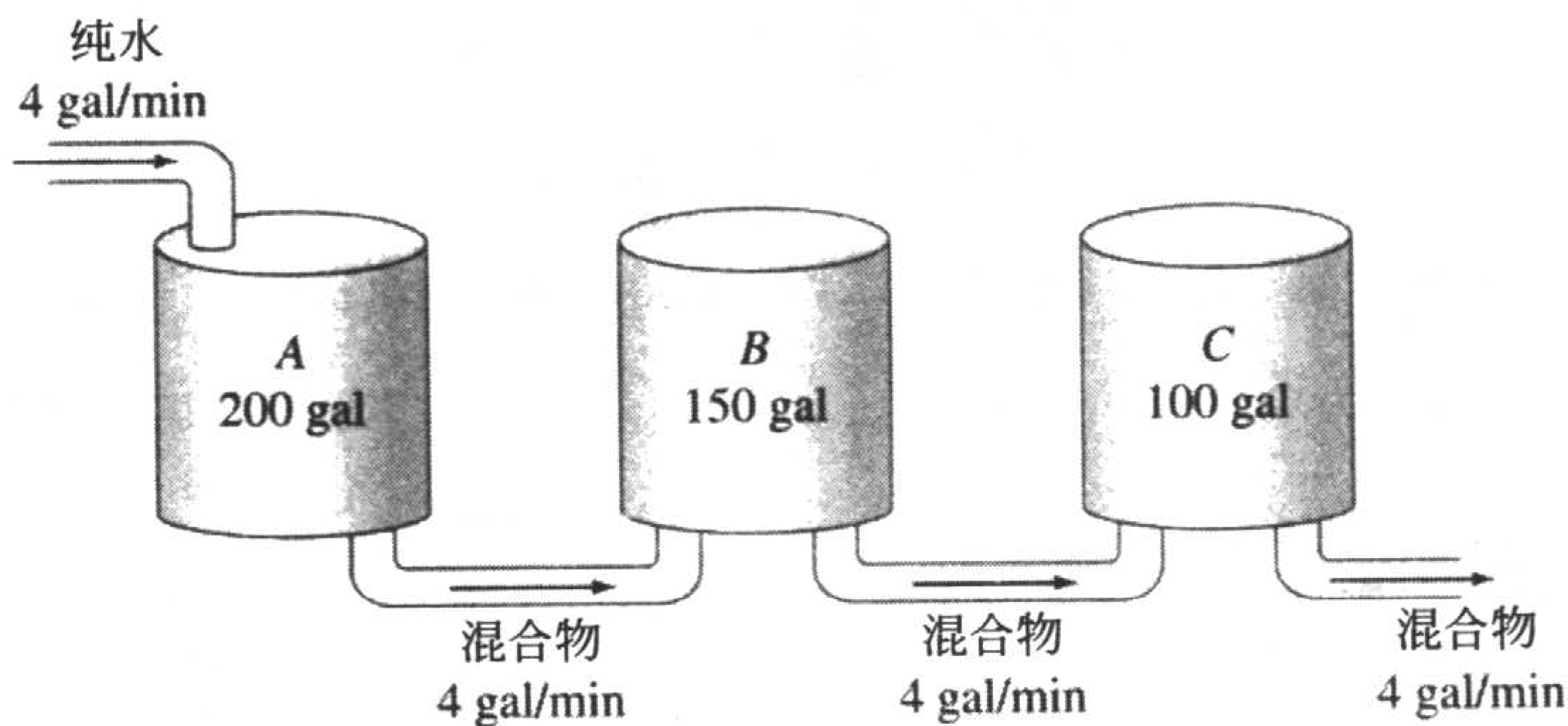


图 3.25

捕食-被捕食模型

9. 考虑由

$$\frac{dx}{dt}=-0.1x+0.02xy,$$

$$\frac{dy}{dt}=0.2y-0.025xy$$

定义的 Lotka-Volterra 捕食-被捕食模型，其中 $x(t)$(捕食者)和 $y(t)$(被捕食者)以千为单位. 设 $x(0)=6$，$y(0)=6$. 利用数值解法绘出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像. 利用图像近似地找到 $t>0$ 时两种动物数量第一次相等的时间. 利用图像近似求出每种动物数量的变化周期.

竞争模型

10. 考虑由

$$\frac{dx}{dt}=x(2-0.4x-0.3y),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(1-0.1y-0.3x)$$

定义的竞争模型，其中 $x(t)$和 $y(t)$以千为单位，t 以年计．根据以下所给的初始条件，利用数值求解程序分析经过很长一段时间后两种动物的数量．

(a)$x(0)=1.5$，$y(0)=3.5$　　(b)$x(0)=1$，$y(0)=1$

(c)$x(0)=2$，$y(0)=7$　　(d)$x(0)=4.5$，$y(0)=0.5$

11. 考虑由

$$\frac{dx}{dt}=x(1-0.1x-0.05y),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(1.7-0.1y-0.15x)$$

所定义的竞争模型，其中 $x(t)$和 $y(t)$以千为单位，t 以年计．根据以下所给的初始条件，利用数值求解程序分析经过很长一段时间后两种动物的数量．

(a)$x(0)=1$，$y(0)=1$　　(b)$x(0)=4$，$y(0)=10$

(c)$x(0)=9$，$y(0)=4$　　(d)$x(0)=5.5$，$y(0)=3.5$

电路

12. 证明描述图 3.26 所示电路网络图中的电流 $i_2(t)$和 $i_3(t)$的微分方程为

$$L\frac{di_2}{dt}+L\frac{di_3}{dt}+R_1i_2=E(t),$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt}+R_2\frac{di_3}{dt}+\frac{1}{C}i_3=0.$$

13. 确定一个一阶微分方程组，用来描述图 3.27 所示电路网络中的电流 $i_2(t)$和 $i_3(t)$.

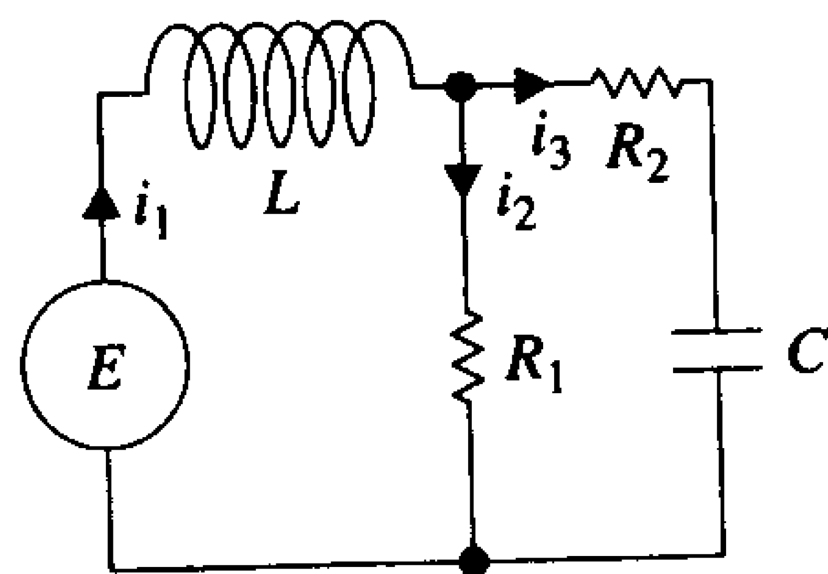


图 3.26

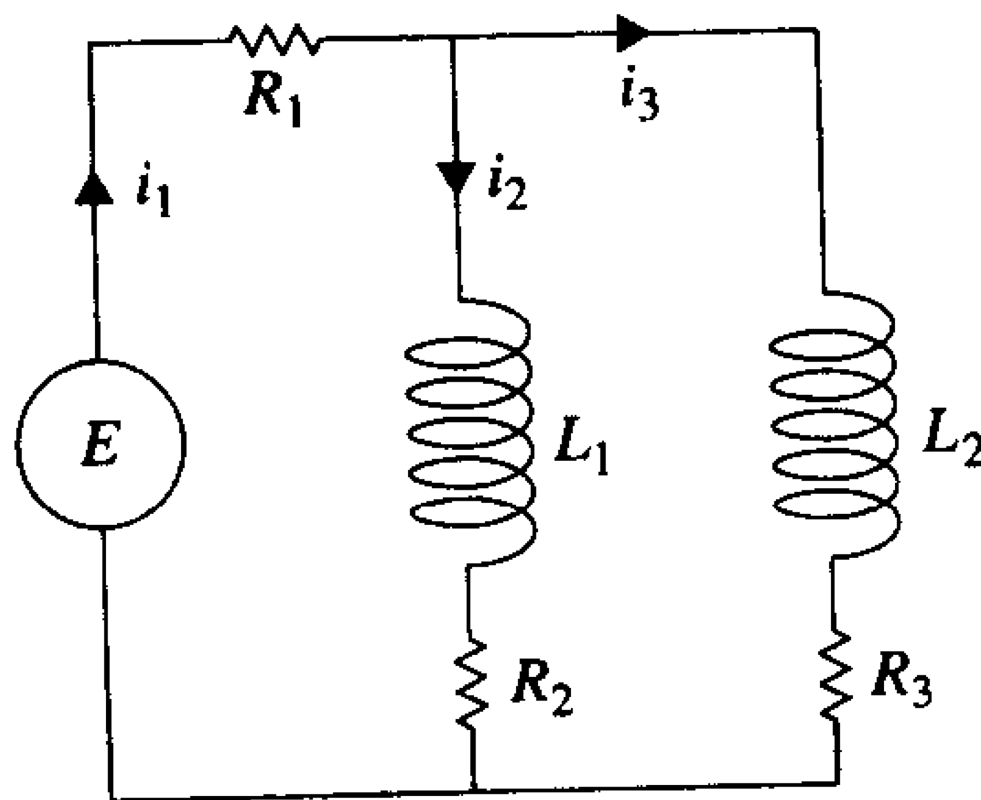


图 3.27

14. 证明由(18)给出的线性方程组描述了图 3.22 所示电路网络中的电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$．[提示：$dq/dt=i_3$.]

各种模型

15. 一种传染病在 n 个人的小群体中通过患者与易感人群的接触传播．假设每个人都是易感染的且传播过程中没有人离开这个群体．在 t 时刻，设 $s(t)$、$i(t)$及 $r(t)$分别表示群体中(以百为单位)易感染但还未被感染的人数、已经感染的人数以及感染后治愈的人数．解释为什么用以下微分方程组描述这一模型是合理的：

$$\frac{ds}{dt}=-k_1si,$$

$$\frac{di}{dt}=-k_2i+k_1si,$$

$$\frac{dr}{dt}=k_2i,$$

其中 k_1(被称为传染速率)和 k_2(治愈速率)为正常数. 这一模型被称为 SIR 模型(SIR model). 给出方程组可能的初值条件.

16. (a)解释为什么在习题 15 中只分析

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-k_1 si,$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-k_2 i+k_1 si$$

就足够了.



(b)假设 $k_1=0.2$, $k_2=0.7$, $n=10$. 选择不同的 $i(0)=i_0$, $0<i_0<10$. 在 $s_0>k_2/k_1$ 及 $s_0\leqslant k_2/k_1$ 两种情况下利用数值求解程序确定模型预测疾病的传播情况. 估计最终被传染的人数.

讨论题

17. 假设如图 3.28 所示的隔间 A 和 B 被一个可渗透的薄膜分开, A 和 B 中盛有溶液. 此图代表了一个细胞的内部和外部. 再假设细胞生长所需的营养物质可以穿过细胞膜, t 时刻 A 和 B 中营养液的浓度 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的模型由线性微分方程组

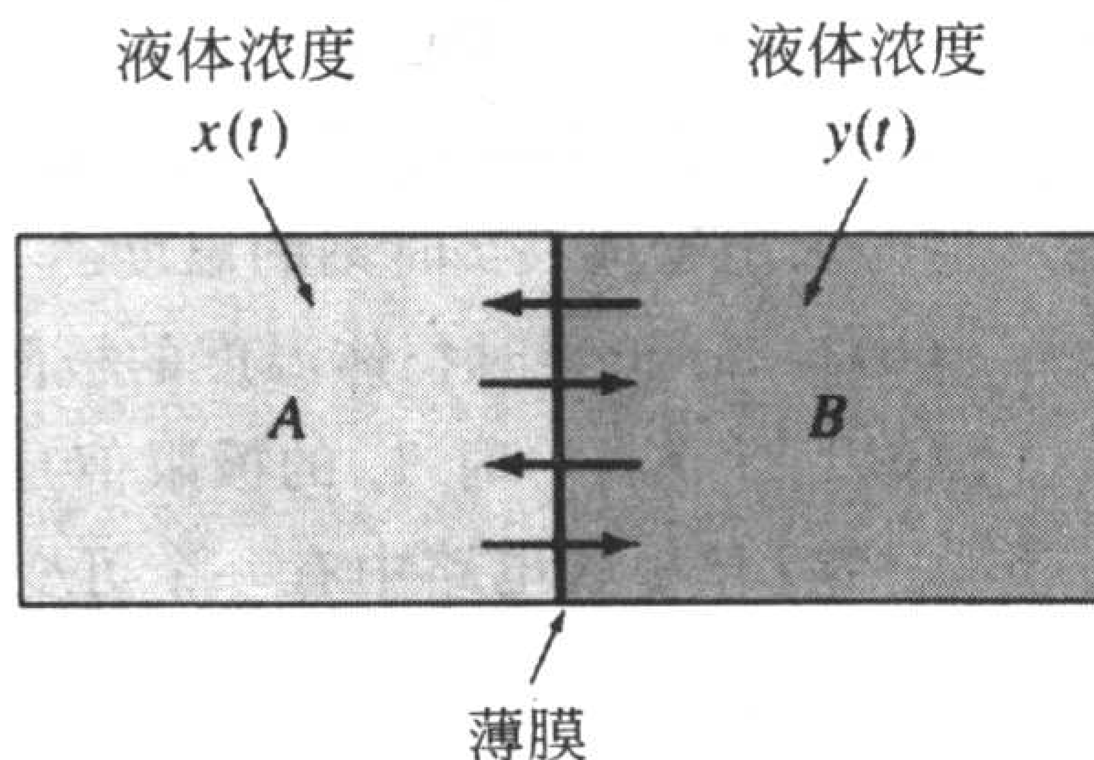


图 3.28

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\kappa}{V_A}(y-x),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\kappa}{V_B}(x-y)$$

给出. 其中 V_A 和 V_B 为隔间的体积, $k>0$ 为一个渗透因子. 设 $x(0)=x_0$ 和 $y(0)=y_0$ 表示初始时营养液的浓度. 根据给定的方程组和假设 $x_0>y_0>0$, 在同一坐标系内绘出方程组的解曲线. 解释理由. 讨论经过很长一段时间后解的性质.

18. 和(2)中的方程组一样, 习题 17 中的方程组也可以用我们现有的知识求解. 解出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 并与在习题 17 中猜测的图像做比较. [提示: 对两个方程做差并设 $z(t)=x(t)-y(t)$.]确定当 $t\to+\infty$ 时 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的极限值. 解释为什么得出的答案和我们所预测的一致.

19. 根据图 3.19 对混合物问题的描述, 讨论函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的性质. 再经过很长一段时间后两个函数的表现如何? 绘出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 可能的图像. 根据初值条件 $x_1(0)=25$, $x_2(0)=0$ 利用数值求解程序得到(3)的解曲线, 检验所得的推测.

第 3 章复习题

1. 1976 年 3 月, 世界人口达到了 40 亿. 当时一本很受欢迎的新闻杂志预测人口将以每年 1.8% 的速度增长, 在 45 年后将达到 80 亿. 把这一结果和传统的模型做比较, 传统的模型认为增长速率与任意时刻的人口数量成正比.

2. 含有 0.06% 二氧化碳的空气被注入一个容积为 8 000ft^3 的房间. 空气以 2 000ft^3/min 的速度注入并以相同的速率抽出. 如果初始时房间内二氧化碳浓度为 0.2%, 确定此后任意时刻房内二氧化碳的浓度. 10min 后浓度为多少? 在稳定状态(或均衡)时, 二氧化碳浓度为多少?

3. 一个如图 3.29 所示的心脏起搏器, 由一个电压恒为 E_0 的电池、一个电容和一个植入心脏的电阻构成. 在长度为 t_1 的时间区间 $0\leqslant t<t_1$ 内, 开关 S 在 P 位置, 并且电容正在充电. t_1 时刻开关移至 Q 位置; 电容在长度为 t_2 的时间

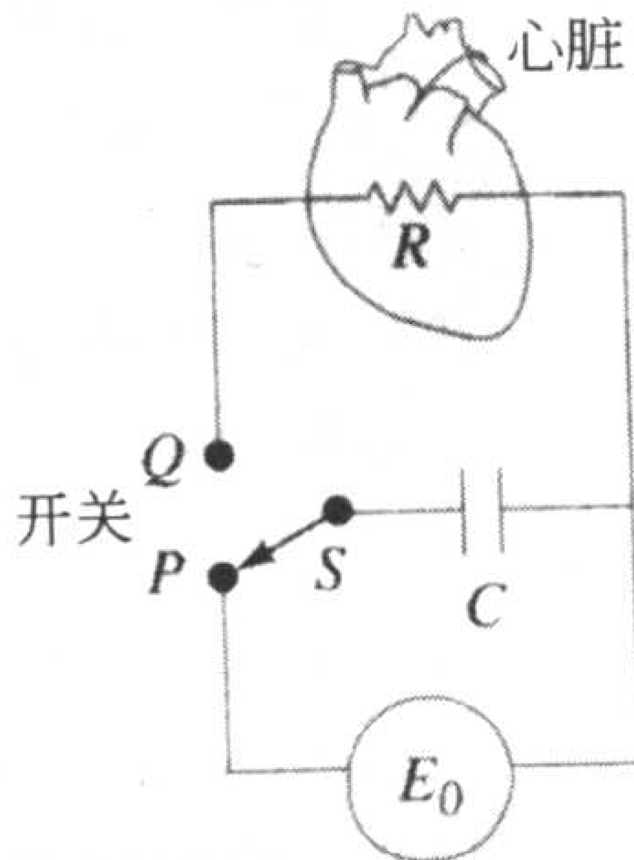


图 3.29

区间 $t_1 \leqslant t < t_1 + t_2$ 内放电．在两个区间内心脏获得的电压可由分段定义的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<t_1\\ -\dfrac{1}{RC}E, & t_1\leqslant t<t_1+t_2\end{cases}$$

描述．相同时间长度的充放电过程可以无限次重复．

(a)假设 $t_1=4\mathrm{s}$，$t_2=2\mathrm{s}$，$E_0=12\mathrm{V}$．在区间 $0\leqslant t\leqslant 18$ 内求解 $E(t)$．

(b)为了便于绘图，设 $R=C=1$．在区间 $0\leqslant t\leqslant 18$ 内绘出在(a)中得到的解的图像．

4. 假设将一个细胞浸入浓度为常数 C_s 的溶液．并设细胞保持体积 V，细胞膜表面积为常数 A．根据菲克原理，细胞内溶质质量 m 的变化速率与表面积 A 和差值 $C_s-C(t)$ 成正比，这里 $C(t)$ 为 t 时刻细胞内溶液的浓度．如果 $m=VC(t)$，$C(0)=C_0$，求出 $C(t)$．请参考图 3.30．

5. 考虑牛顿热力学定律 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t=k(T-T_m)$，$k<0$，其中物体周围媒质温度 T_m 随时间而变化．假设初始时一个物体温度为 T_1，周围媒质温度为 T_2，$T_m=T_2+B(T_1-T)$，其中 $B>0$ 是常数．

(a)求出物体在 t 时刻的温度．

(b)当 $t\to+\infty$ 时物体温度的极限值是多少？

(c)当 $T\to+\infty$ 时 T_m 的极限值是多少？

6. 一个 LR 串联电路中有一个可变电容，其电容值被定义为

$$L=\begin{cases}1-\dfrac{t}{10}, & 0\leqslant t<10\\ 0, & t\geqslant 10.\end{cases}$$

如果电阻为 0.2Ω，电压 $E(t)=4$，$i(0)=0$，求出电流 $i(t)$ 并绘出 $i(t)$ 的图像．

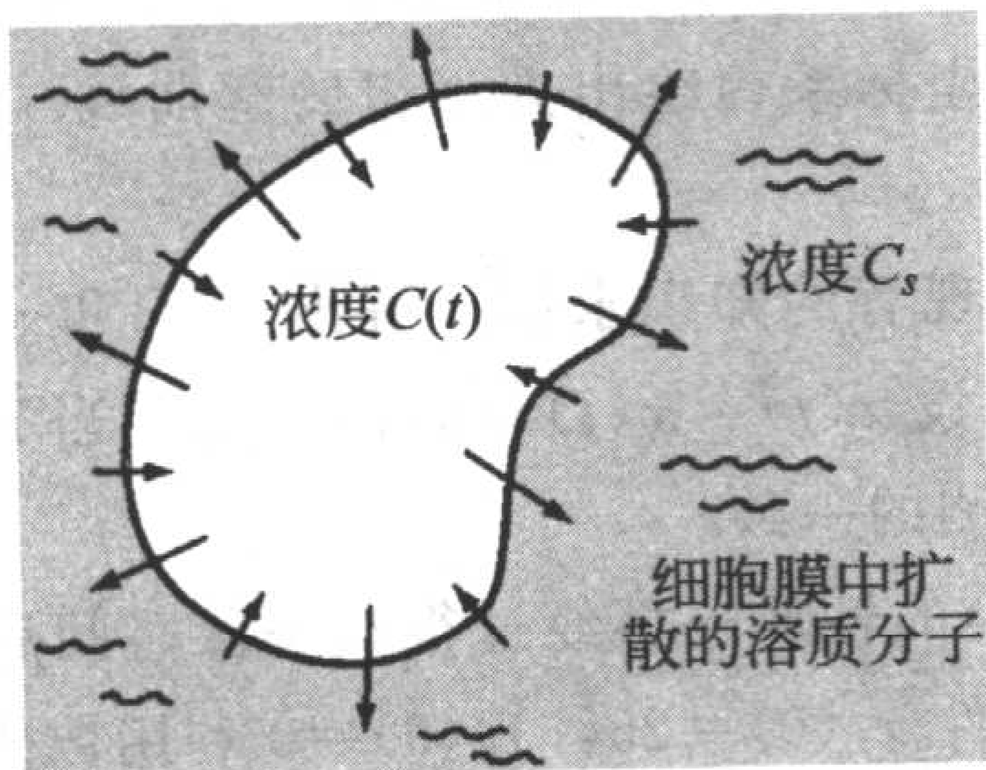


图　3.30

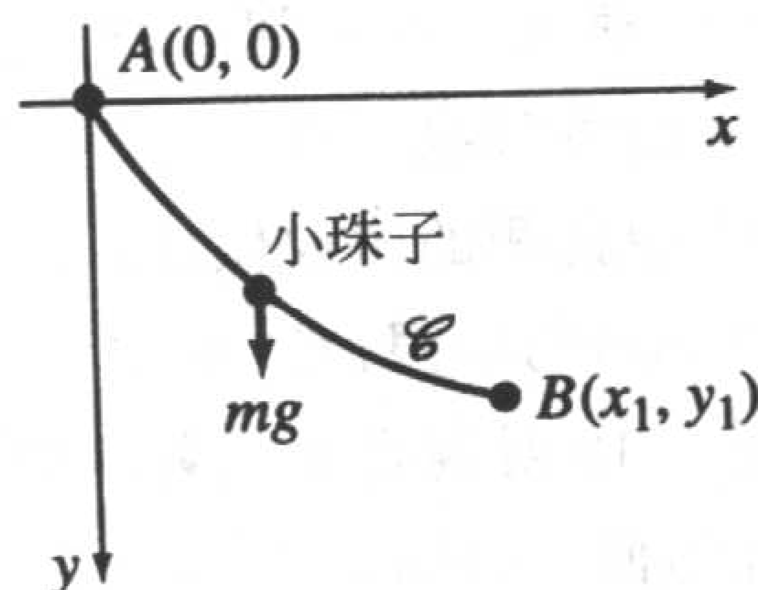


图　3.31

7. 微积分学中有一个经典的问题就是找出一条曲线 $\mathscr{C}$ 的形状使得一个小珠子在重力作用下以最短的时间从点 $A(0, 0)$ 滑到点 $B(x_1, y_1)$，见图 3.31．可以得到关于曲线形状的一个非线性微分方程 $y[1+(y')^2]=k$，这里 k 是一个常数．首先用 y 和 $\mathrm{d}y$ 解出 $\mathrm{d}x$，然后利用代换 $y=k\sin^2\theta$ 求出参数形式的解．可以看到曲线 $\mathscr{C}$ 是一条圆滚线．

8. 如果一个曲线族 $G(x, y, c_1)=0$ 中所有曲线与另一个曲线族 $H(x, y, c_2)=0$ 中的所有曲线垂直相交，则曲线族互为对方的正交轨线(orthogonal trajectory)，请见图 3.32．如果 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x, y)$ 是一个微分方程族，那么这个微分方程组的正交轨线对应微分方程族 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-1/f(x, y)$．

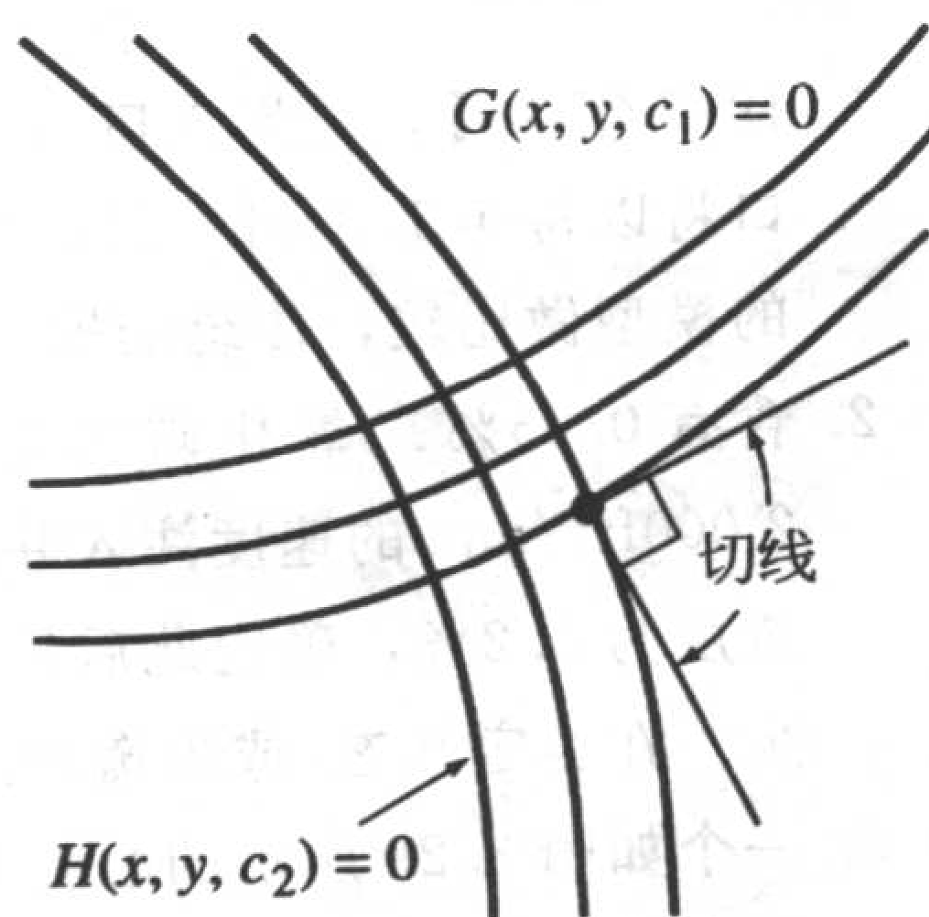


图　3.32

(a)求出关于曲线族 $y=-x-1+c_1e^x$ 的微分方程，并找出这一曲线族的正交轨线.



(b)求出曲线族 $y=1/(x+c_1)$ 的正交轨迹. 利用绘图工具在同一坐标系下绘出两个曲线族的图像.

9. 两种动物的数量由以下非线性一阶微分方程组描述：

$$\frac{dx}{dt}=k_1x(\alpha-x),$$

$$\frac{dy}{dt}=k_2xy.$$

求解 x 和 y，用 t 表示它们.

10. 初始时，两个大容器 A 和 B 分别装有 100gal 盐溶液. 混合均匀的溶液在两容器之间交换，如图 3.33 所示. 利用图中给出的信息，建立一个关于 t 时刻时容器 A 和 B 内盐的含量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的数学模型.

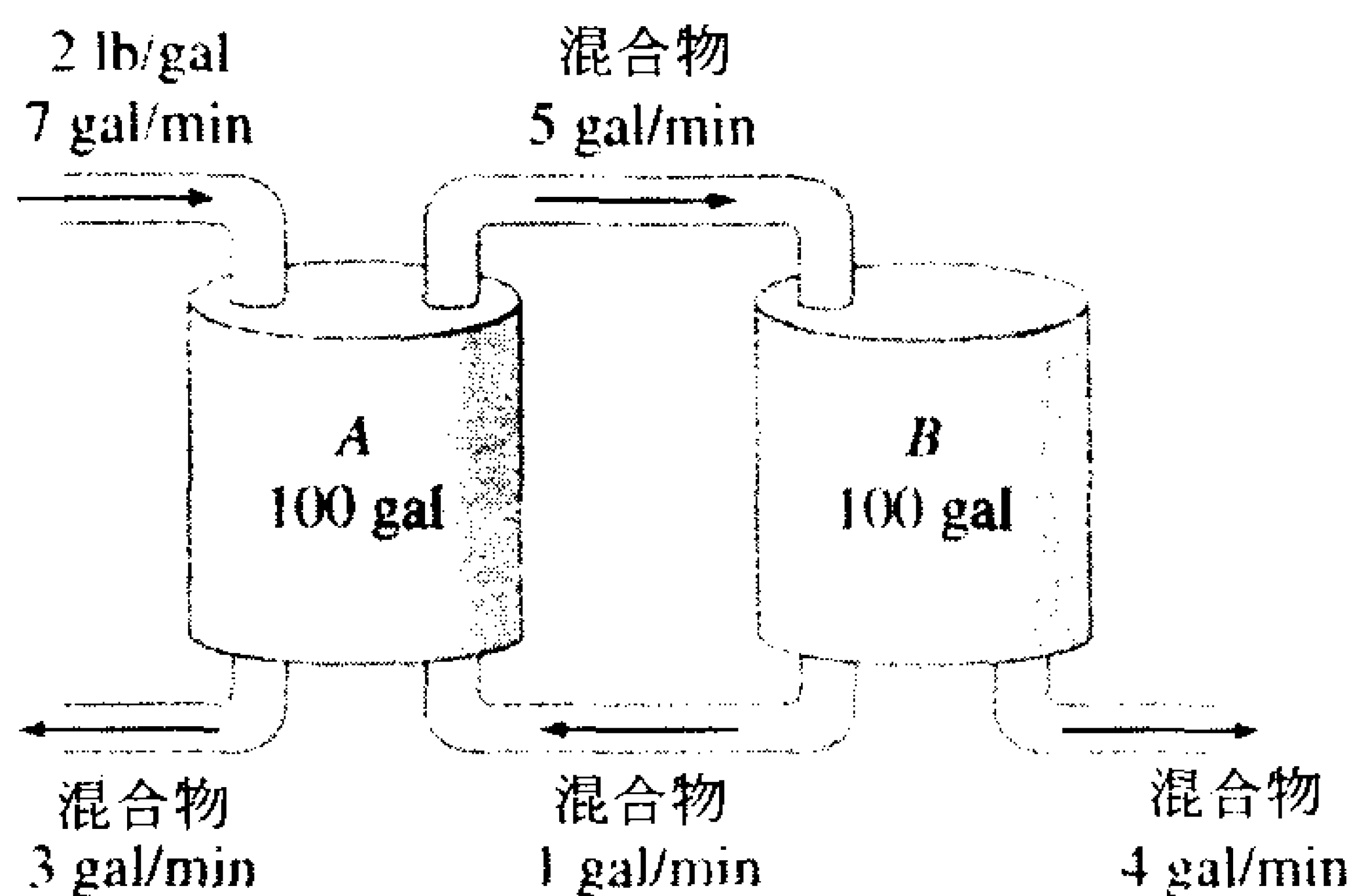


图 3.33

项目模型：可再生资源的利用

人们希望利用的可再生资源有很多. 例如产于太平洋的大麻哈鱼和大比目鱼、产于北美五大湖的鲑鱼、森林中的树木、每年被捕猎的鹿和水鸟等. 这里我们不考虑诸如煤炭、石油、天然气或矿石之类的不可再生资源. 我们需要一个方案使得我们能够最大限度地利用现有的可再生资源而又不会因过度使用而导致其低于一个可持续的水平. 这里研究的简单数学模型为设计这样的方案提供了一些参考. 进一步的研究由 Clark 给出.[⊖]

如果没有人类的干扰，我们假设资源数量按照逻辑斯谛方式增长，如 3.2 节中方程(3)和图 3.13 描述的那样. 回顾如果 $P(t)$ 代表 t 时刻(以年计)的资源数量(以单位面积或体积内生物的数量，或资源总量表示)，则逻辑斯谛方程为

$$\frac{dP}{dt}=P(r-\frac{r}{K}P)=F(P), \tag{1}$$

这里 $r>0$ 为固有增长率(intrinsic growth rate)，K 为环境承载能力(environmental carrying capacity)(也被称为饱和水平(saturation level)或极限资源(limiting population))，因为随时间推

⊖ Colin W. Clark, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, 2nd ed. (New York: John Wiley & Sons, 1990).

移资源数量会达到这个值）．这些常数的值是通过实验确定的．

在这一模型里我们假设人类获取的是某种动物资源．

常数收获速率 在第一个例子中，我们假设收获速率(harvest rate)为常数 h．则微分方程(1)被改写为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(r-\frac{r}{K}P)-h=F(P)-h=G(P). \tag{2}$$

注意，函数 $G(P)=(-r/K)P^2+rP-h$ 是一个关于 P 的二次多项式，其图像是下凹的．在正常情况下收获速率不会太高(即 $h<\max F(P)=F\left(\frac{1}{2}K\right)=\frac{1}{4}rK$)，则函数 G 在区间 $[0, K]$ 上有两个零点．这两个零点 P_1 和 P_2 的值，如图 1 所示，可由二次求根公式得到：

$$P_{1,2}=\frac{K\pm\sqrt{K^2-4Kh/r}}{2}.$$

通过观察得到 $P(t)=P_1$ 和 $P(t)=P_2$ 是(2)的常数解，或称均衡解．由图 1 我们看到，导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 在区间 $P_1<P<P_2$ 上为正，所以 P 在该区间上会增加，而 P 取其他值时 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 为负．然后对(2)微分，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2}=r\left(1-\frac{2}{K}P\right)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{2}{K}P\right)G(P),$$

此式意味着当 $P<P_1$ 时 $P(t)$ 下凹而当 $\frac{1}{2}K<P<P_2$ 时 $P(t)$ 上凹．不解方程，我们仍可以推出解的一些定性性质．请参考图 2．注意如果初始时刻动物数量小于 P_1，则数量 $P(t)$ 将会在有限时间内减小到 0(灭绝)，否则动物数量 $P(t)$ 将达到一个小于 k(没有人类利用下的极限数量)的值 P_2．数学家们把 P_2 定义为一个渐近稳定均衡(asymptotically stable equilibrium)或吸引子(attractor)，因为其他始于 P_2 附近的解都会逐渐趋近水平直线 $P=P_2$；P_1 称为一个不稳定均衡(unstable equilibrium)或排斥子(repeller)．所以我们可以得出结论，不能收获量太大，否则会导致资源枯竭．

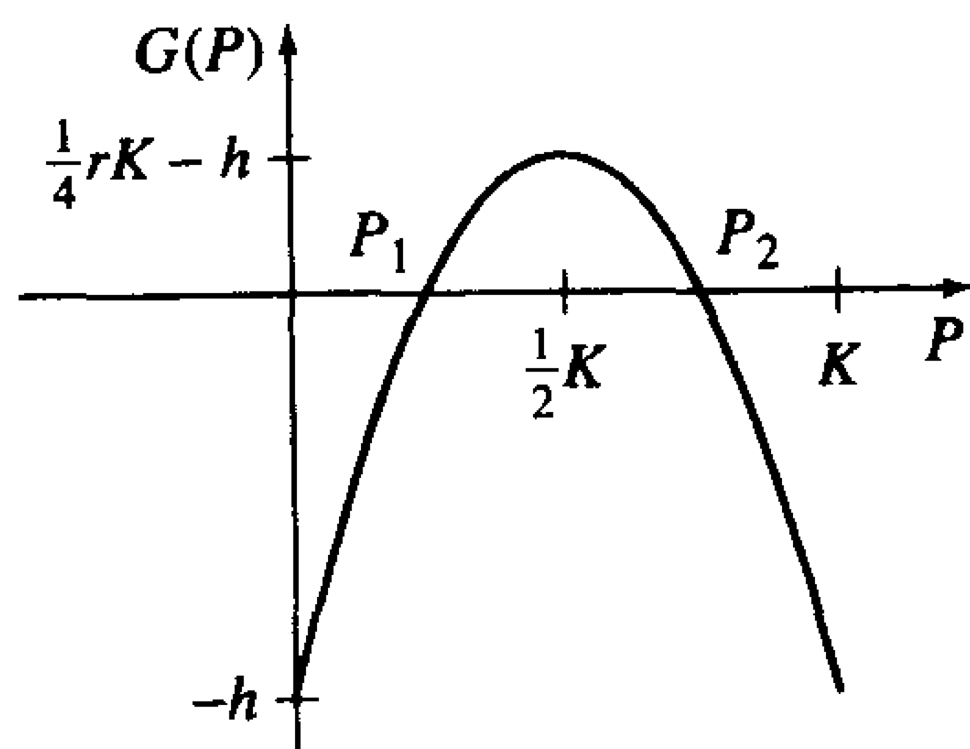


图 1

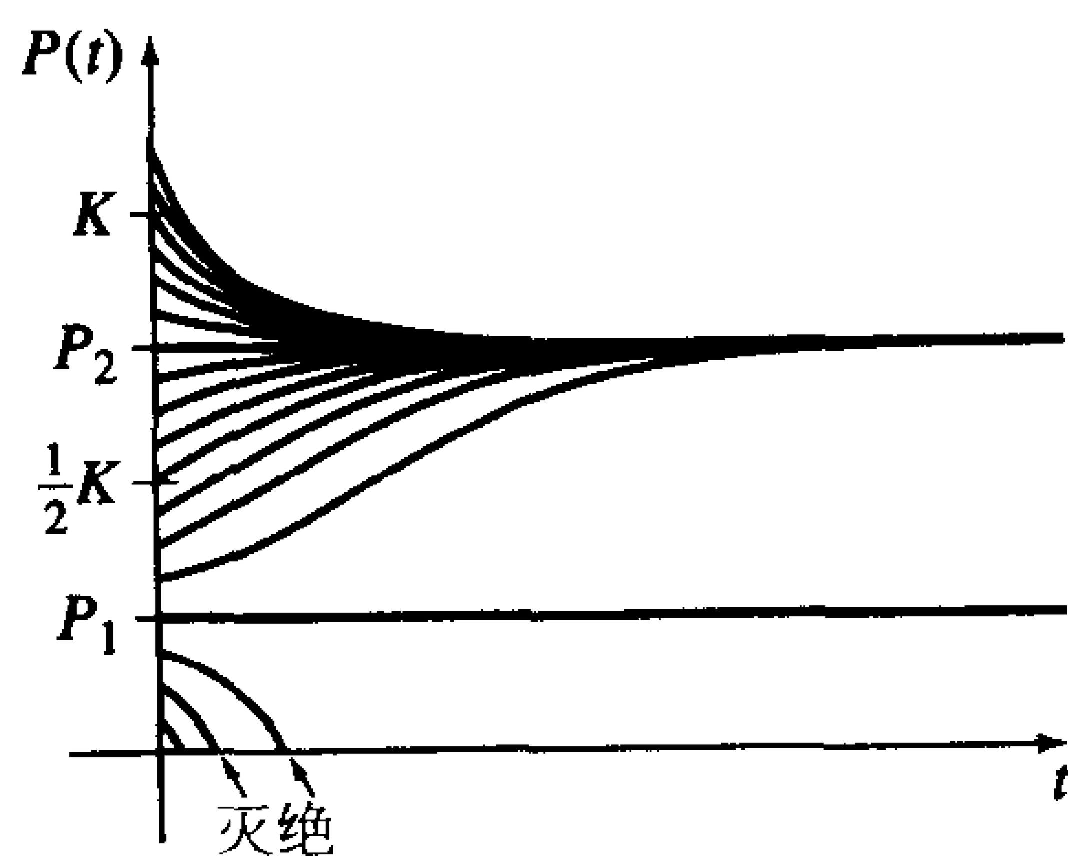


图 2

现在我们考虑下一个问题：收获量是多大时仍然能保证可持续的(即长时间的)收获？前面我们看到当 $h<\frac{1}{4}rK$ 时 $G(P)=0$ 有两个实数解．另一方面，如果 $h>\frac{1}{4}rK$ 或 $\frac{1}{4}rK-h<0$，

从图中可以看出 $dP/dt=G(P)<0$，所以 $P(t)$会减少到 0. 最后，当 $h=\frac{1}{4}rK$ 时方程 $G(P)=0$ 有单根$P_1=\frac{1}{2}K$. 这个 P 的值也是微分方程的一个常数解. $h=\frac{1}{4}rK$ 称为最大可持续产量(maximum sustainable yield，MSY). 这样动物数量可以保持为常数 $P_1=\frac{1}{2}K$ 而收获量等于常数 MSY，换言之，MSY 等于每年的增加数减去死亡数.

下面对所有使用这一模型计算实际情况中 MSY 的人们提出一个警告. R 和 K 的值往往只有10%的准确性. 用 $h=\frac{1}{4}rK$ 来计算 MSY 也许会得到过大的数字，从而导致动物数量减少甚至灭绝.

到目前为止，我们在没有实际求解微分方程的情况下已经得到了一些关于(2)的解的定性的信息. 方程(2)依赖于初值条件 $P(0)=P_0$的解可以通过变量分离很容易地求得. 因为 P_1和 P_2是零解，所以 $P-P_1$和 $P-P_2$一定是 $G(P)$的因子. 可以将

$$\frac{dP}{dt}=-\frac{r}{K}(P-P_1)(P-P_2)\text{ 写成}\frac{dP}{(P-P_1)(P-P_2)}=-\frac{r}{K}dt,$$

使用部分分式然后积分得

$$\frac{1}{P_2-P_1}\ln\left|\frac{P-P_2}{P-P_1}\right|=-\frac{r}{K}t+c. \tag{3}$$

在(3)中应用 $P(0)=P_0$解出 $P(t)$，我们得到

$$P(t)=\frac{P_2(P_0-P_1)-P_1(P_0-P_2)e^{-\alpha t}}{P_0-P_1-(P_0-P_2)e^{-\alpha t}}, \tag{4}$$

其中 $\alpha=r(P_2-P_1)/K=r\sqrt{1-4h/Kr}$. 从显式解(4)中可以清楚地看到，随着 t 的增加，$P(t)$趋近于 P_2.

收获量与动物数量成正比 在下面的模型中，我们假设收获量与动物数量成正比，则对(1)做改动后得

$$\frac{dP}{dt}=F(P)-EP=P\left(r-\frac{r}{K}P\right)-EP=G(P), \tag{5}$$

其中 $E>0$ 是一个影响(effort)系数，这里是一个常数，它可以用来衡量即将收获的资源数量. 和前面一样，考虑由方程 $G(P)=P(r-E-rP/K)=0$ 所获得的均衡解. 当影响 E 不超过增长速率 r 时，可以求得一个正数解 $P_1=K(1-E/r)$. 因为(5)可以被改写成 $dP/dt=-(r/K)P(P-P_1)$，所以可以看到如果 $0<P<P_1$，则有 $dP/dt>0$，而如果 $P>P_1$，则有 $dP/dt<0$. 这说明一个解总会趋近于均衡解 $P(t)=P_1$，使得 P_1成为一个渐近稳定均衡，或吸引子. 在这种情况下，均衡收获量或可持续产量(sustainable yield)为 $EP_1=KE(1-E/r)$. 注意，最后这个表达式左边的值依赖于右边一个关于 E 的二次函数，当 $E=\frac{1}{2}r$，$P_1=\frac{1}{2}K$ 时有最大值. 根据这些值，EP_1为最大可持续产量或 MSY.

为了给出这个模型的结论，我们注意到可以求出(5)式的解析解. 实际上，以下形式的(5)式

$$\frac{dP}{dt}=P\left(r-E-\frac{r}{K}P\right) \tag{6}$$

是一个形如 3.2 节中(4)的逻辑斯谛方程，其中 $a=r-E$，$b=r/K$. 这样由 3.2 节中的(5)我们得到方程的解

$$P(t)=\frac{(r-E)P_0}{rP_0/K+(r-E-rP_0/K)\mathrm{e}^{-(r-E)t}}.\tag{7}$$

从(7)中可以看出当 $t\to+\infty$ 时极限数量为 $K(1-E/r)$.

例 1　南极鳍鲸

作为一个例子，克拉克以 1976 年为 $t=0$ 时刻，$P_0=P(0)=70\ 000$，对南极鳍鲸估计出 $r=0.08$ 及 $K=400\ 000$.



(a)在这个常数收获模型中，对于一个确定的鲸的数量 $P_1=\frac{1}{2}K=200\ 000$，我们得到 MSY 为 $h=\frac{1}{4}rK=8\ 000$. 然而，因为初始数量为 $P_0=70\ 000<P_1$，鲸的数量会减至 0，因为第一年的新增数量(总数量乘以增长速率 $=70\ 000\times0.08=5\ 600$)小于收获数量. 为了保证 $P_0>P_1$，我们需要选使 $h<4\ 620$(请参考"相关练习"中习题 3 的(b)). 在这种情况下，数量 $P(t)$ 慢慢接近 $P_2=330\ 000$. 一个使鲸的数量尽快达到这一数字的方法是在初始时严格限制捕鲸，这样才可能在以后有更大的收获.

(b)在影响系数为常数的模型中，我们假设影响是(a)中增长速率的一半，即 $E=\frac{1}{2}r=0.04$. 则 $P_1=\frac{1}{2}K=200\ 000$，第一年收获量为 $EP(0)=0.04\times70\ 000=2\ 800$. MSY 为 $EP_1=0.04\times200\ 000=8\ 000$. ■

相关练习

1. (a)考虑常数收获模型

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(5-P)-4,P(0)=P_0.$$

因为这个微分方程是自治的，所以可以利用 2.1 节中讨论的相图概念，分别在 $P_0>4$，$1<P_0<4$ 和 $0<P_0<1$ 的情况下，绘出相应的有代表性的解曲线. 在两种情况下分别确定长期资源数量.

(b)求解(a)中的初值问题. 利用绘图工具检验在(a)中得到的结果.

(c)利用(a)和(b)中的信息确定这种动物是否会在有限时间内灭绝. 如果会，求出这个时间.

2. 如习题 1 一样，用定性和解析方法给出常数收获模型. 确定这种动物会不会在有限的时间内灭绝. 如果会，求出这个时间.

(a) $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(5-P)-\frac{25}{4}$　　(b) $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(5-P)-7$

3. 这个问题与例 1 所讨论的南极鳍鲸有关.

(a)如果不允许捕捞，鲸的数量超过 $\frac{1}{2}K=200\ 000$ 需要多长时间？以 $P_0=70\ 000$ 绘出解在 $0<t<100$ 内的图像.

(b)在以常速率捕捞的情况下，计算使得 $P_0=P_1$ 的 $h=h_0$ 的值. 以 $P_0=70\ 000$ 及 $h=\frac{1}{2}h_0$ 绘出解在 $0<t<100$ 内的图像.

(c)在影响系数为常数的情况下，E_0 为多少时可以得到 MSY？产出为多少？鲸的极限数量为多少？$P_0=70\ 000$，$E=\frac{1}{2}E_0$，绘出解在 $0<t<100$ 内的图像.

4. (a)表 1 中的数据(摘自克拉克 1976 年出版的书)给出了秘鲁对凤尾鱼捕捞的部分历史数据. 我们考虑用渔船的数量 B 乘以捕捞的天数 D 作为衡量捕捞影响的尺度. 我们设 $E=cBD$, 这里 c 是比例常数. 如果收获量 C 与影响的尺度和鱼的数量成正比, 那么 $C=EP(t)=cBDP(t)$, 其中 $P(t)$ 是 t 时刻鱼的数量(以百万吨为单位), 那么 $P(t)=C/(cBD)$. 令 $c=2\times10^{-7}$, 利用 CAS 绘出 1959～1973 年的数据点(P 和年度).

表 1

年	渔船数量	捕捞的天数	收获量(百万吨)
1959	414	294	1.91
1960	667	279	2.93
1961	756	298	4.58
1962	1 069	294	6.27
1963	1 655	269	6.42
1964	1 744	297	8.86
1965	1 623	265	7.23
1966	1 650	190	8.53
1967	1 569	170	9.82
1968	1 490	167	10.26
1969	1 455	162	8.96
1970	1 499	180	12.27
1971	1 473	89	10.28
1972	1 399	89	4.45
1973	1 256	27	1.78

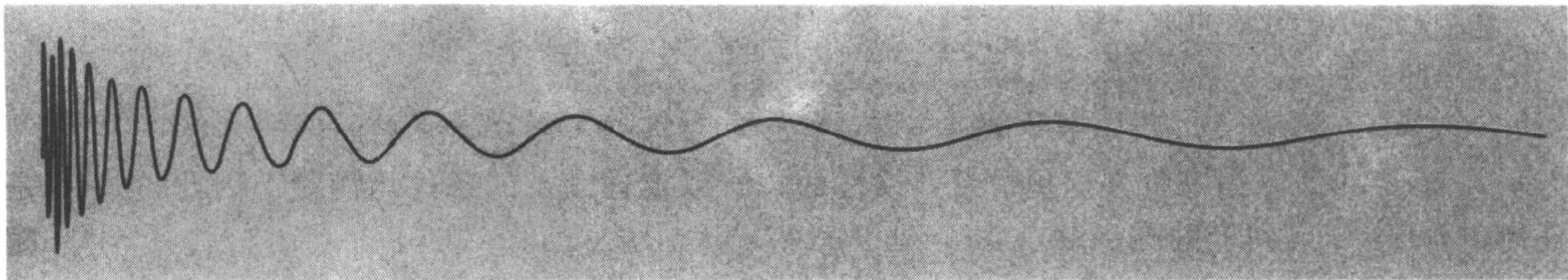
(b)考虑数据点的自然分布并忽略掉一些异常点, 我们可以认为由(a)得到的图表示了一个如下的函数

$$P(t)=\frac{P_0K}{P_0+(K-P_0)e^{-rt}},$$

其中 P_0、K 和 r 分别为初始数量、极限数量和增长速率. 利用(a)中近似得到的 $P(t)$ 的图像求出 P_0、K 及 r 的值. 在图中绘出 $P(t)$ 的图像.

(c)利用(b)中得到的 P_0、K, r 的值和收获数量 $h=\frac{1}{8}rK$, 在常数收获的情况下给出微分方程的解(4)在区间 $0\leqslant t\leqslant100$ 上的图像.

(d)利用(b)中得到的 P_0、K 及 r 的值和影响 $E=\frac{1}{2}r$, 在常数影响的情况下绘出微分方程的解(7)在区间 $0\leqslant t\leqslant100$ 上的图像.



柯西-欧拉微分方程的解；见图 4.15

第4章 高阶微分方程

现在开始，我们要学习求解二阶或二阶以上的微分方程．在本章的前七节中，我们将学习基本的定理和一些解特定类型线性方程的方法．在 4.8 节中，我们将介绍用消元法解线性常微分方程组，这种方法使得每一个因变量对应于一个线性高阶微分方程，从而把方程组分解来使之简化．本章结尾处对非线性高阶微分方程做了简要的介绍．

4.1 基本定理：线性方程

在第 2 章中，我们学习了通过把一阶微分方程分为可分离的、线性的、齐次的，或伯努利方程来求解．尽管这些方程的解都是参数族的形式，但是有一点，这种解族没有表示出微分方程的通解．只有在解线性一阶方程时，我们才可以通过一些连续性条件得到通解．回顾前面讲过的，通解是定义在和微分方程相同定义域上的解族，它包括了微分方程的所有解．本章我们的主要目标是求线性高阶微分方程的通解，因此我们首先来看一些定理．

4.1.1 初值和边界值问题

初值问题 在 1.2 节中，我们定义了一般 n 阶微分方程的初值问题．对于线性微分方程，n 阶初值问题（nth-order initial-value problem）为：

$$\text{解：}a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_0(x)y=g(x), \tag{1}$$

$$\text{约束：}y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

考虑这样一个问题，求一个定义在区间 I 上的函数，I 包含 x_0，这个函数满足微分方程和在 x_0 处的 n 个初值条件：$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_1$，…，$y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$．我们已经学过二阶初值问题的情形，它的解曲线一定通过点(x_0, y_0)并且在这点的斜率为 y_1．

存在性和唯一性 在 1.2 节中，我们给出了一个定理，说明了一阶初值问题解的存在性和唯一性条件．接下来的一个定理给出了初值问题(1)中解的存在性和唯一性的充分条件．

定理 4.1 **唯一解的存在性**

令 $a_n(x)$，$a_{n-1}(x)$，…，$a_1(x)$，$a_0(x)$及 $g(x)$是区间 I 上的连续函数，对于 I 上的所有 x 都有 $a_n(x)\neq 0$ 成立．若 $x=x_0$ 是 I 中的任意一点，那么初值问题(1)的解 $y(x)$在区间 I 上存在并且唯一．

例 1　初值问题的唯一解

初值问题

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0,\quad y(1) = 0, y'(1) = 0,\quad y''(1) = 0$$

有平凡解 $y=0$. 因为三阶方程是常系数线性的，所以定理 4.1 的条件均满足. 因此，$y=0$ 是任何包含 $x=1$ 区间上的唯一解. ■

例 2　初值问题的唯一解

可以很容易证明函数 $y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ 是初值问题

$$y'' - 4y = 12x,\quad y(0) = 4,\quad y'(0) = 1$$

的解. 这个微分方程是线性的，并且其系数和 $g(x)=12x$ 都是连续的，在任何包含 $x=0$ 的区间 I 上都有 $a_2(x)=1\neq 0$. 我们可以从定理 4.1 知道这个所给的函数是 I 上的唯一解. ■

定理 4.1 要求 $a_i(x)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$ 是连续函数并且对于区间 I 上的每一个 x 都有 $a_n(x)\neq 0$ 成立，这两点都很重要. 特别地，若对于区间中某个 x 有 $a_n(x)=0$，那么线性初值问题的解可能不唯一，甚至不存在. 例如，可以证明函数 $y=cx^2+x+3$ 是初值问题

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, y(0) = 3, y'(0) = 1$$

在$(-\infty, +\infty)$上的解，对于任何参数 c 都成立. 换言之，这个初值问题没有唯一解. 尽管定理 4.1 大部分的条件都满足，但是在 $x=0$ 处 $a_2(x)=x^2$ 为零，并且初始条件恰好考虑的也是在 $x=0$ 处的情况.

边界值问题　另外一种类型的问题是求解二阶或二阶以上的线性微分方程，在这类方程中因变量 y 或其导数在不同点处取值. 例如：

$$\text{解：} a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

$$\text{约束：} y(a) = y_0, y(b) = y_1$$

称为边界值问题(BVP). 预先给定的值 $y(a)=y_0$，$y(b)=y_1$，称为边界条件(boundary condition). 前述问题的解是在某个包含 a、b 的区间 I 上满足微分方程的函数，解的图像通过点(a, y_0)和(b, y_1). 请见图 4.1.

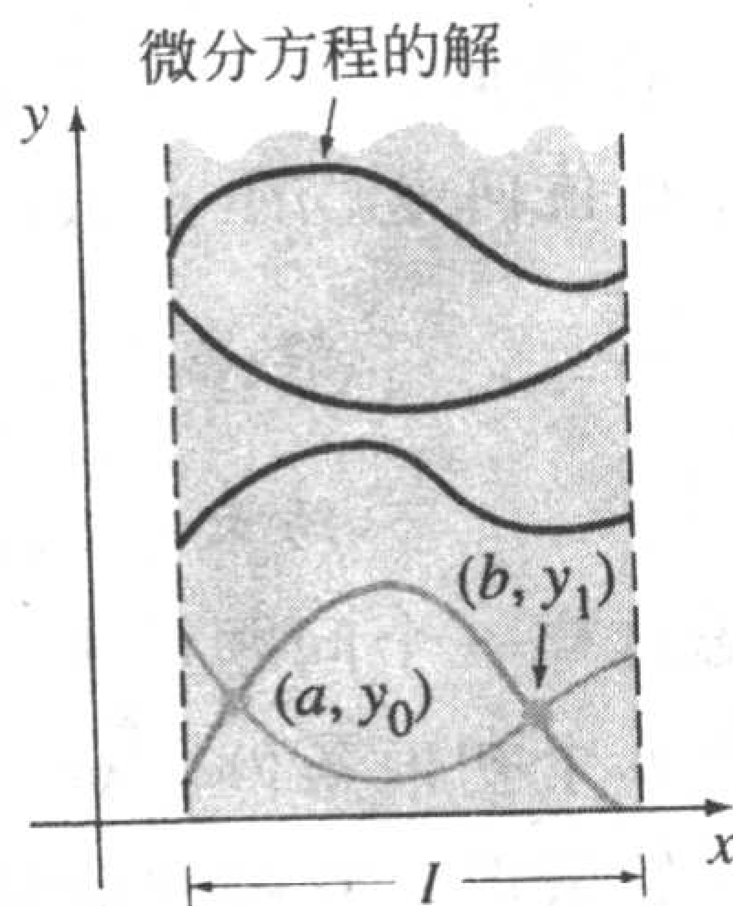


图　4.1

对一个二阶微分方程来说，其他边界条件可能还有

$$y'(a) = y_0,\quad y(b) = y_1,$$

$$y(a) = y_0,\quad y'(b) = y_1,$$

$$y'(a) = y_0,\quad y'(b) = y_1,$$

这里 y_0 和 y_1 表示任意常数. 这三组条件是一般边界条件

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

的特殊情况.

下一个例子表明，即使满足定理 4.1 的条件，边界值问题也可能存在几个解(如图 4.1 所示)、唯一解或根本无解.

例 3　边界值问题可能有多个解、唯一解或无解

在 1.1 节的例 4 中，微分方程 $x''+16x=0$ 的解是双参数解族：

$$x = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t. \tag{2}$$

(a)现在我们来求这个方程满足边界条件 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=0$ 的解. 从第一个条件 $0=c_1\cos 0+c_2\sin 0$ 中可以求出 $c_1=0$，则 $x=c_2\sin 4t$. 但是当 $t=\pi/2$ 时，$0=c_2\sin 2\pi$ 对于所有的 c_2 都成立，因为 $\sin 2\pi=0$. 因此边界值问题

$$x'' + 16x = 0,\quad x(0) = 0,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

有无穷多个解. 图 4.2 给出了单参数解族 $x=c_2\sin 4t$ 中一些解的图像，它们通过点(0, 0)和($\pi/2$, 0).

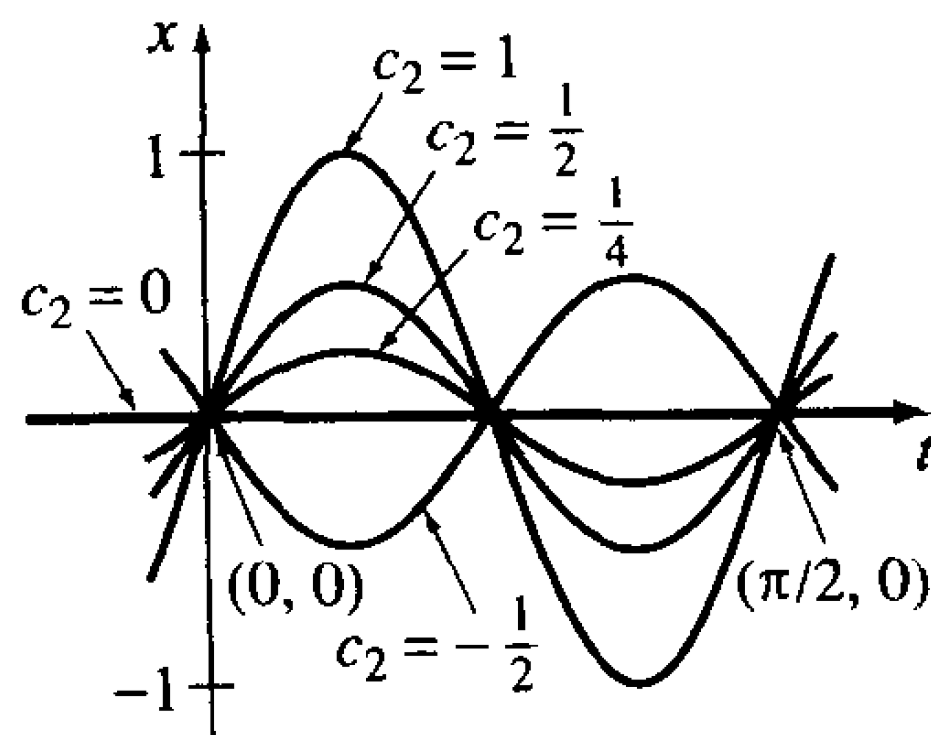


图 4.2

(b)如果(3)中的边界值问题变为

$$x'' + 16x = 0,\quad x(0) = 0,\quad x\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, \tag{4}$$

那么由 $x(0)=0$ 仍然可从(2)中得 $c_1=0$. 但是把 $x(\pi/8)=0$ 代入 $x=c_2\sin 4t$ 中，可得 $0=c_2\sin(\pi/2)=c_2\cdot 1$. 因此，$x=0$ 是新边界值问题的解. 当然，也能证明 $x=0$ 是(4)的唯一解.

(c)最后，如果把边界值问题写成

$$x'' + 16x = 0,\quad x(0) = 0,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \tag{5}$$

我们还可以从 $x(0)=0$ 中解出 $c_1=0$，但是把 $x(\pi/2)=1$ 代入 $x=c_2\sin 4t$ 将会导致 $1=c_2\sin 2\pi=c_2\cdot 0$矛盾. 因此，边界值问题(5)无解. ■

4.1.2 齐次方程

形如

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

的线性 n 阶微分方程称为齐次(homogeneous)的，但形如

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{7}$$

带有 $g(x)$，不等于 0 的方程称为非齐次(nonhomogeneous)的. 例如，$2y''+3y'-5y=0$ 是齐次线性二阶微分方程，但 $x^3y'''+6y'+10y=e^x$ 是非齐次线性三阶微分方程. 本章中的齐次不是指 2.5 节中的齐次函数系数.

我们将会看到，为了解形如(7)的非齐次微分方程，首先要解形如(6)的相关齐次方程(associated homogeneous equation).

注 为了避免不必要的重复，作为一种惯例，今后我们在阐述与(6)、(7)相关的定义和定理时，都有如下假设成立：在某个区间 I 上，

- 系数 $a_i(x)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$ 都是连续的.
- 等式右边的 $g(x)$ 都是连续的.
- 对区间上所有的 x 都有 $a_n(x)\neq 0$ 成立.

微分算子 在微积分中，微分常用大写字母 D 表示，即 $dy/dx=Dy$. 符号 D 称为微分算子(differential operator)，因为它把可微函数转变为另一个函数. 例如，$D(\cos 4x)=-4\sin 4x$，$D(5x^3-6x^2)=15x^2-12x$. 高阶导数可以用 D 来表示：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=D(Dy)=D^2y\text{，一般形式为}\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny\text{，}$$

这里 y 表示充分可微的函数．用 D 表示的多项式也是微分算子，例如 $D+3$，D^2+3D-4，$5x^3D^3-6x^2D^2+4xD+9$ 都是微分算子．一般地，我们定义 n 阶微分方程为

$$L=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x). \tag{8}$$

由微分的两个基本性质，我们有 $D(cf(x))=cDf(x)$ 和 $D\{f(x)+g(x)\}=Df(x)+Dg(x)$ 成立，其中 c 是常数．微分算子 L 具有线性性；即 L 作用在两个微分函数的线性组合上等于 L 分别作用于每个函数上的线性组合，用符号表示就是

$$L\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}=\alpha L(f(x))+\beta L(g(x)), \tag{9}$$

这里 α，β 都是常数．因为有(9)所示的性质，所以我们称 n 阶微分算子为线性算子(linear operator)．

微分方程 任何线性微分方程都可以用 D 记号来表示．例如，微分方程 $y''+5y'+6y=5x-3$ 可以写成 $D^2y+5Dy+6y=5x-3$ 或者 $(D^2+5D+6)y=5x-3$．利用(8)式，我们可以把 n 阶线性微分方程(6)和(7)分别写为

$$L(y)=0,\quad L(y)=g(x)$$

叠加原理 在下一个定理中，我们将会看到两个或两个以上齐次线性微分方程解的和或叠加仍然是它的一个解．

定理 4.2 **叠加原理——齐次方程**

令 y_1，y_2，…，y_k 是 n 阶齐次微分方程(6)在区间 I 上的解，那么线性组合

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ky_k(x)$$

仍然是区间 I 上的解，这里 c_i，$i=1$，2，…，k 都是任意常数．

证 我们只证 $k=2$ 的情形，其他情形可以类推．令 L 是形如(8)的微分算子，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次微分方程 $L(y)=0$ 的解．若定义 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$，那么由 L 的线性可得

$$L(y)=L\{c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\}=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0.$$ ■

定理 4.2 的推论

(A) 齐次线性微分方程的解 $y_1(x)$ 的常数倍 $y=c_1y_1(x)$ 仍是它的一个解．

(B) 齐次线性微分方程总有平凡解 $y=0$．

例 4 **叠加原理——齐次微分方程**

函数 $y_1=x^2$ 和 $y_2=x^2\ln x$ 都是齐次线性微分方程 $x^3y'''-2xy'+4y=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的解．由叠加原理知，线性组合

$$y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$$ ■

仍然是微分方程在这个区间上的解．

函数 $y=e^{7x}$ 是微分方程 $y''-9y'+14y=0$ 的解．因为微分方程是线性和齐次的，这个解的常数倍 $y=ce^{7x}$ 仍然是它的一个解．对于 c 的各个值，我们知道 $y=9e^{7x}$，$y=0$，$y=-\sqrt{5}e^{7x}$…都是方程的解．

线性相关与线性无关 接下来的两个概念是研究线性微分方程的基础．

定义 4.1 线性相关/线性无关

一个集合由函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$组成，如果存在不全为零的常数 c_1，c_2，…，c_n，使得

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

成立，我们就称这些函数在区间 I 上是线性相关的(linearly dependent). 如果在区间 I 上函数集合不是线性相关的，我们就称它为线性无关的(linearly independent).

换句话说，函数集合在区间 I 上是线性无关的，如果有

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

对区间 I 上的每个 x 成立，必有 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 成立.

这个定义对于由两个函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$组成的集合是容易理解的. 如果函数集合在区间 I 上是线性相关的，那么存在不全为零的常数 c_1，c_2，对于区间上每个 x 都有 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ 成立. 因此，若假设 $c_1 \neq 0$，那么有 $f_1(x) = (-c_2/c_1) f_2(x)$；也就是说，如果两个函数线性相关，那么一个函数可以表示成另一个函数的常数倍. 反过来，如果对某个常数 c_2 有 $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ 成立，那么就有 $(-1)\cdot f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ 对区间上的每一个 x 都成立. 因此，函数线性相关时至少有一个常数(即 $c_1 = -1$)不为零. 由此，我们可以得到一个结论，即在定义区间上若两个函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$线性无关，仅当其中任何一个函数都不能表示成另外一个函数与常数的乘积. 例如，函数 $f_1(x) = \sin 2x$，$f_2(x) = \sin x \cos x$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上是线性相关的，因为 $f_1(x)$可以表示成 $f_2(x)$与常数的乘积，这可由正弦函数的二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ 得到. 另一方面，函数 $f_1(x) = x$，$f_2(x) = |x|$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的，这可由图 4.3 得到，一个函数不能表示成另外一个函数与常数的乘积.

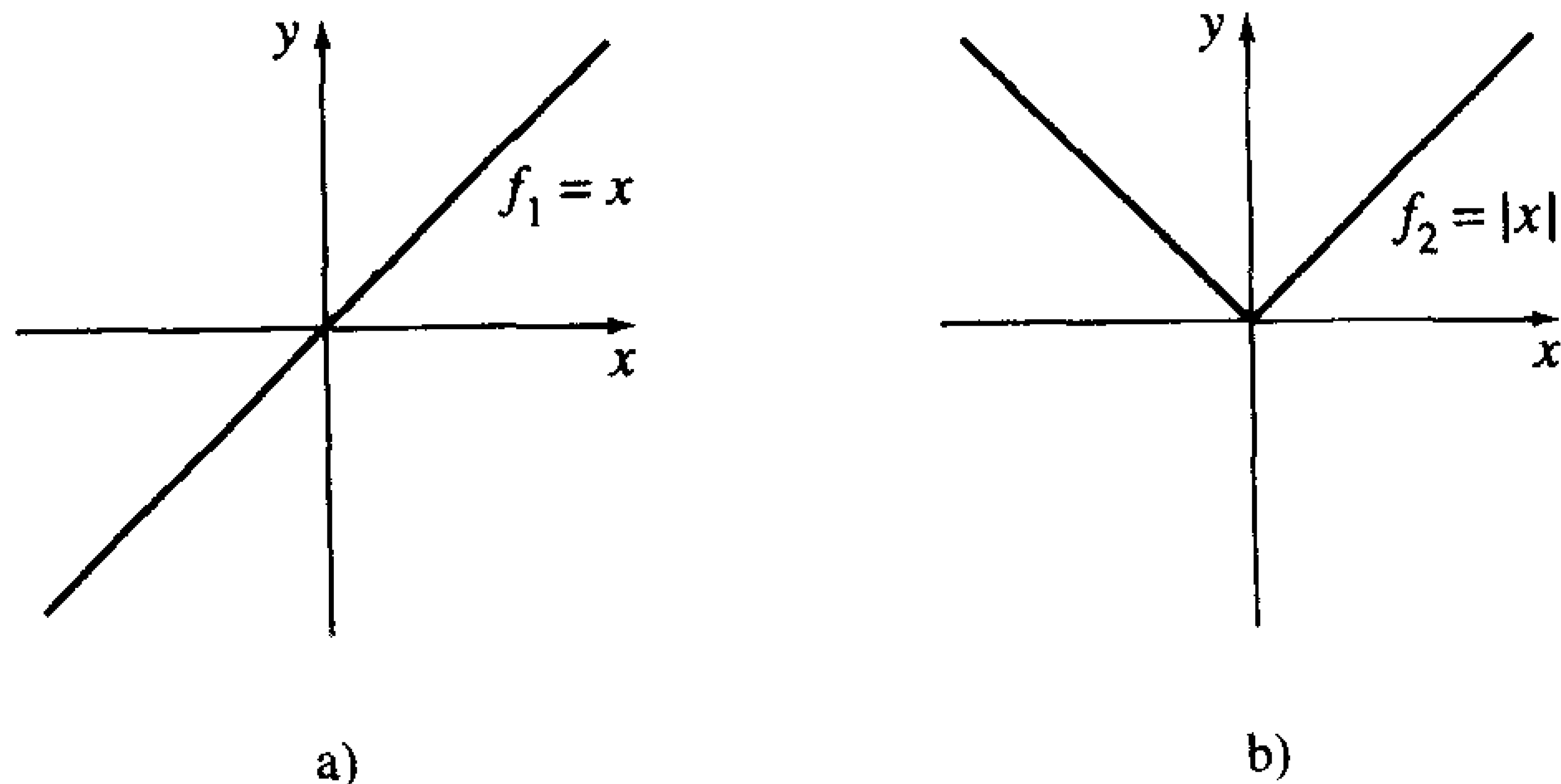


图 4.3

由前述，商 $f_2(x)/f_1(x)$不是一个常数，所以 $f_2(x)$和 $f_1(x)$是线性无关的. 这个事实将会在下一节中用到.

例 5 函数的线性相关

函数 $f_1(x) = \cos^2 x$，$f_2(x) = \sin^2 x$，$f_3(x) = \sec^2 x$，$f_4(x) = \tan^2 x$ 在区间$(-\pi/2, \pi/2)$上线性相关，因为

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0,$$

其中 $c_1 = c_2 = 1$，$c_3 = -1$，$c_4 = 1$，这里用到 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 和 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. ■

函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$是线性相关的，若至少有一个函数可以表示成其他函数的线性组合.

例 6　函数的线性相关

函数 $f_1(x)=\sqrt{x}+5$，$f_2(x)=\sqrt{x}+5x$，$f_3(x)=x-1$，$f_4(x)=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上线性相关，因为 f_2 可以写成 f_1、f_3 和 f_4 的线性组合，也就是对区间$(0,+\infty)$上的每个 x 都有

$$f_2(x)=1\cdot f_1(x)+5\cdot f_3(x)+0\cdot f_4(x)$$

成立. ■

微分方程的解　我们主要是对线性无关的函数，从某种意义上说也就是对微分方程线性无关的解感兴趣. 尽管我们总是直接利用定义 4.1 来判断线性相关性，但齐次线性 n 阶微分方程(6)的 n 个解 y_1，y_2，…，y_n 是否线性无关还是要用行列式来判断.

定义 4.2　朗斯基行列式

假设函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$都至少有 $n-1$ 阶导数，那么行列式

$$W(f_1,f_2,\cdots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

这里用撇记号表示导数，这个行列式称为函数的朗斯基行列式(Wronskian).

定理 4.3　线性无关解的判定方法

令 y_1，y_2，…，y_n 是齐次线性 n 阶微分方程(6)在区间 I 上的 n 个解，则它们是 I 上的线性无关解当且仅当对区间上所有的 x 都有 $W(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq 0$ 成立.

根据定理 4.3，y_1，y_2，…，y_n 为(6)在区间 I 上的 n 个解，那么朗斯基行列式 $W(y_1, y_2,\cdots,y_n)$在这个区间上要么为零，要么永不为零.

齐次线性 n 阶微分方程的 n 个线性无关解有一个专用的术语.

定义 4.3　基本解组

区间 I 上的 n 阶齐次线性微分方程(6)的任何 n 个线性无关解 y_1，y_2，…，y_n 称为基本解组(fundamental set of solution).

我们将在下一个定理中说明线性方程的基本解组是否存在.

定理 4.4　基本解组的存在性

区间 I 上 n 阶齐次线性微分方程(6)的基本解组是存在的.

类似于三维空间中的向量可以用三个线性无关向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的线性组合表示，n 阶齐次线性微分方程的任何解都可以表示成 n 个线性无关解的线性组合. 换言之，n 个线性无关解 y_1，y_2，…，y_n 是构成微分方程通解的基本解系.

定理 4.5　通解——齐次方程

令 y_1，y_2，…，y_n 是 n 阶齐次线性方程(6)在区间 I 上的一个基本解组，那么方程的通解(general solution)是

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x),$$

这里 c_i，$i=1, 2, \cdots, n$ 是任意常数.

定理 4.5 表明如果 $Y(x)$ 是(6)式的任意一个解，那么总能找到常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 使得

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

成立. 下面我们证明 $n=2$ 的情形.

证 令 Y 是 $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ 在区间 I 上的一个解，y_1，y_2 是它的两个线性无关解. 假设 $x=t$ 是区间 I 上满足 $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$ 的一点，同时有 $Y(t)=k_1$ 和 $Y'(t)=k_2$. 我们通过方程组

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1,$$
$$C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = k_2$$

可以求出 C_1，C_2 的值，因为其系数行列式满足

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

但这个行列式仅仅是 $x=t$ 时的朗斯基行列式，根据假设我们有 $W \neq 0$. 若定义 $G(x)=C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$，则 $G(x)$ 满足微分方程，因为它是微分方程两个解的叠加；$G(x)$ 满足初始条件

$$G(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1, \quad G'(t) = C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = k_2;$$

$Y(x)$ 满足同一个线性微分方程和同样的初始条件. 因为，线性初值问题的解是唯一的(由定理 4.1 可知)，所以可知 $Y(x)=G(x)$ 或 $Y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)$. ■

例 7 **齐次微分方程的通解**

函数 $y_1=e^{3x}$ 和 $y_2=e^{-3x}$ 都是线性齐次方程 $y''-9y=0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解. 这两个解在 x 轴上是线性无关的，这可以通过朗斯基行列式来证明，对区间内的所有 x，都有

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

成立. 我们可以从方程的基本解组得到它的两个解 y_1 和 y_2，因此，$y=c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ 是方程的通解. ■

例 8 **从通解中得到解**

函数 $y=4\sinh 3x - 5e^{3x}$ 是例 7 中微分方程的一个解(请读者自行证明). 根据定理 4.5，我们一定可以从通解 $y=c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ 中得到这个解. 若令 $c_1=2$，$c_2=-7$，则有 $y=2e^{3x} - 7e^{-3x}$，它可以写成

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

最后一个等式即是 $y=4\sinh 3x - 5e^{-3x}$. ■

例 9 **齐次微分方程的通解**

函数 $y_1=e^x$，$y_2=e^{2x}$ 和 $y_3=e^{3x}$ 满足三阶微分方程 $y'''-6y''+11y'-6y=0$. 因为

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

对每个实值 x 都成立，函数 y_1，y_2，y_3 构成了 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个基本解组. 由此我们可

得 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$ 是微分方程在此区间上的通解. ■

4.1.3 非齐次方程

任给一个满足(7)式且不带任何参数的函数 y_p，称之为方程的特解(particular solution)或特积分(particular integral). 例如，可以直接证明常函数 $y_p=3$ 是非齐次方程 $y''+9y=27$ 的特解.

若 y_1，y_2，…，y_k 是(6)式在区间 I 上的解，y_p 是(7)式任意一个特解，那么线性组合

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ky_k(x)+y_p \tag{10}$$

也是非齐次方程(7)的解. 如果读者仔细想一想，就会觉得这是理所当然的，因为线性组合 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ky_k(x)$ 通过算子 $L=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0$ 变换为 0，同时 y_p 变换到 $g(x)$. 由 n 阶方程(6)的 $k=n$ 个线性无关解，可得(10)是(7)式的一个通解.

定理 4.6 通解——非齐次方程

令 y_p 是非齐次 n 阶微分方程(7)在区间 I 上的任一个特解，y_1，y_2，…，y_n 是相关齐次方程(6)的一个基本解组，那么在区间 I 上的通解(general solution)为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)+y_p$$

这里 c_i，$i=1, 2, \cdots, n$ 是任意常数.

证 令 L 是(8)中定义的微分算子，$Y(x)$和 $y_p(x)$是非齐次方程 $L(y)=g(x)$的特解，若定义 $u(x)=Y(x)-y_p(x)$，那么由 L 的线性，我们有

$$L(u)=L\{Y(x)-y_p(x)\}=L(Y(x))-L(y_p(x))=g(x)-g(x)=0.$$

这表明 $u(x)$是齐次方程 $L(y)=0$ 的一个解. 因此，由定理 4.5 有 $u(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$，并且

$$Y(x)-y_p(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

或

$$Y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)+y_p(x).$$ ■

余函数 在定理 4.6 中，非齐次线性方程的通解由两个函数的和组成：

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)+y_p(x)=y_c(x)+y_p(x).$$

线性组合 $y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ 是(6)的通解，称为方程(7)的余函数(complementary function). 换言之，解非齐次微分方程首先要解相关的齐次方程，然后求出非齐次方程的一个特解，那么非齐次方程的通解为

$$y=\text{余函数}+\text{特解}=y_c+y_p.$$

例 10 非齐次微分方程的通解

通过把函数 $y_p=-\dfrac{11}{12}-\dfrac{1}{2}x$ 代入非齐次微分方程

$$y'''-6y''+11y'-6y=3x, \tag{11}$$

可以证明它是方程的一个特解. 为了求出(11)的通解，我们必须先解相关的齐次方程.

$$y'''-6y''+11y'-6y=0.$$

在例 9 中，我们知道后者在$(-\infty, +\infty)$上的通解是 $y_c=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$. 因此，(11)的通解是

$$y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-\frac{11}{12}-\frac{1}{2}x$$ ■

另一种叠加方法 本节的最后一个定理在 4.4 节求解非齐次方程的特解时非常有用.

定理 4.7 叠加原理——非齐次方程

令 y_{p_1}，y_{p_2}，$\cdots y_{p_k}$ 是 n 阶非齐次线性方程(7)在区间 I 上对应于 k 个不同函数 g_1，g_2，$\cdots$，g_k 的 k 个特解，也就是设 y_{p_i} 表示对应于微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g_i(x) \tag{12}$$

的特解，这里 $i=1$，2，$\cdots k$，则

$$y_p=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+\cdots+y_{p_k}(x) \tag{13}$$

是方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_k(x) \tag{14}$$

的特解.

证 我们只证明 $k=2$ 的情形. 令 L 是(8)定义的微分算子，令 $y_{p_1}(x)$和 $y_{p_2}(x)$分别是非齐次方程 $L(y)=g_1(x)$和 $L(y)=g_2(x)$的特解. 若定义 $y_p=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)$，我们将证明 y_p 是 $L(y)=g_1(x)+g_2(x)$的特解. 再由微分算子 L 的线性，有如下结果成立：

$$L(y_p)=L\{y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)\}=L(y_{p_1}(x))+L(y_{p_2}(x))=g_1(x)+g_2(x).$$ ■

例 11 叠加原理——非齐次微分方程

请读者证明：

$y_{p_1}=-4x^2$ 是 $y''-3y'+4y=-16x^2+24x-8$ 的特解，

$y_{p_2}=e^{2x}$是 $y''-3y'+4y=2e^{2x}$的特解，

$y_{p_3}=xe^x$ 是 $y''-3y'+4y=2xe^x-e^x$ 的特解.

根据定理 4.7 中的(13)可得 y_{p_1}，y_{p_2}，y_{p_3} 的叠加

$$y=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}=-4x^2+e^{2x}+xe^x$$

是方程

$$y''-3y'+4y=\underbrace{-16x^2+24x-8}_{g_1(x)}+\underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)}+\underbrace{2xe^x-e^x}_{g_3(x)}$$

的解. ■

注 若 y_{p_i} 是(12)的特解，$i=1$，2，$\cdots$，k，当方程右边等于

$$c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+\cdots+c_kg_k(x)$$

时，那么线性组合

$$y_p=c_1y_{p_1}+c_2y_{p_2}+\cdots+c_ky_{p_k}$$

也是(14)式的特解，这里 c_i 是常数.

在精确地解齐次和非齐次线性微分方程之前，我们需要在下一节给出另外一个定理.

注 这个注释是 1.3 节末尾注释的延续，继续简要地说明动态系统.

数学模型为 n 阶线性微分方程

$$a_n(t)y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y'+a_0(t)y=g(t)$$

的动态系统称为 n 阶线性系统(linear system). n 个时间变量函数 $y(t)$，$y'(t)$，$\cdots$，$y^{(n-1)}(t)$是系统的状态变量(state variable). 它们在 t 时刻的值就是系统的状态(state of the system). 称函数 g 为输入函数(input function)、施迫函数(forcing function)或激发函数(excitation function). 微分方程的解 $y(t)$称为系统的输出或响应(output or response of the system). 在定理 4.1 的条件下，输出或响应 $y(t)$是由 t_0 时刻时的系统输入和状态唯

一决定的，也就是由初始条件 $y(t_0)$，$y'(t_0)$，…，$y^{(n-1)}(t_0)$决定的.

为使动态系统是线性的，系统需要满足定理 4.7 中的叠加原理，即系统的响应是叠加的输入产生的叠加输出. 我们已经在 3.1 节中学过一些简单的线性系统(一阶线性方程)；在 5.1 节中，我们将学习二阶微分方程的线性系统.

练习 4.1

4.1.1 初始值和边界值问题

在习题 1～4 中，指定区间上所给出的函数族是微分方程的通解. 求函数族中的一个函数，使之成为初始问题的解.

1. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$，$(-\infty,\infty)$；$y''-y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$
2. $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}$，$(-\infty,\infty)$；$y''-3y'-4y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$
3. $y=c_1x+c_2x\ln x$，$(0,\infty)$；$x^2y''-xy'+y=0$，$y(1)=3$，$y'(1)=-1$
4. $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$，$(-\infty,\infty)$；$y'''+y'=0$，$y(\pi)=0$，$y'(\pi)=2$，$y''(\pi)=-1$
5. $y=c_1+c_2x^2$ 是 $xy''-y'=0$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一个双参数解族，说明不能找到常数 c_1 和 c_2 使之满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$. 解释这个现象为什么不违背定理 4.1.
6. 求习题 5 解族的两个特解，使其满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=0$.
7. $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ 是 $x''+\omega^2x=0$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的通解，证明满足初始条件的 $x(0)=x_0$，$x'(0)=x_1$ 的解是
$$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{x_1}{\omega}\sin\omega t.$$
8. 利用习题 7 中 $x''+\omega^2x=0$ 的通解，证明满足初始条件 $x(t_0)=x_0$，$x'(t_0)=x_1$ 的解是习题 7 中的解平移 t_0 个单位后得到的解：
$$x(t)=x_0\cos\omega(t-t_0)+\frac{x_1}{\omega}\sin\omega(t-t_0).$$

在习题 9、10 中，分别求出一个以 $x=0$ 为中心的区间，使得每个初值问题有唯一解.

9. $(x-2)y''+3y=x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$
10. $y''+(\tan x)y=e^x$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$
11. 利用习题 1 中的解族求出 $y''-y=0$ 的一个解，使其满足边界条件 $y(0)=0$，$y(1)=1$.
12. 利用习题 5 中的解族求出 $xy''-y'=0$ 的一个解，使其满足边界条件 $y(0)=1$，$y'(1)=6$.

在习题 13 和 14 中，所给的双参数解族是相应微分方程在区间$(-\infty,+\infty)$上的解. 确定是否能找到满足边界条件的特解.

13. $y=c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x$；$y''-2y'+2y=0$

(a)$y(0)=1$，$y'(\pi)=0$　　(b)$y(0)=1$，$y(\pi)=-1$

(c)$y(0)=1$，$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$　　(d)$y(0)=0$，$y(\pi)=0$

14. $y=c_1x^2+c_2x^4+3$；$x^2y''-5xy'+8y=24$

(a)$y(-1)=0$，$y(1)=4$　　(b)$y(0)=1$，$y(1)=2$

(c)$y(0)=3$，$y(1)=0$　　(d)$y(1)=3$，$y(2)=15$

4.1.2 齐次方程

在习题 15～22 中，确定所给的函数集在$(-\infty,+\infty)$上是否是线性无关的.

15. $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=4x-3x^2$　　16. $f_1(x)=0$，$f_2(x)=x$，$f_3(x)=e^x$

17. $f_1(x)=5$，$f_2(x)=\cos^2 x$，$f_3(x)=\sin^2 x$

18. $f_1(x)=\cos 2x$，$f_2(x)=1$，$f_3(x)=\cos^2 x$

19. $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x-1$，$f_3(x)=x+3$

20. $f_1(x)=2+x$，$f_2(x)=2+|x|$

21. $f_1(x)=1+x$，$f_2(x)=x$，$f_3(x)=x^2$

22. $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=e^{-x}$，$f_3(x)=\sinh x$

在习题 23～30 中，证明所给的函数是微分方程在指定区间上解的基本集，并形成通解.

23. $y''-y'-12y=0$；e^{-3x}，e^{4x}，$(-\infty, +\infty)$

24. $y''-4y=0$；$\cosh 2x$，$\sinh 2x$，$(-\infty, +\infty)$

25. $y''-2y'+5y=0$；$e^x\cos 2x$，$e^x\sin 2x$，$(-\infty, +\infty)$

26. $4y''-4y'+y=0$；$e^{x/2}$，$xe^{x/2}$，$(-\infty, +\infty)$

27. $x^2y''-6xy'+12y=0$；x^3，x^4，$(0, +\infty)$

28. $x^2y''+xy'+y=0$；$\cos(\ln x)$，$\sin(\ln x)$，$(0, \infty)$

29. $x^3y'''+6x^2y''+4xy'-4y=0$；$x$，$x^{-2}$，$x^{-2}\ln x$，$(0, \infty)$

30. $y^{(4)}+y''=0$；1，x，$\cos x$，$\sin x$，$(-\infty, +\infty)$

4.1.3 非齐次方程

在习题 31～34 中，证明所给的双参数函数族是非齐次微分方程在指定区间上的通解.

31. $y''-7y'+10y=24e^x$

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{5x}+6e^x$，$(-\infty, +\infty)$

32. $y''+y=\sec x$；

$y=c_1\cos x+c_2\sin x+x\sin x+(\cos x)\ln(\cos x)$，$(-\pi/2, \pi/2)$

33. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+4x-12$；

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+x^2e^{2x}+x-2$，$(-\infty, +\infty)$

34. $2x^2y''+5xy'+y=x^2-x$；

$y=c_1x^{-1/2}+c_2x^{-1}+\frac{1}{15}x^2-\frac{1}{6}x$，$(0, \infty)$

35. (a)证明 $y_{p_1}=3e^{2x}$ 和 $y_{p_2}=x^2+3x$ 分别是如下方程的特解：

$$y''-6y'+5y=-9e^{2x}$$

及

$$y''-6y'+5y=5x^2+3x-16.$$

(b)利用(a)求出如下方程的特解：

$$y''-6y'+5y=5x^2+3x-16-9e^{2x}$$

和

$$y''-6y'+5y=-10x^2-6x+32+e^{2x}.$$

36. (a)求 $y''+2y=10$ 的一个特解.

(b)求 $y''+2y=-4x$ 的一个特解.

(c)求 $y''+2y=-4x+10$ 的一个特解.

(d)求 $y''+2y=8x+5$ 的一个特解.

讨论题

37. 令 $n=1, 2, 3, \cdots$，讨论如何利用 $D^nx^{n-1}=0$ 和 $D^nx^n=n!$ 来求解所给微分方程的通解.

(a) $y''=0$

(b) $y'''=0$

(c) $y^{(4)}=0$

(d) $y''=2$

(e) $y'''=6$

(f) $y^{(4)}=24$

38. 设 $y_1=e^x$ 和 $y_2=e^{-x}$ 是齐次线性微分方程的两个解. 解释 $y_3=\cosh x$ 和 $y_4=\sinh x$ 为什么也是方程的解.

39. (a)证明 $y_1=x^3$ 和 $y_2=|x|^3$ 是微分方程 $x^2y''-4xy'+6y=0$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上的线性无关解.
   (b)证明 $W(y_1, y_2)=0$ 对所有实数 x 成立. 这个结果违反定理 4.3 吗? 请解释.
   (c)证明 $Y_1=x^3$ 和 $Y_2=x^2$ 是(a)中微分方程在$(-\infty, +\infty)$上的线性无关解.
   (d)求微分方程的一个解, 使其满足 $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
   (e)根据叠加原理定理 4.2, 线性组合 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 和 $Y=c_1Y_1+c_2Y_2$ 是微分方程的解. 讨论这些线性组合中哪些是微分方程在$(-\infty, +\infty)$上的通解.
40. 函数 $f_1(x)=e^{x+2}$, $f_2(x)=e^{x-3}$组成的集合在$(-\infty, +\infty)$上是线性相关还是线性无关的? 讨论之.
41. 假定 y_1, y_2, …, y_k 是常系数n 阶齐次线性微分方程在$(-\infty, +\infty)$上的 k 个线性无关解. 根据定理 4.2 知 $y_{k+1}=0$ 也是微分方程的解. 解 y_1, y_2, ..., y_k, y_{k+1}组成的集合在$(-\infty, +\infty)$上是线性相关还是线性无关的? 讨论之.
42. 设 y_1, y_2, …y_k 是常系数n 阶齐次线性微分方程的k 个非平凡解, $k=n+1$. 解 y_1, y_2, …y_k 组成的集合在$(-\infty, +\infty)$上是线性相关还是线性无关的? 讨论之.

4.2 降阶法

二阶线性微分方程的研究是非常吸引人的, 也是非常重要的. 齐次方程

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \tag{1}$$

的解 y_1 是定义在区间 I 上的非平凡解, 但我们也可以求得它的第二个解 y_2. 本节的基本思想是形如(1)的方程可以通过用 y_1 换元将其降为一阶线性微分方程, 然后通过求解一阶微分方程, 得到(1)的第二个解 y_2.

降阶法 设 y_1 表示方程(1)在区间 I 上的非平凡解, 我们要求它的第二个解 y_2, 使得 y_1 和 y_2 在区间 I 上是线性无关的. 由 4.1 节知, 若 y_1 和 y_2 线性无关, 那么它们的商 y_2/y_1 在 I 上不是一个常数, 即有 $y_2(x)/y_1(x)=u(x)$或 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$成立. 这种方法称为降阶法, 因为我们必须由一阶线性微分方程解出 u.

例 1 通过降阶法求第二个解

给定 $y''-y=0$ 在$(-\infty, +\infty)$上的一个解 $y_1=e^x$, 用降阶法求它的第二个解 y_2.

解 若 $y=u(x)y_1(x)=u(x)e^x$, 则由乘积的导数法则得

$$y'=ue^x+e^xu', \quad y''=ue^x+2e^xu'+e^xu'',$$

从而得

$$y''-y=e^x(u''+2u')=0.$$

因为 $e^x\neq0$, 所以从最后一个方程得 $u''+2u'=0$. 如果用 $w=u'$换元, 那么用 u 表示的二阶线性微分方程可写为 $w'+2w=0$, 这是用 w 表示的一阶线性微分方程. 利用积分因子 e^{2x}, 我们有 $d[e^{2x}w]/dx=0$ 成立, 对其求积分, 得到 $w=c_1e^{-2x}$或 $u'=c_1e^{-2x}$. 再求一次积分, 可得 $u=-\frac{1}{2}c_1e^{-2x}+c_2$. 因此

$$y=u(x)e^x=-\frac{c_1}{2}e^{-x}+c_2e^x. \tag{2}$$

令 $c_2=0$, $c_1=-2$, 则可得第二个解 $y_2=e^{-x}$. 因为 $W(e^x, e^{-x})\neq0$ 对所有 x 均成立, 所以这两个解在$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的. ■

我们前面已经讲过 $y_1=e^x$ 和 $y_2=e^{-x}$ 是二阶线性方程两个线性无关解，实际上(2)式就是 $y''-y=0$ 在$(-\infty, +\infty)$上的通解.

一般情形 用 $a_2(x)$去除(1)式的两端，则可得到(1)的标准型

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \tag{3}$$

这里 $P(x)$和 $Q(x)$是区间 I 上的连续函数，令(3)式的一个已知解是 $y_1(x)$，并且在区间 I 上有 $y_1(x)\neq 0$ 成立. 如果定义 $y=u(x)y_1(x)$，那么有

$$y'=uy_1'+y_1u', \quad y''=uy_1''+2y_1'u'+y_1u'',$$

$$y''+Py'+Qy=u\underbrace{[y_1''+Py_1'+Qy_1]}_{0}+y_1u''+(2y_1'+Py_1)u'=0.$$

这蕴涵着

$$y_1u''+(2y_1'+Py_1)u'=0 \text{ 或 } y_1w'+(2y_1'+Py_1)w=0, \tag{4}$$

其中 $w=u'$. (4)中后一个等式是线性的和可分离的. 分离变量并求积分，可得

$$\frac{dw}{w}+2\frac{y_1'}{y_1}dx+Pdx=0,$$

$$\ln|wy_1^2|=-\int Pdx+c \text{ 或 } wy_1^2=c_1e^{-\int Pdx}.$$

我们从最后一个方程中解出 w，利用 $w=u'$，再求一次积分，得

$$u=c_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx+c_2.$$

令 $c_1=1$，$c_2=0$，可以从 $y=u(x)y_1(x)$求出方程(3)的第二个解

$$y_2=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{5}$$

可以验证(5)中定义的 $y_2(x)$满足方程(3)，并且 y_1 和 y_2 在任意 $y_1(x)$不为零的区间上线性无关.

例 2 **公式(5)定义的第二个解**

函数 $y_1=x^2$ 是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的一个解. 求这个微分方程在$(0, +\infty)$上的通解.

解 由方程的标准型

$$y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0,$$

我们可从(5)中得

$$y_2=x_2\int\frac{e^{3\int dx/x}}{x^4}dx \qquad \leftarrow e^{3\int dx/x}=e^{\ln x^3}=x^3$$

$$=x^2\int\frac{dx}{x}=x^2\ln x.$$

在$(0, +\infty)$上的通解为 $y=c_1y_1+c_2y_2$，即 $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$. ■

注 (ⅰ)这里用到的公式(5)，在下一节以及 4.7、6.2 节中都要用到，利用它可以大大简化求解的过程. 至于是否需要牢记(5)式或是否需要了解降阶法的第一个原理还

要看学习的需要.

(ⅱ)降阶法可以用来求形如 $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ 的非齐次方程的通解，而无论其相关齐次方程的解 y_1 是否知道. 请见练习 4.2 中的习题 17～20.

练习 4.2

在习题 1～16 中，函数 $y_1(x)$ 是所给微分方程的解. 利用降阶法或公式(5)求第二个解 $y_2(x)$.

1. $y''-4y'+4y=0$； $y_1=e^{2x}$
2. $y''+2y'+y=0$； $y_1=xe^{-x}$
3. $y''+16y=0$； $y_1=\cos 4x$
4. $y''+9y=0$； $y_1=\sin 3x$
5. $y''-y=0$； $y_1=\cosh x$
6. $y''-25y=0$； $y_1=e^{5x}$
7. $9y''-12y'+4y=0$； $y_1=e^{2x/3}$
8. $6y''+y'-y=0$； $y_1=e^{x/3}$
9. $x^2y''-7xy'+16y=0$； $y_1=x^4$
10. $x^2y''+2xy'-6y=0$； $y_1=x^2$
11. $xy''+y'=0$； $y_1=\ln x$
12. $4x^2y''+y=0$； $y_1=x^{1/2}\ln x$
13. $x^2y''-xy'+2y=0$； $y_1=x\sin(\ln x)$
14. $x^2y''-3xy'+5y=0$； $y_1=x^2\cos(\ln x)$
15. $(1-2x-x^2)y''+2(1+x)y'-2y=0$； $y_1=x+1$
16. $(1-x^2)y''+2xy'=0$； $y_1=1$

在习题 17～20 中，函数 $y_1(x)$ 是相关齐次方程的解. 利用降阶法求所给齐次方程的第二个解 $y_2(x)$ 及非齐次方程的一个特解.

17. $y''-4y=2$； $y_1=e^{-2x}$
18. $y''+y'=1$； $y_1=1$
19. $y''-3y'+2y=5e^{3x}$； $y_1=e^x$
20. $y''-4y'+3y=x$； $y_1=e^x$

讨论题

21. (a)证明二阶方程 $ay''+by'+cy=0$ 至少有一个形如 $y_1=e^{m_1x}$ 的解，a、b、c、m_1 均是常数.
    (b)解释(a)中的微分方程为什么一定有一个形如 $y_2=e^{m_2x}$ 或 $y_2=xe^{m_1x}$ 的解，m_1、m_2 是常数.
    (c)回顾习题 1～8. 请解释(a)、(b)中的结论为什么和习题 3～5 的答案不矛盾.
22. 证明 $y_1(x)=x$ 是 $xy''-xy'+y=0$ 的解. 用降阶法求它的第二个解 $y_2(x)$，这个解的形式为无穷级数. 求 $y_2(x)$ 的定义域.

计算机实验作业

23. (a)证明 $y_1(x)=e^x$ 是 $xy''-(x+10)y'+10y=0$ 的解.
    (b)利用(5)式求第二个解 $y_2(x)$. 用 CAS 软件计算所需要的积分.
    (c) 用定理 4.2 的推论(A) 解释为什么这第二个解可以写成 $y_2(x)=\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}x^n$.

4.3 常系数齐次线性方程

我们已经学习过一阶线性微分方程 $y'+ay=0$，a 是常数，在区间$(-\infty, +\infty)$上有一个指数解 $y=c_1e^{-ax}$. 因此，我们自然会想到是否所有定义在$(-\infty, +\infty)$上的齐次线性高阶微分方程

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0 \tag{1}$$

都有指数解，这里 a_i，$i=0, 1, \cdots, n$ 都是实常数，并且 $a_n\neq 0$. 意外的是(1)的所有解都是指数函数或用指数函数构造的函数.

辅助方程 我们先考虑一个特殊的二阶方程

$$ay''+by'+cy=0. \tag{2}$$

检验 $y=e^{mx}$ 是否是(2)的解，把 $y'=me^{mx}$ 及 $y''=m^2e^{mx}$ 代入方程(2)得

$$am^2e^{mx}+bme^{mx}+ce^{mx}=0 \text{ 或 } e^{mx}(am^2+bm+c)=0.$$

因为 e^{mx} 对所有 x 都不为零，所以指数函数满足微分方程(2)唯一的可能是 m 是二次方程

$$am^2+bm+c=0 \tag{3}$$

的根．这个方程称为微分方程(2)的辅助方程(auxiliary equation)．因为(3)式的两个根是 $m_1=(-b+\sqrt{b^2-4ac})/2a$ 和 $m_2=(-b-\sqrt{b^2-4ac})/2a$，所以，(2)的一般解有三种形式，分别对应于三种情况：

- m_1 和 m_2 是实数，并且不相等($b^2-4ac>0$)．
- m_1 和 m_2 是实数，并且是相等的($b^2-4ac=0$)．
- m_1 和 m_2 是共轭复数($b^2-4ac<0$)．

下面我们依次讨论这三种情形．

情形Ⅰ：两个不同的实根 在方程(3)有两个不相等的实根 m_1，m_2 的假设下，我们可以求出两个解 $y_1=e^{m_1x}$ 和 $y_2=e^{m_2x}$．可以证明这两个函数在$(-\infty，+\infty)$上是线性无关的，因此它们形成了一个基本解组，由此可得(2)在此区间上的通解是

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}. \tag{4}$$

情形Ⅱ：两个相等的实根 当 $m_1=m_2$ 时，我们只能得到一个指数解 $y_1=e^{m_1x}$．从二次方程中我们可以求出 $m_1=-b/2a$，因为只有此时才有 $m_1=m_2$，并使得 $b^2-4ac=0$ 成立．由 4.2 节中的(5)式可知，方程的第二个解为

$$y_2=e^{m_1x}\int\frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}dx=e^{m_1x}\int dx=xe^{m_1x}. \tag{5}$$

在(5)中，我们利用了 $-b/a=2m_1$ 这个条件．那么，方程的通解是

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}. \tag{6}$$

情形Ⅲ：两个互为共轭复数的解 若 m_1，m_2 是复数，则可以写成 $m_1=\alpha+i\beta$ $m_2=\alpha-i\beta$，这里 α、$\beta>0$ 且是实数，$i^2=-1$．最后，同情形Ⅰ一样，我们有通解

$$y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

但是，实践中我们更喜欢使用实数而不是复数．为了解决这个问题，我们可以使用欧拉公式：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

这里 θ 是任意的实数.[㊀]那么，接下来就有

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x \text{ 和 } e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x \tag{7}$$

成立，这里用到了 $\cos(-\beta x)=\cos\beta x$ 和 $\sin(-\beta x)=-\sin\beta x$．把(7)式的两个方程先相加，然后再相减，可以分别得到

$$e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}=2\cos\beta x \text{ 和 } e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}=2i\sin\beta x.$$

因为 $y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ 是(2)的解，对任何 C_1，C_2 都成立，依次令 $C_1=C_2=1$ 和 $C_1=1$

㊀ 欧拉方程的推导是把 $x=i\theta$ 代入 Maclaurin 级数 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 中，$i^2=-1$，$i^3=-i$，…，然后把级数分成实数和虚数部分．根据有关性质，再用 $e^{i\theta}$ 的定义 $\cos\theta+i\sin\theta$，等式两边相等即可．

$C_2=-1$，得到两个解：

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x} \text{ 和 } y_2=e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

但有

$$y_1=e^{\alpha x}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})=2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

和

$$y_2=e^{\alpha x}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})=2ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

成立. 因此由定理 4.2 的推论(A)得，上面最后两个结果说明 $e^{\alpha x}\cos\beta x$ 和 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 是(2)的实解. 此外，这些解在$(-\infty,+\infty)$上形成了一个基本解组，因此，通解是

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x). \tag{8}$$

例 1　二阶微分方程

解下列微分方程.

(a)$2y''-5y'-3y=0$　　(b) $y''-10y'+25y=0$　　(c) $y''+4y'+7y=0$

解　先写出辅助方程，再求出辅助方程的根，最后再写出相应的通解.

(a)$2m^2-5m-3=(2m+1)(m-3)$，$m_1=-1/2$，$m_2=3$.

由(4)式得，$y=c_1e^{-x/2}+c_2e^{3x}$.

(b)$m^2-10m+25=(m-5)^2$，$m_1=m_2=5$.

由(6)式得，$y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$.

(c)$m^2+4m+7=0$，$m_1=-2+\sqrt{3}i$，$m_2=-2-\sqrt{3}\,i$.

由(8)式并令 $\alpha=-2$，$\beta=\sqrt{3}$，$y=e^{-2x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$. ■

例 2　初值问题

解 $4y''+4y'+17y=0$，$y(0)=-1$，$y'(0)=2$.

解　由二次求根公式，我们可以求出辅助方程 $4m^2+4m+17=0$ 的根是 $m_1=-1/2+2i$，$m_2=-1/2-2i$. 因此，由(8)式我们有 $y=e^{-x/2}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$. 利用条件 $y(0)=-1$，可从 $e^0(c_1\cos 0+c_2\sin 0)=-1$ 中解出 $c_1=-1$. 对 $y=e^{-x/2}(-\cos 2x+c_2\sin 2x)$求微分并利用 $y'(0)=2$，可得 $2c_2+1/2=2$ 或 $c_2=3/4$. 因此，初值问题的解是 $y=e^{-x/2}(-\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x)$. 在图 4.4 中，我们可以看到这个解是不稳定的，当 $x\to+\infty$时，$y\to 0$，$x\to-\infty$时 $|y|\to+\infty$. ■

应该知道的两个方程　两个微分方程

$$y''+k^2y=0 \text{ 和 } y''-k^2y=0,$$

其中 k 是实数，它们在应用数学中是很重要的. 就 $y''+k^2y=0$ 来说，辅助方程 $m^2+k^2=0$ 只有虚根 $m_1=ki$ 和 $m_2=-ki$. 令(8)中的 $\alpha=0$ 及 $\beta=k$，则微分方程的通解为

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx. \tag{9}$$

另一方面，$y''-k^2y=0$ 的辅助方程 $m^2-k^2=0$ 有两个不同的实根，$m_1=k$ 和 $m_2=-k$，因此由(4)可知，微分方程的通解是

$$y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}. \tag{10}$$

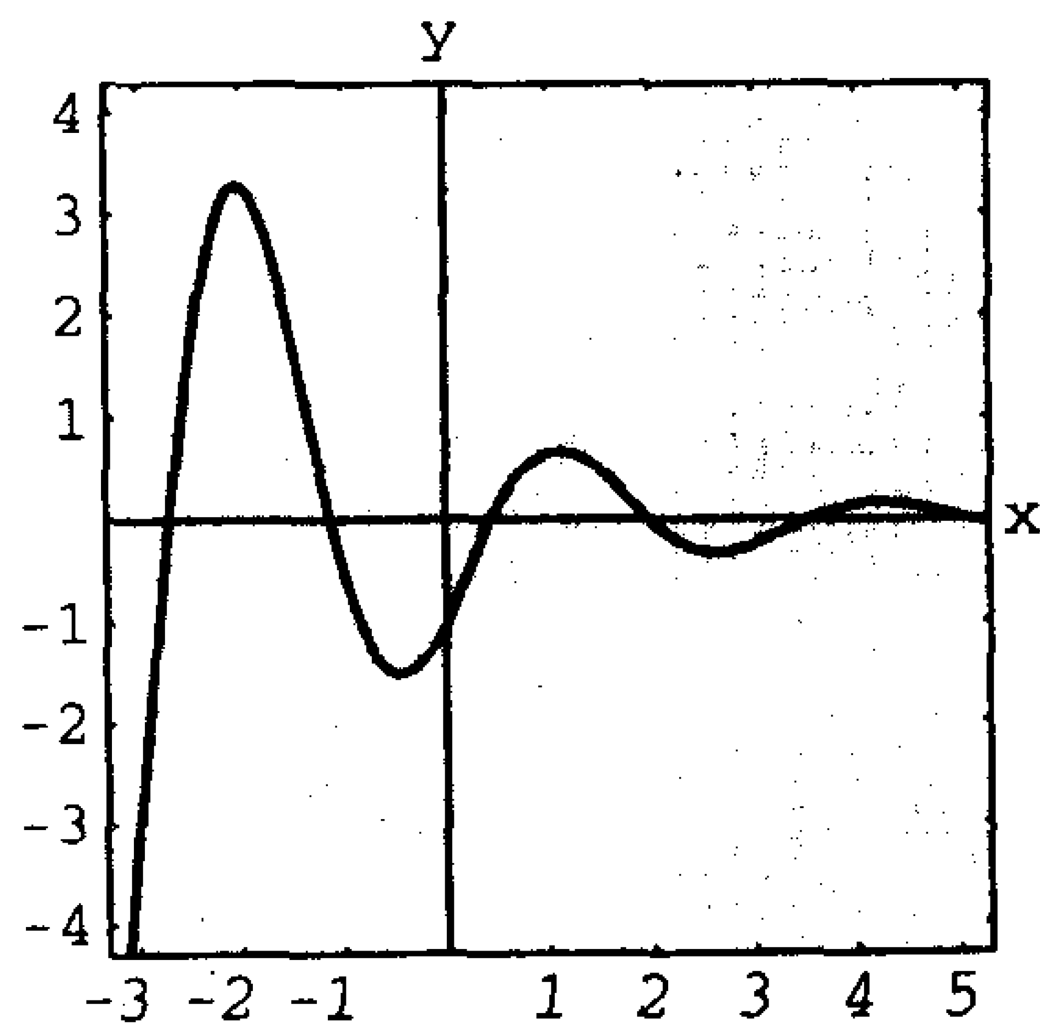


图 4.4

注意，若分别令(10)中的 $c_1=c_2=1/2$ 和 $c_1=1/2$，$c_2=-1/2$，则可以得到特解 $y=1/2(e^{kx}+e^{-kx})=\cosh kx$ 和 $y=1/2(e^{kx}-e^{-kx})=\sinh kx$. 因为，$\cosh kx$ 和 $\sinh kx$ 在 x 轴的任何区间上都是线性无关的，因此 $y''-k^2y=0$ 的通解的另一种形式为

$$y = c_1\cosh kx + c_2\sinh kx. \tag{11}$$

请参考练习 4.3 的习题 41、42、49.

高阶方程 一般地，解形如(1)的 n 阶微分方程，其中 a_i，$i=0$，1，…，n 都是实常数，我们必须解 n 次多项式

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0. \tag{12}$$

若(12)的所有根都是实数，并且都不相同，则(1)式的通解为

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}.$$

要想归纳高阶方程在情形Ⅱ和情形Ⅲ的情况是很困难的，因为次数大于 2 的辅助方程的根有很多种组合形式. 例如，一个五次方程可能有五个不同的实根，也可能有三个不同的实根和两个复根，也可能有一个实根和四个复根，亦或有五个相等的实根，亦或有五个实根，其中两个相等，等等. 当 m_1 是 n 次辅助方程的 k 重根时(即有 k 个根等于 m_1)，那么它的线性无关解是

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \cdots, x^{k-1}e^{m_1x},$$

通解是线性组合

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}.$$

最后，读者应该记住当方程的系数是实数时，辅助方程的复根总是以共轭的形式成对出现. 因此，我们可知三次多项式至多有两个复根.

例 3 **三阶微分方程**

解 $y'''+3y''-4y=0$.

解 请读者自行证明 $m^3+3m^2-4=0$ 的一个根是 $m_1=1$，因此 $m-1$ 是 $m^3+3m^2-4=0$ 的一个因式. 通过因式分解，我们可得

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m-1)(m^2+4m+4) = (m-1)(m+2)^2,$$

所以其他的根是 $m_2=m_3=-2$. 因此，方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$. ■

例 4 **四阶微分方程**

解 $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$.

解 辅助方程是 $m^4+2m^2+1=(m^2+1)^2=0$，它的根是 $m_1=m_3=i$ 和 $m_2=m_4=-i$. 因此由情形Ⅱ，可得解是

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix} + C_3xe^{ix} + C_4xe^{-ix}.$$

利用欧拉公式，$C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$ 重新标记常数以后可改写为

$$c_1\cos x + c_2\sin x.$$

类似地，$x(C_3e^{ix}+C_4e^{-ix})$ 可以写成 $x(c_3\cos x+c_4\sin x)$. 因此，通解是

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_4x\sin x.$$ ■

例 4 说明了一种特殊情形，就是当辅助方程有重复根的情形. 一般地，若 $m_1=\alpha+i\beta(\beta>0)$ 是实系数辅助方程的 k 重复根，那么它的共轭复数 $m_2=\alpha-i\beta$ 也是 k 重根. 由方程 $2k$ 个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, xe^{(\alpha+i\beta)x}, x^2e^{(\alpha+i\beta)x}, \cdots, x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x}, xe^{(\alpha-i\beta)x}, x^2e^{(\alpha-i\beta)x}, \cdots, x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

我们可以得出，利用欧拉方程，对应微分方程的通解一定包括 $2k$ 个线性无关实解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的线性组合. 在例 4 中，$k=2$，$\alpha=0$，$\beta=1$.

解常系数微分方程最难的地方是求解二次以上辅助方程的根. 例如，解 $3y'''+5y''+10y'-4y=0$，我们必须解 $3m^3+5m^2+10m-4=0$. 我们可以先检验这个方程是否存在有理根. 若 $m_1=p/q$ 是整系数辅助方程 $a_nm^n+\cdots+a_1m+a_0=0$ 的有理根(用不可约分数表示)，那么 p 是 a_0 的因子，q 是 a_n 的因子. 对于这个三次辅助方程，$a_0=-4$ 和 $a_n=3$ 的因子是 p：±1，±2，±4 和 q：±1，±3，所有可能的有理根为 p/q：±1，±2，±4，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$，$\pm\frac{4}{3}$. 这些根可以逐一检验，也就是说，用综合除法检验. 用这种方法，我们可以找到 $m_1=1/3$ 和因式分解

$$3m^3+5m^2+10m-4=(m-1/3)(3m^2+6m+12).$$

通过二次根的公式可以求出另外的根是 $m_2=-1+\sqrt{3}i$ 和 $m_3=-1-\sqrt{3}i$. 因此，

$$3y'''+5y''+10y'-4y=0 \text{ 的通解是 } y=c_1e^{x/3}+e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x).$$

计算机的使用 求多项式的根或根的近似解可以用计算器或计算机软件解出. 计算软件 Mathematica 和 Maple 都能按照代数公式解小于五次的多项式方程(只含有一个变量). 例如上一段中讲到的辅助方程，在软件中用命令

Solve[3m^ 3 + 5m^ 2 + 10m − 4 == 0,m](在 Mathematica 中)

solve(3* m^ 3 + 5* m^ 2 + 10* m − 4,m); (在 Maple 中)

就会立刻得到它的根，1/3，$-1+\sqrt{3}i$，$-1-\sqrt{3}i$. 对于更高次的辅助方程来说，可能需要使用 Mathematica 中数值计算的命令，例如 NSolve 和 FindRoot. 因为这些软件解多项式方程的能力非常强大，所以可以很容易解出齐次线性常系数微分方程的显式解. 例如，分别输入

DSolve[y''[x] + 2y'[x] + 2y[x] == 0,y[x],x](在 Mathematica 中)

dsolve(diff(y(x),x $ 2) + 2* diff(y(x),x) + 2* y(x) = 0,y(x));(在 Maple 中)

就会得到

$$\mathbf{y[x] -> \frac{C[2]Cos[x] - C[1]Sin[x]}{E^x}}$$

和

$$\mathbf{y(x) = _C1exp(-x)sin(x) + _C2exp(-x)cos(x)} \tag{13}$$

解释一下，它表示 $y=c_2e^{-x}\cos x+c_1e^{-x}\sin x$ 是 $y''+2y'+2y=0$ 的解.

在 Ralph Palmer Agnew[⊖] 写的经典教材《Differential Equations》中，有以下解释：

期望学生在本课程中学会用计算机或其他能解像(14)这样的方程的软硬件是不合理的

⊖ McGraw-Hill, New York, 1960.

$$4.317\frac{d^4y}{dx^4}+2.179\frac{d^3y}{dx^3}+1.416\frac{d^2y}{dx^2}+1.295\frac{dy}{dx}+3.169y=0. \tag{14}$$

尽管计算机软件的计算能力在未来几年是否会改进是有争议的，但是毫无疑问，计算技术一定会不断进步的．如果能使用计算机软件，方程(14)是可能用其来计算的．在简化和重新标记输出结果以后，Mathematica 给出了如下(近似)通解：

$$y=c_1e^{-0.728\,852x}\cos(0.618\,605x)+c_2e^{-0.728\,852x}\sin(0.618\,605x)$$
$$+c_3e^{0.476\,478x}\cos(0.759\,081x)+c_4e^{0.476\,478x}\sin(0.759\,081x).$$

我们注意到 Mathematica 及 Maple 中的命令 DSolve 和 dsolve 像任何 CAS 一样，都有它们的局限性．

最后，如果要解四阶微分方程的初值问题，那么我们必须要解一个由四个线性方程构成的方程组，即用微分方程的通解和初值条件解四个未知变量(通解中的 c_1，c_2，c_3，c_4)．用 CAS 解方程组可以节省很多时间．请参考练习 4.3 中的习题 63、64 和第 4 章复习题中的习题 35.

练习 4.3

在习题 1～14 中，求解二阶微分方程的通解.

1. $4y''+y'=0$
2. $y''-36y=0$
3. $y''-y'-6y=0$
4. $y''-3y'+2y=0$
5. $y''+8y'+16y=0$
6. $y''-10y'+25y=0$
7. $12y''-5y'-2y=0$
8. $y''+4y'-y=0$
9. $y''+9y=0$
10. $3y''+y=0$
11. $y''-4y'+5y=0$
12. $2y''+2y'+y=0$
13. $3y''+2y'+y=0$
14. $2y''-3y'+4y=0$

在习题 15～28 中，求解高阶微分方程的通解.

15. $y'''-4y''-5y'=0$
16. $y'''-y=0$
17. $y'''-5y''+3y'+9y=0$
18. $y'''+3y''-4y'-12y=0$
19. $\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{d^2u}{dt^2}-2u=0$
20. $\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}-4x=0$
21. $y'''+3y''+3y'+y=0$
22. $y'''-6y''+12y'-8y=0$
23. $y^{(4)}+y'''+y''=0$
24. $y^{(4)}-2y''+y=0$
25. $16\frac{d^4y}{dx^4}+24\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$
26. $\frac{d^4y}{dx^4}-7\frac{d^2y}{dx^2}-18y=0$
27. $\frac{d^5u}{dr^5}+5\frac{d^4u}{dr^4}-2\frac{d^3u}{dr^3}-10\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}+5u=0$
28. $2\frac{d^5x}{ds^5}-7\frac{d^4x}{ds^4}+12\frac{d^3x}{ds^3}+8\frac{d^2x}{ds^2}=0$

在习题 29～36 中，解所给的初值问题.

29. $y''+16y=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=-2$
30. $\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=0$，$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$
31. $\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}-5y=0$，$y(1)=0$，$y'(1)=2$
32. $4y''-4y'-3y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=5$
33. $y''+y'+2y=0$，$y(0)=y'(0)=0$

34. $y''-2y'+y=0$，$y(0)=5$，$y'(0)=10$

35. $y'''+12y''+36y'=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$，$y''(0)=-7$

36. $y'''+2y''-5y'-6y=0$，$y(0)=y'(0)=0$，$y''(0)=1$

在习题37～40中，解所给的边界值问题.

37. $y''-10y'+25y=0$，　$y(0)=1$，　$y(1)=0$

38. $y''+4y=0$，　$y(0)=0$，　$y(\pi)=0$

39. $y''+y=0$，　$y'(0)=0$，　$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

40. $y''-2y'+2y=0$，　$y(0)=1$，　$y(\pi)=1$

在习题41和42中，先用形如(10)的通解解所给的问题，再用形如(11)的通解解之.

41. $y''-3y=0$，　$y(0)=1$，　$y'(0)=5$

42. $y''-y=0$，　$y(0)=1$，　$y'(1)=0$

在习题43～48中，每个图形分别表示了下列微分方程一个特解的图形.

(a) $y''-3y'-4y=0$　　(b) $y''+4y=0$　　(c) $y''+2y'+y=0$

(d) $y''+y=0$　　(e) $y''+2y'+2y=0$　　(f) $y''-3y'+2y=0$

找出每个解曲线对应的微分方程，并给出理由.

43.

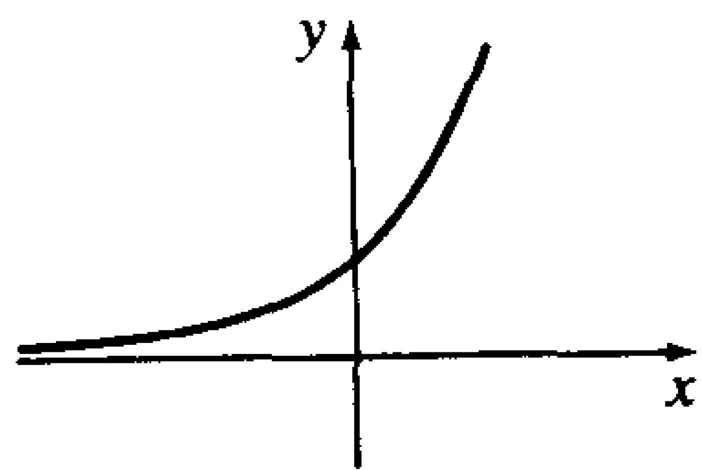


图 4.5

44.

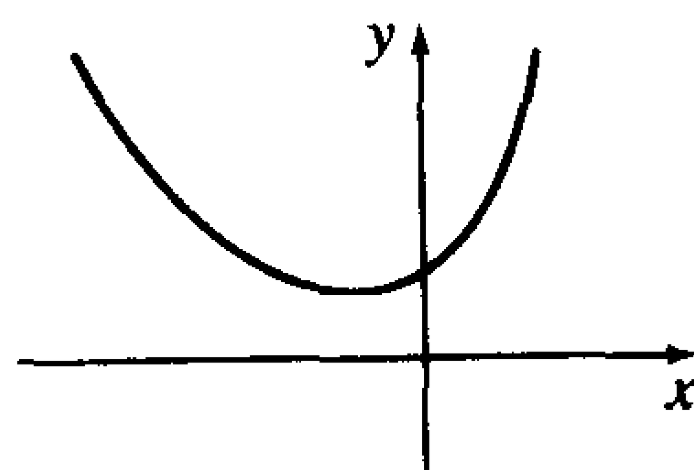


图 4.6

45.

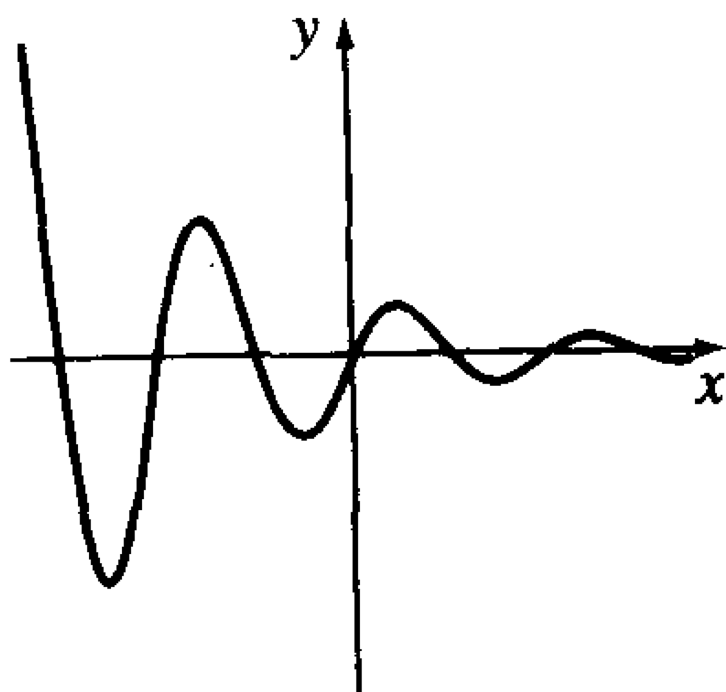


图 4.7

46.

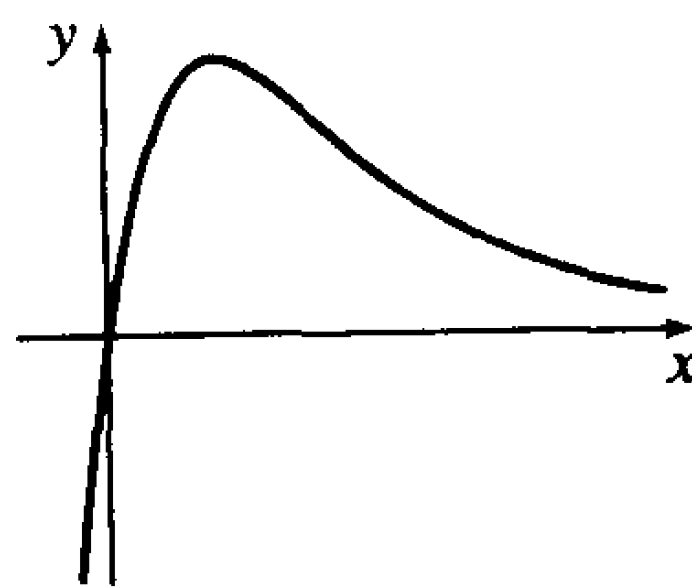


图 4.8

47.

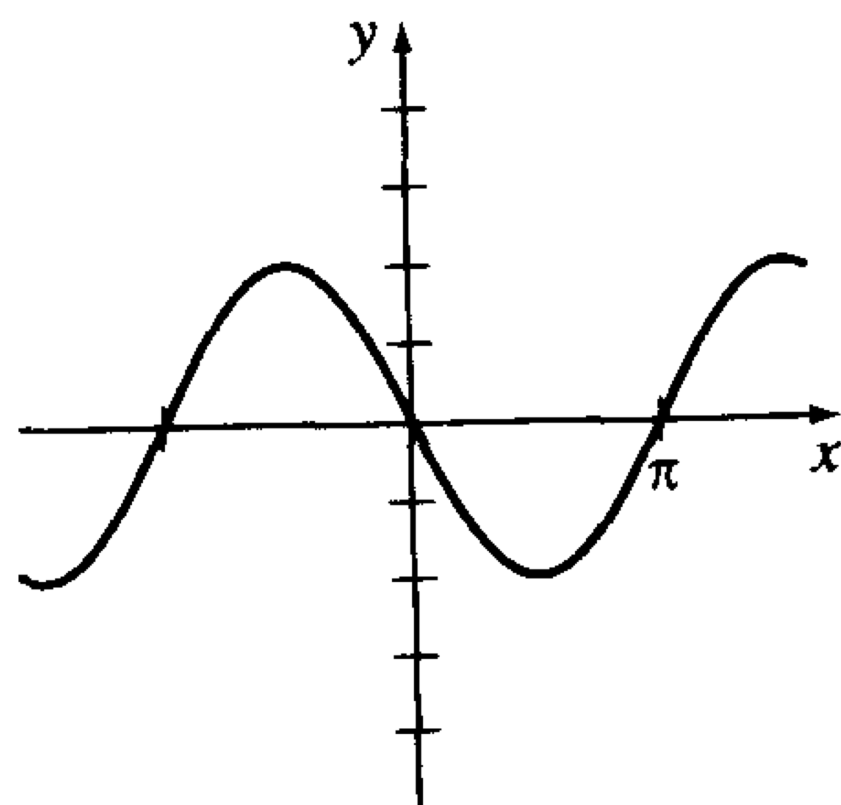


图 4.9

48.

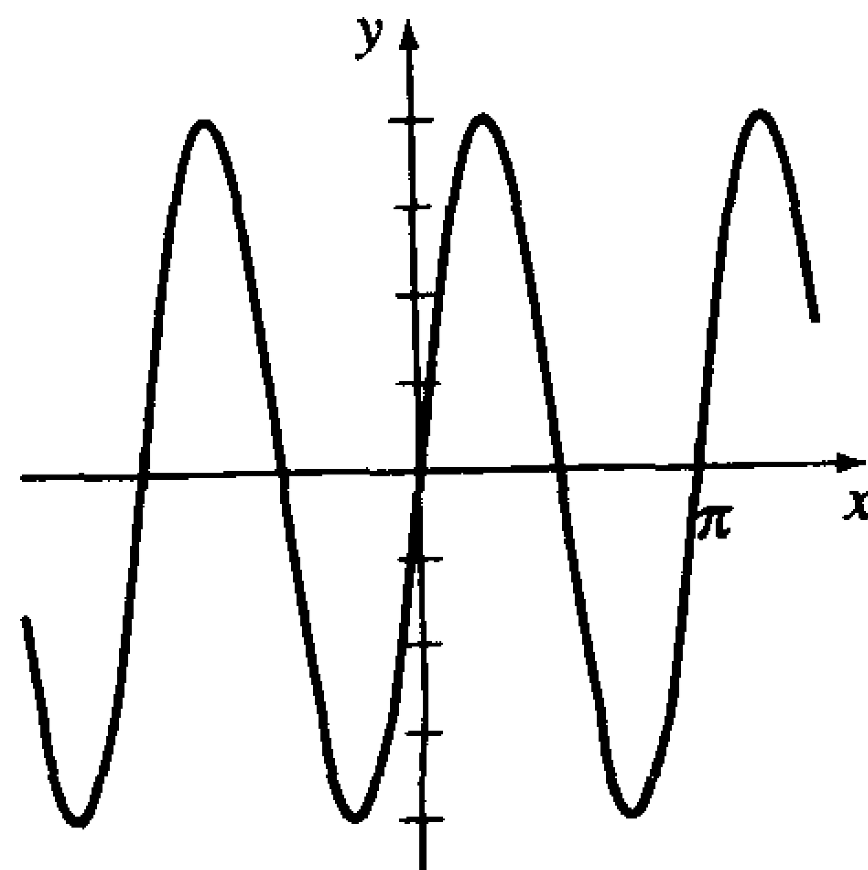


图 4.10

49. 回顾 1.3 节中关于下滑链条的讨论，并考察图 1.21.

(a)用本节(11)的形式求解 1.3 节微分方程(16)的通解，

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{64}{L}x=0.$$

(b)求满足初始条件的特解.

(c)设链条的总长度为 $L=20\text{ft}$，$x_0=1$. 求链条滑离支撑点时的速度.

讨论题

50. 回顾方程(13). 注意，当我们重写计算机产生的解时，$-C[1]$会变为$+c_1$. 为什么我们能这样做？

51. 三次辅助方程的根是 $m_1=4$，$m_2=m_3=-5$，那么相应的齐次线形微分方程是怎样的？答案唯一吗？讨论之.

52. 实系数三次辅助方程的两个根是 $m_1=-1/2$，$m_2=3+\mathrm{i}$. 相应的齐次线性微分方程是怎样的？

53. 求 $y'''+6y''+y'-34y=0$ 的通解，已知 $y_1=e^{-4x}\cos x$ 是它的一个解.

54. 考虑微分方程 $xy''+y'+xy=0$ 或 $y''+(1/x)y'+y=0$，$x>0$. 讨论如何从后一个方程识别出当 $x\to+\infty$时解的性态. 用数值求解程序证明之.

55. 为了解 $y^{(4)}+y=0$，我们必须求出 $m^4+1=0$ 的根. 用 CAS 可以很容易地解决这个问题，但是利用复数来手工计算也相当方便. 由观察知，$m^4+1=(m^2+1)^2-2m^2$，这个对我们有什么帮助呢？解这个微分方程.

56. 考虑二阶常系数方程 $y''+by'+cy=0$.

(a)若 $y(x)$是方程的解，讨论当 b、c 满足什么样的条件时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$ 成立.

(b)讨论 b、c 满足什么样的条件时，微分方程有满足边界条件 $y(0)=0$，$y(1)=0$ 的非平凡解.

57. 考虑边界值问题 $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(\pi/2)=0$. 讨论是否可以求出 λ 的值，使问题有(a)平凡解，(b)非平凡解.

58. 在微积分中，形如$\int e^{ax}f(x)dx$ 的不定积分可以用分部积分法做两次运算，合并等式右边的原积分，然后可以把原积分解出来，等式左边可得原积分与一个常数的乘积 $k\int e^{ax}f(x)dx$. 然后积分的值可以通过在等式两边同除以 k 得到. 讨论当 f 是什么类型的函数时，前述的计算方法是有效的. 答案应由一个微分方程得到. 仔细分析这个微分方程并解出 f.

计算机实验作业

在习题 59～62 中，请用计算机解辅助方程或直接求得微分方程的通解。如果使用 CAS 求得通解，请简化输出；若有必要，请用实函数表示该解。

59. $y'''-6y''+2y'+y=0$

60. $6.11y'''+8.59y''+7.93y'+0.778y=0$

61. $3.15y^{(4)}-5.34y''+6.33y'-2.03y=0$

62. $y^{(4)}+2y''-y'+2y=0$

在习题 63、64 中，用 CAS 软件解辅助方程，并得到微分方程的通解。然后把初始条件代入通解中，再用 CAS 解方程组可得到系数 c_i，$i=1,2,3,4$.

63. $2y^{(4)}+3y'''-16y''+15y'-4y=0$，$y(0)=-2$，$y'(0)=6$，$y''(0)=3$，$y'''(0)=\frac{1}{2}$

64. $y^{(4)}-3y'''+3y''-y'=0$，$y(0)=y'(0)=0$，$y''(0)=y'''(0)=1$

4.4 待定系数——叠加法[⊖]

为了解非齐次线性微分方程

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=g(x), \tag{1}$$

我们必须做两件事情：(ⅰ)求余函数 y_c，(ⅱ)求(1)的任意一个特解. 然后像 4.1 节中所讨论的，在区间上(1)的通解形式为 $y=y_c+y_p$. 在本节中，我们将用另外一种方法解出方程的特解 y_p.

待定系数法 (1)的余函数 y_c是其相关齐次方程 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$ 的通解. 在上一节中，我们学习了如何解这类常系数方程. 第一种求特解 y_p的方法称为待定系数法(method of undetermined coefficient). 这种方法的基本思想是猜想 y_p的形式，这里 y_p受输入函数 $g(x)$类型的影响. 比较明显地，这种方法只能用于满足如下条件的形如(1)的非齐次线性方程：

- 系数 $a_i(i=0, 1, \cdots, n)$都是常数.
- $g(x)$是常数 k，或多项式，或指数函数 $e^{\alpha x}$，或正弦、余弦函数 $\sin\beta x$ 和 $\cos\beta x$，或这些函数的有限和、有限积.

注 严格地讲，$g(x)=k$(常数)是一个多项式函数. 因为提到多项式人们不易一下想到常函数，所以为了表示强调，我们继续分开使用“常函数、多项式……”.

下列函数是我们讨论范围内的一些输入函数 $g(x)$的例子：

$$g(x)=10,\quad g(x)=x^2-5x,\quad g(x)=15x-6+8e^{-x},$$
$$g(x)=\sin 3x-5x\cos 2x,\quad g(x)=xe^x\sin x+(3x^2-1)e^{-4x}.$$

同时，$g(x)$也可以是下列函数的线性组合：

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad P(x)e^{\alpha x},\quad P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

这里 n 是一个非负整数，α，β是实数. 待定系数法不适用于(1)中有下列类型的 $g(x)$：

$$g(x)=\ln x,\quad g(x)=\frac{1}{x},\quad g(x)=\tan x,\quad g(x)=\sin^{-1}x,$$

等等. 含有最后几种 $g(x)$类型的微分方程我们将在 4.6 节中讨论.

常数、多项式、指数函数 $e^{\alpha x}$、正弦函数、余弦函数组成的函数集合有一个明显的性质，就是它们的和或积的导数仍然是同类函数集合的和或积. 因为导数的线性组合 $a_ny_p^{(n)}+a_{n-1}y_p^{(n-1)}+\cdots+a_1y_p'+a_0y_p$必须与 $g(x)$相等，所以假设 y_p与 $g(x)$的形式相同是合理的.

接下来的两个例子说明了如何使用这种基本方法.

例 1 用待定系数法求通解

解 $y''+4y'-2y=2x^2-3x+6.$ (2)

解 第一步，先解相关的齐次方程 $y''+4y'-2y=0$. 由二次求根的公式，我们可以求得辅助方程 $m^2+4m-2=0$ 的根是 $m_1=-2-\sqrt{6}$，$m_2=-2+\sqrt{6}$. 因此，余函数是

⊖ 教师请注意：本节的待定系数法是在非齐次方程的叠加原理定理 4.7 上发展起来的. 在 4.5 节中，将会介绍另一种不同的方法，使用了微分零化子的概念. 请斟酌.

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

第二步，因为函数 $g(x)$是二次多项式，所以我们假设特解的形式也是一个二次多项式：

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

我们要求出系数 A、B、C，使得 y_p是(2)的解．把 y_p和它的导数

$$y'_p = 2Ax + B \text{ 以及 } y''_p = 2A$$

代入微分方程(2)，可以得到：

$$\begin{aligned} y''_p + 4y'_p - 2y_p &= 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &= 2x^2 - 3x + 6. \end{aligned}$$

因为最后一个方程的左右两端是相等的，所以 x 幂相等的两项系数必然相等：

相等

$$\boxed{-2A}\,x^2 + \boxed{8A - 2B}\,x + \boxed{2A + 4B - 2C} = 2x^2 - 3x + 6.$$

也就是，

$$-2A = 2, \quad 8A - 2B = -3, \quad 2A + 4B - 2C = 6.$$

解方程组可得 $A=-1$，$B=-5/2$，$C=-9$. 因此，特解是

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

第三步，所给方程的通解为

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$ ■

例 2　用待定系数法求特解

求 $y''-y'+y=2\sin 3x$ 的一个特解.

解　很容易想到特解的形式应该是 $A\sin 3x$. 但由 $\sin 3x$ 的连续微分可得 $\sin 3x$ 和 $\cos 3x$，所以假设特解包括这两部分：

$$y_p = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

对 y_p求微分，并将其代入微分方程，整理后得：

$$y''_p - y'_p + y_p = (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\sin 3x = 2\sin 3x$$

或

相等

$$\boxed{-8A - 3B}\,\cos 3x + \boxed{3A - 8B}\,\sin 3x = 0\cos 3x + 2\sin 3x.$$

解方程组

$$-8A - 3B = 0, \quad 3A - 8B = 2,$$

可得 $A=6/73$，$B=-16/73$. 方程的特解是

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\sin 3x.$$ ■

如前所述，我们假定的特解 y_p 的形式是合理的，而不是胡乱猜测的．这种假设不但要考虑组成 $g(x)$ 的函数的形式，而且如我们在例 4 中看到的，还要考虑组成余函数 y_c 的函数形式．

例 3　叠加法解 y_p

解 $y''-2y'-3y=4x-5+6xe^{2x}$.　　(3)

解　第一步，首先，相关齐次方程 $y''-2y'-3y=0$ 的解为 $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$.

第二步，接下来，$g(x)$ 中的 $4x-5$ 表明特解包括一个线性多项式．进一步，因为 xe^{2x} 的导数含有 $2xe^{2x}$ 和 e^{2x} 两项，我们也可以假设特解包括 xe^{2x}，e^{2x}．换言之，g 是两个初等函数的和：

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \text{多项式} + \text{指数函数}$$

相应地，非齐次方程的叠加原理(定理 4.7)表明我们可以找到一个特解

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

这里 $y_{p_1}=Ax+B$，$y_{p_2}=Cxe^{2x}+Ee^{2x}$．把

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

代入方程(3)，整理后得

$$y''_p - 2y'_p - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x} \qquad (4)$$

由等式我们可以得到四个方程

$$-3A = 4, -2A - 3B = -5, -3C = 6, 2C - 3E = 0.$$

方程组中最后一个方程表示(4)中右边的 e^{2x} 项的系数为零．解之，可得 $A=-4/3$，$B=23/9$，$C=-2$，$E=-4/3$．因此，

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

第三步，方程的通解为

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$ ■

根据叠加原理(定理 4.7)，我们可以用解两个更简单方程的方法来解例 3．可以证明，把

$$y_{p_1} = Ax + B \text{ 代入 } y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

和

$$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \text{ 代入 } y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

依次可得 $y_{p_1}=-\frac{4}{3}x+23/9$ 和 $y_{p_2}=-(2x+4/3)e^{2x}$．那么(3)的特解为 $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$.

下一个例子说明了有时候即使是很“明显”的 y_p 形式的假设也不一定正确．

例 4　待定系数法的失效

求 $y''-5y'+4y=8e^x$ 的特解．

解　e^x 求导后还是它自己．因此，像我们在前几个例子中所做的那样，我们可以假设特解的形式为 $y_p=Ae^x$．但是把这个表达式代入微分方程后，会得到一个矛盾的结果 $0=8e^x$，所以对于 y_p 的假设是错误的．这里的难点是余函数 $y_c=c_1e^x+c_2e^{4x}$．我们的假设 Ae^x 已经在 y_c 中出

现过了，这就意味着 e^x 是相关齐次微分方程的一个解，当把 Ae^x 代入微分方程时就一定会等于零.

那么 y_p 的形式是怎样的呢？让我们看看能否从 4.3 节的情形Ⅱ中找到一个特解形如

$$y_p = Axe^x.$$

把 $y_p' = Axe^x + Ae^x$ 和 $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ 代入微分方程中，整理后得

$$y''_p - 5y'_p + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

从最后一个等式中，我们可以得出 A 的值为 $A=-8/3$. 因此，所给微分方程的一个特解为 $y_p = -\frac{8}{3}xe^x$. ■

例 1～3 和例 4 的差别说明我们要分两种情况考虑. 第一种情况就是例 1～3 中所考虑的.

情形Ⅰ 假设的特解函数中所包含的函数不是相关齐次微分方程的解.

在表 4.1 中，我们可以看到(1)中相应于 $g(x)$ 的特解. 理所当然地，特解 y_p 的函数形式不能和余函数 y_c 中的函数形式相同.

表 4.1 特解的形式

$g(x)$	y_p 的形式
1. 1(任意常数)	A
2. $5x+7$	$Ax+B$
3. $3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4. x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5. $\sin 4x$	$A\cos 4x+B\sin 4x$
6. $\cos 4x$	$A\cos 4x+B\sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10. $e^{3x}\sin 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}\sin 4x$
11. $5x^2\sin 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Ex^2+Fx+G)\sin 4x$
12. $xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+E)e^{3x}\sin 4x$

例 5 特解的形式——情形Ⅰ

求(a) $y''-8y'+25y=5x^3e^{-x}-7e^{-x}$,(b) $y''+4y=x\cos x$ 的特解形式.

解 (a)这里 $g(x)=(5x^3-7)e^{-x}$. 利用表 4.1 中第 9 项，我们假设特解的形式是：

$$y_p = (Ax^3+Bx^2+Cx+E)e^{-x}.$$

注意 y_p 和 $y_c = e^{4x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$ 中不能有相同的项.

(b)函数 $g(x)=x\cos x$ 和表 4.1 中的第 11 项有点类似，但是我们这里用线性形式而不是二次多项式的形式，并用 $\cos x$ 和 $\sin x$ 代替 y_p 中的 $\cos 4x$ 和 $\sin 4x$：

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + E)\sin x.$$

我们再一次看到 y_p和 $y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ 中没有重复项. ■

若 $g(x)$由 m 项表中类型的函数组成，那么(如例 3)可以把特解假设成相应于这些项的 y_{p_1}，y_{p_2}，…，y_{p_m}和的形式：

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}.$$

前述内容可以用另外一种方式表述.

情形 I 的形式规则 y_p是所有线性无关函数组成的线性组合，这些线性无关的函数可由 $g(x)$的重复微分得到.

例 6 用叠加法求 y_p——情形 I

求 $y''-9y'+14y=3x^2-5\sin 2x+7xe^{6x}$ 的特解形式.

解 相应于 $3x^2$，我们假设 $y_{p_1}=Ax^2+Bx+C$.

相应于$-5\sin 2x$，我们假设 $y_{p_2}=E\cos 2x+F\sin 2x$.

相应于 $7xe^{6x}$，我们假设 $y_{p_3}=(Gx+H)e^{6x}$.

那么，我们就假设特解为：

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + E\cos 2x + F\sin 2x + (Gx + H)e^{6x}.$$

这里没有和 $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{7x}$ 里相同的项. ■

情形 II 所假设的特解函数同时也是其相关齐次微分方程的一个解.

下个例子和例 4 类似.

例 7 特解——情形 II

求 $y''-2y'+y=e^x$的特解.

解 余函数是 $y_c=c_1e^x+c_2xe^x$. 如例 4，假设 $y_p=Ae^x$是不成立的，因为很明显 y_c中有一项 e^x是其相关齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的解. 此外，我们不能从 $y_p=Axe^x$求得方程的一个特解，因为 xe^x和 y_c中的项有重复. 我们再试一下

$$y_p = Ax^2e^x.$$

把它代入微分方程中，得到 $2Ae^x=e^x$，解得 $A=1/2$. 因此特解为 $y_p=\frac{1}{2}x^2e^x$. ■

再假设 $g(x)$是由 m 项表 4.1 中的函数形式组成的，并且通常设特解为

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m},$$

这里 y_{p_i}，$i=1, 2, \cdots, m$ 是相应于这些项的特解形式. 在情形 II 下，我们得出如下一般性的结论.

情形 II 的乘法规则 若任何 y_{p_i} 中包含有和 y_c相同的项，那么 y_{p_i}必须乘上一个 x^n，这里 n 是不会导致有重复项的最小正整数.

例 8 初值问题

解 $y''+y=4x+10\sin x$，$y(\pi)=0$，$y'(\pi)=2$.

解 相关齐次方程 $y''+y=0$ 的解为 $y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$. 因为 $g(x)=4x+10\sin x$ 是线性多项式和正弦函数的和，我们对 y_p的一般假设由表 4.1 的第 2、5 项可知是 $y_{p_1}=Ax+B$ 和

$y_{p_2}=C\cos x+E\sin x$：

$$y_p = Ax + B + C\cos x + E\sin x. \tag{5}$$

但是，在 y_p 中很明显有两项 $\cos x$、$\sin x$ 和余函数中的两项相同．这种情况可以通过给 y_{p_2} 乘一个 x 来解决．代替(5)式，我们现在用

$$y_p = Ax + B + Cx\cos x + Ex\sin x. \tag{6}$$

对这个表达式求微分，并代入微分方程，可得：

$$y''_p + y_p = Ax + B - 2C\sin x + 2E\cos x = 4x + 10\sin x,$$

因此有 $A=4$，$B=0$，$-2C=10$，$2E=0$．方程组的解可以直接得到：$A=4$，$B=0$，$C=-5$，$E=0$．由(6)，我们可得 $y_p=4x-5x\cos x$．所给方程的通解是

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + 4x - 5x\cos x.$$

现在把初始条件代入方程的通解．首先，由 $y(\pi)=c_1\cos\pi+c_2\sin\pi+4\pi-5\pi\cos\pi=0$ 得 $c_1=9\pi$，因为 $\cos\pi=-1$，$\sin\pi=0$．下一步，由导数

$$y' = -9\pi\sin x + c_2\cos x + 4 + 5x\sin x - 5\cos x$$

和

$$y'(\pi) = -9\pi\sin\pi + c_2\cos\pi + 4 + 5\pi\sin\pi - 5\cos\pi = 2$$

可求出 $c_2=7$．初值问题的解是

$$y = 9\pi\cos x + 7\sin x + 4x - 5x\cos x.$$ ■

例 9　使用乘法规则

解 $y''-6y'+9y=6x^2+2-12e^{3x}$．

解　余函数是 $y_c=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$．因此，由表 4.1 的第 3 和第 7 项，通常假设特解为

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}.$$

观察这个函数，可以发现 y_{p_2} 和 y_c 中的项有重复．若把 y_{p_2} 乘以 x，我们发现 xe^{3x} 仍然是 y_c 的一部分．但若把 y_{p_2} 乘以 x^2，就可以消除这种重复．因此，特解的形式是

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2e^{3x}.$$

对这个形式求微分，并代入微分方程，整理后得

$$y''_p - 6y'_p + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

因为等式左右两边相等，所以有 $A=2/3$，$B=8/9$，$C=2/3$，$E=-6$．因此，通解 $y=y_c+y_p$ 为

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}.$$ ■

例 10　三阶微分方程——情形 I

解 $y'''+y''=e^x\cos x$．

解　从特征方程 $m^3+m^2=0$ 中，我们可以求出 $m_1=m_2=0$，$m_3=-1$．因此，方程的余函数为 $y_c=c_1+c_2x+c_3e^{-x}$．因为 $g(x)=e^x\cos x$，我们可以由表 4.1 的第 10 项假设

$$y_p = Ae^x\cos x + Be^x\sin x.$$

因为 y_p 和余函数中没有项重复，所以我们可以用通常方法求解．从

$$y'''_p + y''_p = (-2A + 4B)e^x\cos x + (-4A - 2B)e^x\sin x = e^x\cos x$$

中我们可以得到$-2A+4B=1$，$-4A-2B=0$. 从方程组中可以解出$A=-1/10$，$B=1/5$，所以特解为$y_p=-\frac{1}{10}e^x\cos x+\frac{1}{5}e^x\sin x$. 方程的通解为

$$y=y_c+y_p=c_1+c_2x+c_3e^{-x}-\frac{1}{10}e^x\cos x+\frac{1}{5}e^x\sin x.$$ ■

例 11 四阶微分方程——情形Ⅱ

求$y^{(4)}+y'''=1-x^2e^{-x}$的特解形式.

解 比较$y_c=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}$和假设的特解

$$y_p=\underbrace{A}_{y_{p_1}}+\underbrace{Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+Ee^{-x}}_{y_{p_2}},$$

分别用y_{p_1}和y_{p_2}乘以x^3，x，则y_c和y_p没有重复项. 因此，正确的特解假设为

$$y_p=Ax^3+Bx^3e^{-x}+Cx^2e^{-x}+Exe^{-x}.$$ ■

注 在练习4.4的习题27～36中，题目要求求解初值问题，而在习题37、38中，要求求解边界值问题. 正如例8所示，一定要把初始条件或边界条件应用于通解$y=y_c+y_p$. 学生们经常犯只把这些条件应用于余函数y_c的错误，因为余函数是解中包含常数的那一部分.

练习 4.4

在习题1～26中，用待定系数法解所给的微分方程.

1. $y''+3y'+2y=6$
2. $4y''+9y=15$
3. $y''-10y'+25y=30x+3$
4. $y''+y'-6y=2x$
5. $\frac{1}{4}y''+y'+y=x^2-2x$
6. $y''-8y'+20y=100x^2-26xe^x$
7. $y''+3y=-48x^2e^{3x}$
8. $4y''-4y'-3y=\cos 2x$
9. $y''-y'=-3$
10. $y''+2y'=2x+5-e^{-2x}$
11. $y''-y'+\frac{1}{4}y=3+e^{x/2}$
12. $y''-16y=2e^{4x}$
13. $y''+4y=3\sin 2x$
14. $y''+4y=(x^2-3)\sin 2x$
15. $y''+y=2x\sin x$
16. $y''-5y'=2x^3-4x^2-x+6$
17. $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$
18. $y''-2y'+2y=e^{2x}(\cos x-3\sin x)$
19. $y''+2y'+y=\sin x+3\cos 2x$
20. $y''+2y'-24y=16-(x+2)e^{4x}$
21. $y'''-6y''=3-\cos x$
22. $y'''-2y''-4y'+8y=6xe^{2x}$
23. $y'''-3y''+3y'-y=x-4e^x$
24. $y'''-y''-4y'+4y=5-e^x+e^{2x}$
25. $y^{(4)}+2y''+y=(x-1)^2$
26. $y^{(4)}-y''=4x+2xe^{-x}$

在习题27～36中，解所给的初值问题.

27. $y''+4y=-2, y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}, y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$
28. $2y''+3y'-2y=14x^2-4x-11, y(0)=0, y'(0)=0$
29. $5y''+y'=-6x, y(0)=0, y'(0)=-10$
30. $y''+4y'+4y=(3+x)e^{-2x}, y(0)=2, y'(0)=5$
31. $y''+4y'+5y=35e^{-4x}, y(0)=-3, y'(0)=1$

32. $y''-y=\cosh x, y(0)=2, y'(0)=12$

33. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=F_0\sin\omega t, x(0)=0, x'(0)=0$

34. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=F_0\cos\gamma t, x(0)=0, x'(0)=0$

35. $y'''-2y''+y'=2-24e^x+40e^{5x}, y(0)=\dfrac{1}{2}, y'(0)=\dfrac{5}{2}, y''(0)=-\dfrac{9}{2}$

36. $y'''+8y=2x-5+8e^{-2x}, y(0)=-5, y'(0)=3, y''(0)=-4$

在习题 37 和 38 中，解所给的边界值问题.

37. $y''+y=x^2+1, y(0)=5, y(1)=0$

38. $y''-2y'+2y=2x-2, y(0)=0, y(\pi)=\pi$

在习题 39、40 中解所给的初值问题，它们的输入函数 $g(x)$ 是不连续的. [提示：分别在两个区间上解方程，然后求出一个解使得 y，y' 在 $x=\pi/2$（习题 39）和 $x=\pi$（习题 40）处连续.]

39. $y''+4y=g(x)$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$，其中

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

40. $y''-2y'+10y=g(x)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，其中

$$g(x)=\begin{cases}20, & 0\leqslant x\leqslant \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

讨论题

41. 考虑微分方程 $ay''+by'+cy=e^{kx}$，其中 a、b、c 及 k 都是常数. 相关齐次方程的辅助方程为 $am^2+bm+c=0$.

   (a)若 k 不是辅助方程的根，证明可以求出形如 $y_p=Ae^{kx}$ 的特解，其中 $A=1/(ak^2+bk+c)$.

   (b)若 k 是辅助方程的单重根，证明可以求出形如 $y_p=Axe^{kx}$ 的特解，其中 $A=1/(2ak+b)$. 解释为什么 $k\neq-b/2a$.

   (c)若 k 是辅助方程的二重根，证明可以求出形如 $y=Ax^2e^{kx}$ 的特解，其中 $A=1/(2a)$.

42. 讨论如何用本节讲述的方法求解 $y''+y=\sin x\cos 2x$ 的特解. 给出求解过程.

43. 不解方程，在下列图形中找出 $y''+y=f(x)$ 的解曲线所对应的函数 $f(x)$.

   (ⅰ) $f(x)=1$，　(ⅱ) $f(x)=e^{-x}$，　(ⅲ) $f(x)=e^x$，

   (ⅳ) $f(x)=\sin 2x$，　(ⅴ) $f(x)=e^x\sin x$，　(ⅵ) $f(x)=\sin x$.

   简要地说明理由.

(a)

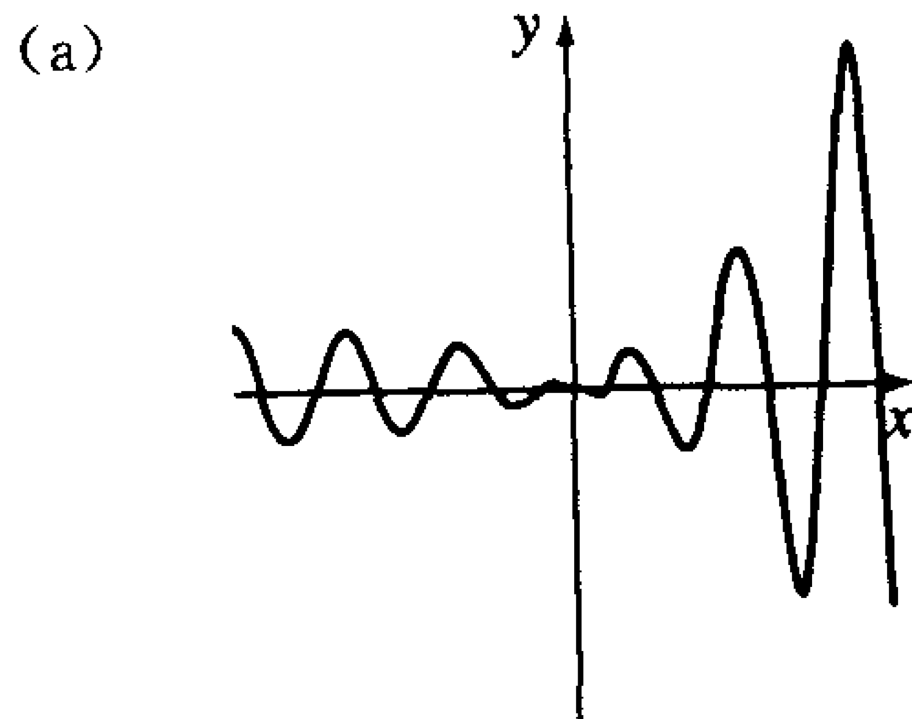


图 4.11

(b)

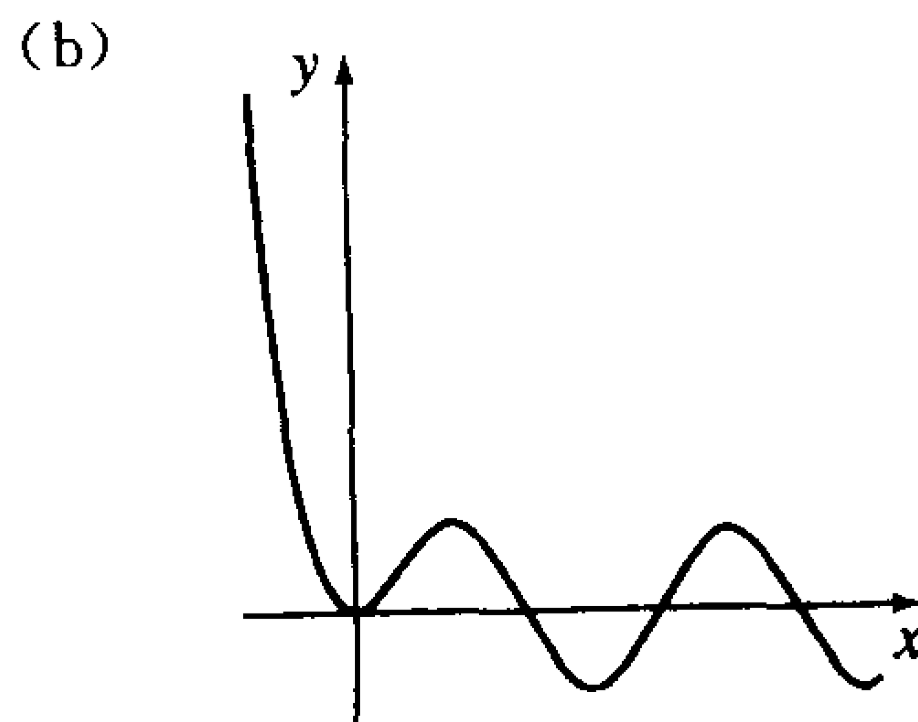


图 4.12

(c)

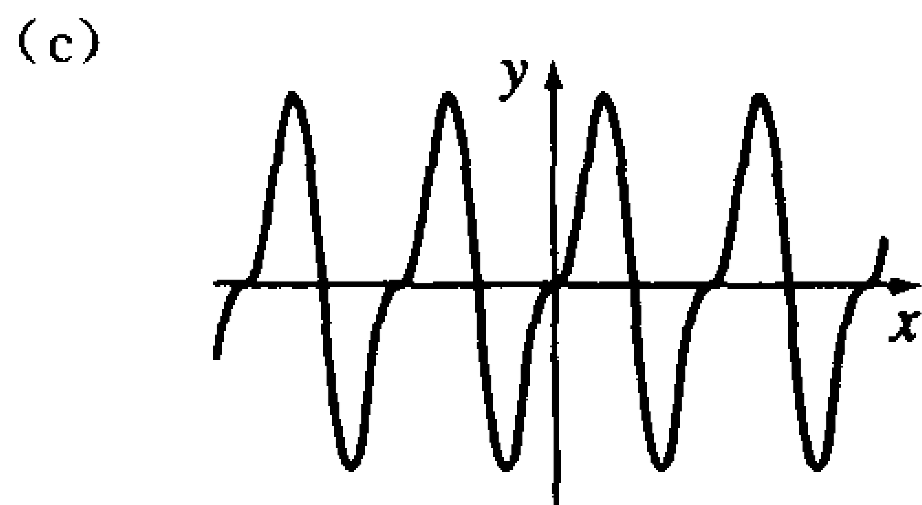


图 4.13

(d)

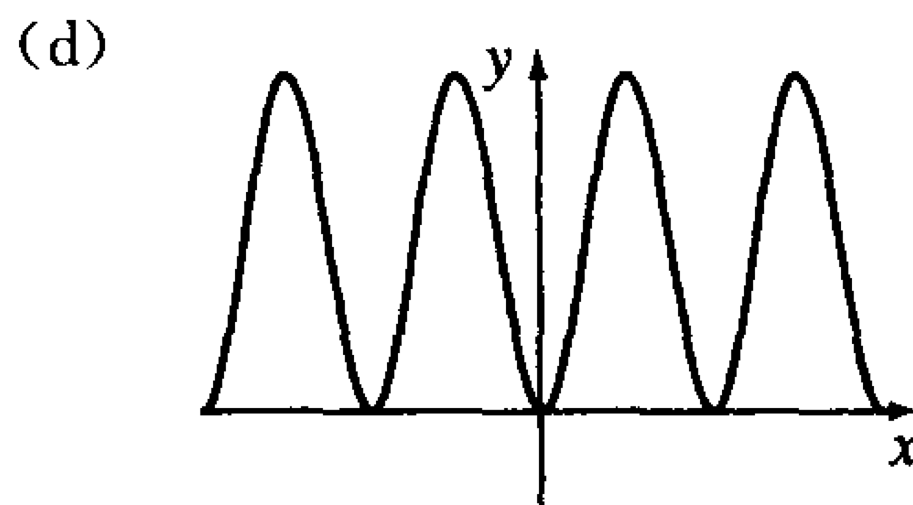


图 4.14

计算机实验作业

在习题44、45中，求出所给微分方程的特解．用CAS进行微分、简化和代数运算．

44. $y''-4y'+8y=(2x^2-3x)e^{2x}\cos 2x+(10x^2-x-1)e^{2x}\sin 2x$

45. $y^{(4)}+2y''+y=2\cos x-3x\sin x$

4.5 待定系数——零化子法

由4.1节，我们知道n阶微分方程可以写为

$$a_nD^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+\cdots+a_1Dy+a_0y=g(x),\tag{1}$$

这里$D^ky=d^ky/dx^k$，$k=0,1,\cdots,n$．出于我们的需要，(1)式可以写为$L(y)=g(x)$，这里L表示线性n阶微分算子

$$L=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0.\tag{2}$$

算子符号不但非常方便，而且可以使我们非常容易得到某些类型的非齐次线性微分方程的特解．在开始讨论之前，我们先看两个概念．

分解算子　当a_i，$i=0,1,\cdots,n$都是实常数时，线性微分算子(1)可以通过特征方程$a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_1m+a_0=0$进行因式分解．换句话说，如果$r_1$是辅助方程

$$a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_1m+a_0=0$$

的根，那么$L=(D-r_1)P(D)$，这里多项式$P(D)$是$n-1$阶线性微分算子．若把D看作是一个普通变量，那么算子D^2+5D+6可以做因式分解$(D+2)(D+3)$或$(D+3)(D+2)$．因此如果函数$y=f(x)$存在二阶导数，则

$$(D^2+5D+6)y=(D+2)(D+3)y=(D+3)(D+2)y.$$

从中可以得出一个一般的性质：

常系数线性微分算子的因子可以互相交换．

形如$y''+4y'+4y=0$的微分方程可以写为

$$(D^2+4D+4)y=0\text{或}(D+2)(D+2)y=0\text{或}(D+2)^2y=0.$$

零化算子　若L是常系数微分算子，f是充分可微函数，并使得

$$L(f(x))=0,$$

则L称为是函数的零化算子(annihilator)．例如，常函数$y=k$可以用D零化，因为$Dk=0$．函数$y=x$可以被微分算子D^2零化，因为x的一阶和二阶导数分别是1和0．类似地，$D^3x^2=0$等等．

微分算子D^n可以把如下的每个函数零化：

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}. \tag{3}$$

作为(3)的一个直接结果可知，由于微分运算可以逐项进行，所以可以找到一个使得 x 的最高次幂零化的算子把多项式

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{4}$$

零化.

被线性 n 阶微分算子 L 零化的函数仅仅限于那些可以从齐次微分方程 $L(y)=0$ 中求出的通解.

微分算子 $(D-\alpha)^n$ 可以把如下的每个函数零化：

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{5}$$

现在来证明这个结论，注意到齐次方程 $(D-\alpha)^n y=0$ 的辅助方程为 $(m-\alpha)^n=0$. 因为 α 是多项式的 n 重根，所以通解为

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{6}$$

例 1　零化算子

求使得如下函数零化的微分算子.

(a) $1-5x^2+8x^3$　　(b) e^{-3x}　　(c) $4e^{2x}-10xe^{2x}$

解　(a)由(3)式，有 $D^4x^3=0$，又由(4)可得

$$D^4(1-5x^2+8x^3) = 0.$$

(b)由(5)式，令 $\alpha=-3$，$n=1$，则可得

$$(D+3)e^{-3x} = 0.$$

(c)由(5)式和(6)式，令 $\alpha=2$，$n=2$，则可得

$$(D-2)^2(4e^{2x}-10xe^{2x}) = 0.$$ ■

当 α，β 都是实数，且 $\beta>0$ 时，由二次求根公式的公式可知 $[m^2-2\alpha m+(\alpha^2+\beta^2)]^n=0$ 有复根 $\alpha+i\beta$，$\alpha-i\beta$，它们都是 n 重根. 由 4.3 节末尾的讨论，我们可得到如下结论.

微分算子 $[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n$ 可以零化如下每个函数：

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{7}$$

例 2　零化算子

求一个微分算子，使之零化 $5e^{-x}\cos 2x-9e^{-x}\sin 2x$.

解　观察函数 $e^{-x}\cos 2x$ 和 $e^{-x}\sin 2x$ 发现其中 $\alpha=-1$，$\beta=2$. 因此，由(7)式可得 D^2+2D+5 可以零化这两个函数. 因为 D^2+2D+5 是线性算子，所以它可以零化这两个函数任意的线性组合，比如 $5e^{-x}\cos 2x-9e^{-x}\sin 2x$.

当 $\alpha=0$，$n=1$ 时，(7)的一个特例是

$$(D^2+\beta^2)\begin{cases}\cos\beta x \\ \sin\beta x\end{cases} = 0. \tag{8}$$

例如，D^2+16 可以零化 $\sin 4x$ 和 $\cos 4x$ 的任何一个线性组合.

我们通常对零化两个或两个以上函数的和比较感兴趣. 正如我们在例 1 和例 2 中所看到

的，若 L 是线性微分算子，使得 $L(y_1)=0$ 和 $L(y_2)=0$，那么 L 可以零化线性组合 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. 这是定理4.2一个直接的结论. 令 L_1 和 L_2 是常系数微分算子，并使得 L_1 零化 $y_1(x)$，L_2 零化 $y_2(x)$，但是 $L_1(y_2)\neq0$，$L_2(y_1)\neq0$，那么微分算子的乘积 L_1L_2 零化和 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. 我们可以很容易地证明这个结论，利用微分算子的线性和可交换性 $L_1L_2=L_2L_1$：

$$\begin{aligned}L_1L_2(y_1+y_2) &= L_1L_2(y_1)+L_1L_2(y_2)\\ &= L_2L_1(y_1)+L_1L_2(y_2)\\ &= L_2\underbrace{[L_1(y_1)]}_{0}+L_1\underbrace{[L_2(y_2)]}_{0}=0.\end{aligned}$$ ■

例如，由(3)我们知，D^2 零化 $7-x$，又由(8)知 D^2+16 零化 $\sin4x$. 因此，算子积 $D^2(D^2+16)$ 零化线性组合 $7-x+6\sin4x$.

注 零化函数的微分算子不是唯一的. 我们可以从例1的(b)中看到，$D+3$ 可使 e^{-3x} 零化，但是更高阶的微分算子也可以使其零化，只要使 $D+3$ 成为它的一个因子就可以了. 例如，$(D+3)(D+1)$，$(D+3)^2$，$D^3(D+3)$ 都可以零化 e^{-3x}.（请读者自行证明.）当然，我们在找使函数 $y=f(x)$ 零化的微分算子时，一般总是找阶数尽可能是最低的.

待定系数 这里我们又回到了前面讨论过的内容. 设 $L(y)=g(x)$ 是常系数线性微分方程，输入函数 $g(x)$ 由(3)、(5)、(7)中所列函数的有限和或有限积组成，也即 $g(x)$ 是形如

$$k(\text{常数}),x^m,x^me^{\alpha x},x^me^{\alpha x}\cos\beta x \text{ 以及 } x^me^{\alpha x}\sin\beta x$$

的函数的线性组合，这里 m 是非负整数，α，β 是实数. 我们已知这种函数 $g(x)$ 可以用最低阶的微分算子 L_1 使之零化，L_1 是由算子 D^n，$(D-\alpha)^n$ 和 $(D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2)^n$ 的积组成的. 把 L_1 应用于方程 $L(y)=g(x)$ 的两端，得到 $L_1L(y)=L_1(g(x))=0$. 通过解齐次高阶方程 $L_1L(y)=0$，我们可以求出原始非齐次方程 $L(y)=g(x)$ 的一个特解 y_p. 然后，我们把特解的形式代人 $L(y)=g(x)$ 求出显式特解. 这个求 y_p 的过程称为待定系数法(method of undetermined coefficient)，下面几个例子说明了这种方法的具体应用.

在开始讨论例子之前，我们回顾一下前面讲过的内容，非齐次线性微分方程 $L(y)=g(x)$ 的通解是 $y=y_c+y_p$，这里 y_c 是余函数，即相关齐次方程 $L(y)=0$ 的通解. 每个方程 $L(y)=g(x)$ 的通解都是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的.

例3 **用待定系数法求通解**

解

$$y''+3y'+2y=4x^2. \tag{9}$$

解 第一步，首先，解齐次方程 $y''+3y'+2y=0$. 由辅助方程 $m^2+3m+2=(m+1)(m+2)=0$，可以得到 $m_1=-1$，$m_2=-2$，因此，余函数为

$$y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}.$$

第二步，因为 $4x^2$ 可以被微分算子 D^3 零化，$D^3(D^2+3D+2)y=4D^3x^2$ 和

$$D^3(D^2+3D+2)y=0 \tag{10}$$

相同.

(10)的五阶辅助方程为

$$m^3(m^2+3m+2)=0 \text{ 或 } m^3(m+1)(m+2)=0,$$

解得其根为 $m_1=m_2=m_3=0$，$m_4=-1$，$m_5=-2$. 因此它的通解为

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2+\boxed{c_4e^{-x}+c_5e^{-2x}}. \tag{11}$$

(11)中方框里的项是原始方程(9)的余函数. 我们再讨论满足(9)的特解 y_p，使其满足方程(10). 这意味着(11)中余函数以外的项一定是 y_p的基本形式：

$$y_p=A+Bx+Cx^2, \tag{12}$$

这里为了简化，分别用 A、B、C 代替 c_1、c_2、c_3. 要使(12)成为(9)的特解，就必须找到系数 A、B、C 的值. 对(12)求微分，可得

$$y'_p=B+2Cx, y''_p=2C,$$

把这个结果代入(9)中，可得

$$y''_p+3y'_p+2y_p=2C+3B+6Cx+2A+2Bx+2Cx^2=4x^2.$$

由最后一个等式，我们可以通过比较 x 次幂相同项的系数来求出 A，B，C 的值：

幂相同

$$\boxed{2C}\,x^2+\boxed{2B+6C}\,x+\boxed{2A+3B+2C}=4x^2+0x+0.$$

即

$$2C=4, 2B+6C=0, 2A+3B+2C=0. \tag{13}$$

解(13)中的方程，可以得到 $A=7$，$B=-6$，$C=2$. 因此 $y_p=7-6x+2x^2$.

第三步，方程(9)的通解为 $y=y_c+y_p$，或

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+7-6x+2x^2.$$ ■

例 4　用待定系数法解通解

解

$$y''-3y'=8e^{3x}+4\sin x. \tag{14}$$

解　第一步，相关齐次方程 $y''-3y'=0$ 的辅助方程是 $m^2-3m=m(m-3)=0$，由此得 $y_c=c_1+c_2e^{3x}$.

第二步，因为 $(D-3)e^{3x}=0$ 和 $(D^2+1)\sin x=0$，所以对方程(14)两端应用微分算子 $(D-3)(D^2+1)$：

$$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D)y=0. \tag{15}$$

(15)的辅助方程为

$$(m-3)(m^2+1)(m^2-3m)=0 \text{ 或 } m(m-3)^2(m^2+1)=0.$$

因此，

$$y=\boxed{c_1+c_2e^{3x}}+c_3xe^{3x}+c_4\cos x+c_5\sin x.$$

从这个等式中去掉方框中 y_c的部分，我们就可以得到 y_p的形式：

$$y_p=Axe^{3x}+B\cos x+C\sin x.$$

把 y_p代入(14)，整理后得

$$y''_p - 3y'_p = 3Ae^{3x} + (-B-3C)\cos x + (3B-C)\sin x = 8e^{3x} + 4\sin x.$$

由相同次幂项的系数相等可得，$3A=8$，$-B-3C=0$，$3B-C=4$. 解方程得，$A=8/3$，$B=\frac{6}{5}$和$C=-2/5$，因此

$$y_p = \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x.$$

第三步，(14)的通解为

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x. \quad ■$$

例 5 用待定系数法求通解

解

$$y'' + y = x\cos x - \cos x. \tag{16}$$

解 这个方程的余函数为 $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$. 比较 $\cos x$、$x\cos x$ 和(7)中第一行的函数，可以发现 $\alpha=0$，$n=1$，因此$(D^2+1)^2$是方程(16)等式右边的零化算子. 对微分方程两边应用算子，可得

$$(D^2+1)^2(D^2+1)y = 0 \text{ 或} (D^2+1)^3y = 0.$$

因为 i 和 $-$i 都是微分方程的 3 重复根，所以我们可以得到

$$y = \boxed{c_1\cos x + c_2\sin x} + c_3x\cos x + c_4x\sin x + c_5x^2\cos x + c_6x^2\sin x.$$

把 $y_p = Ax\cos x + Bx\sin x + Cx^2\cos x + Ex^2\sin x$ 代入(16)，整理后得

$$\begin{aligned} y''_p + y_p &= 4Ex\cos x - 4Cx\sin x + (2B+2C)\cos x + (-2A+2E)\sin x \\ &= x\cos x - \cos x. \end{aligned}$$

通过比较系数可得方程 $4E=1$，$-4C=0$，$2B+2C=-1$，$-2A+2E=0$，从中可以解出 $A=1/4$，$B=-1/2$，$C=0$，$E=1/4$. 因此(16)的通解为

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{4}x^2\sin x. \quad ■$$

例 6 特解的形式

求方程

$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x}\cos x \tag{17}$$

特解的形式.

解 所给方程的余函数为 $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$.

由(7)，$\alpha=-2$，$\beta=1$，$n=1$，我们知道

$$(D^2+4D+5)e^{-2x}\cos x = 0.$$

对(17)应用算子 D^2+4D+5，得到

$$(D^2+4D+5)(D^2-2D+1)y = 0. \tag{18}$$

因为(18)的辅助方程的根为$-2-$i，$-2+$i，1，1，我们可由

$$y = \boxed{c_1e^x + c_2xe^x} + c_3e^{-2x}\cos x + c_4e^{-2x}\sin x$$

求出方程(17)形如

$$y_p = Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$$

的特解. ■

例 7 **特解的形式**

求方程

$$y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x}. \tag{19}$$

特解的形式.

解 经观察可知

$$D^3(5x^2 - 6x) = 0, (D-2)^3x^2e^{2x} = 0, (D-5)e^{5x} = 0.$$

因此把 $D^3(D-2)^3(D-5)$应用于(19)，可得

$$D^3(D-2)^3(D-5)(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$$

或

$$D^4(D-2)^5(D-5)y = 0.$$

最后一个微分方程辅助方程的根为 0，0，0，0，2，2，2，2，2，5. 因此，

$$y = \boxed{c_1} + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \boxed{c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}} + c_7x^2e^{2x} + c_8x^3e^{2x} + c_9x^4e^{2x} + c_{10}e^{5x}. \tag{20}$$

因为对应于(19)的余函数的线性组合为 $c_1 + c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}$，(20)中的剩余项给出了微分方程特解的形式：

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^2e^{2x} + Fx^3e^{2x} + Gx^4e^{2x} + He^{5x}. \qquad ■$$

总结待定系数法 我们这里给待定系数法做一个如下总结.

待定系数法——零化算子法

微分方程 $L(y) = g(x)$具有常系数，并且函数 $g(x)$是由常数、多项式、指数函数 $e^{\alpha x}$、正弦函数、余弦函数的有限和或有限积组成.

(ⅰ)求齐次方程 $L(y) = 0$ 的余函数 y_c.

(ⅱ)对非齐次方程 $L(y) = g(x)$两端应用使函数 $g(x)$零化的微分算子 L_1.

(ⅲ)求高阶齐次微分方程 $L_1L(y) = 0$ 的通解.

(ⅳ)从(ⅲ)的解中去掉(ⅰ)中所求函数 y_c所含的项. 余下的项就是线性组合 y_p. 这就是方程 $L(y) = g(x)$的特解.

(ⅴ)把(ⅳ)中所求的 y_p代入 $L(y) = g(x)$. 比较等式两边相同函数项的系数，令相同函数项的系数相等，解系数方程组可得 y_p中的未知系数.

(ⅵ)由(ⅴ)中解出的特解，可知微分方程的通解为 $y = y_c + y_p$.

注 待定系数法对变系数的线性微分方程不适用，对 $g(x)$形如

$$g(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \tan x, g(x) = \sin^{-1}x$$

的常系数微分方程也不适用. 含有最后一种输入函数 $g(x)$的微分方程将在下节中讨论.

练习 4.5

在习题 1～10 中，把所给的微分方程写成 $L(y) = g(x)$的形式，这里 L 是常系数线性微分算子. 若可能，分解 L.

1. $9y'' - 4y = \sin x$
2. $y'' - 5y = x^2 - 2x$
3. $y'' - 4y' - 12y = x - 6$
4. $2y'' - 3y' - 2y = 1$
5. $y''' + 10y'' + 25y' = e^x$
6. $y''' + 4y' = e^x\cos 2x$

7. $y''' + 2y'' - 13y' + 10y = xe^{-x}$

8. $y''' + 4y'' + 3y' = x^2\cos x - 3x$

9. $y^{(4)} + 8y' = 4$

10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = (x^3 - 2x)e^{4x}$

在习题 11～14 中，证明所给的微分算子可以使相应的函数零化.

11. $D^4; y = 10x^3 - 2x$

12. $2D - 1; y = 4e^{x/2}$

13. $(D-2)(D+5); y = e^{2x} + 3e^{-5x}$

14. $D^2 + 64; y = 2\cos 8x - 5\sin 8x$

在习题 15～26 中，求使指定函数零化的线性微分算子.

15. $1 + 6x - 2x^3$

16. $x^3(1-5x)$

17. $1 + 7e^{2x}$

18. $x + 3xe^{6x}$

19. $\cos 2x$

20. $1 + \sin x$

21. $13x + 9x^2 - \sin 4x$

22. $8x - \sin x + 10\cos 5x$

23. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$

24. $(2 - e^x)^2$

25. $3 + e^x\cos 2x$

26. $e^{-x}\sin x - e^{2x}\cos x$

在习题 27～34 中，求被所给微分算子零化的线性无关函数.

27. D^5

28. $D^2 + 4D$

29. $(D-6)(2D+3)$

30. $D^2 - 9D - 36$

31. $D^2 + 5$

32. $D^2 - 6D + 10$

33. $D^3 - 10D^2 + 25D$

34. $D^2(D-5)(D-7)$

在习题 35～64 中，用待定系数法解所给的微分方程.

35. $y'' - 9y = 54$

36. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

37. $y'' + y' = 3$

38. $y''' + 2y'' + y' = 10$

39. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

40. $y'' + 3y' = 4x - 5$

41. $y''' + y'' = 8x^2$

42. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

43. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

44. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

45. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

46. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

47. $y'' + 25y = 6\sin x$

48. $y'' + 4y = 4\cos x + 3\sin x - 8$

49. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

50. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

51. $y'' - y = x^2e^x + 5$

52. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$

53. $y'' - 2y' + 5y = e^x\sin x$

54. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\sin 3x - \cos 3x)$

55. $y'' + 25y = 20\sin 5x$

56. $y'' + y = 4\cos x - \sin x$

57. $y'' + y' + y = x\sin x$

58. $y'' + 4y = \cos^2 x$

59. $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

60. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

61. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

62. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

63. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

64. $y^{(4)} - 4y'' = 5x^2 - e^{2x}$

解习题 65～72 中的初值问题.

65. $y'' - 64y = 16, y(0) = 1, y'(0) = 0$

66. $y'' + y' = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$

67. $y'' - 5y' = x - 2, y(0) = 0, y'(0) = 2$

68. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 1$

69. $y'' + y = 8\cos 2x - 4\sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

70. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5, y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$

71. $y'' - 4y' + 8y = x^3, y(0) = 2, y'(0) = 4$

72. $y^{(4)}-y'''=x+e^x, y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=0, y'''(0)=0$

讨论题

73. 设 L 是可分解的线性微分算子，其系数可变. 这种 L 的因子可以交换吗？请说明理由.

4.6 常数变易法

2.3 节中我们学过的求解一阶微分方程特解的方法对线性高阶方程也同样适用. 为了对线性二阶微分方程

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x), \tag{1}$$

采用**常数变易法**(variation of parameter)，我们像在 4.2 节中所做的那样，从方程的标准型入手

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x), \tag{2}$$

要得到这个标准型，只要在方程的两端除以最高阶项的系数 $a_2(x)$ 即可. 方程(2)是类似于线性一阶方程 $dy/dx+P(x)y=f(x)$ 的二阶方程. 在(2)中，我们假设 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $f(x)$ 在某个普通区间 I 上都是连续的. 正如 4.3 节中所示的那样，因为(2)的系数都是常数，所以可以很容易地得到其余函数 y_c.

假设 相应于 2.3 节中求 $dy/dx+P(x)y=f(x)$ 的特解 y_p 所做的假设 $y_p=u_1(x)y_1(x)$，对于线性二阶方程(2)，我们有如下解的形式

$$y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x), \tag{3}$$

这里 y_1、y_2 形成了(1)式相关齐次方程解的基本解组. 利用 y_p 二次微分的乘法规则，我们可得

$$y'_p=u_1y'_1+y_1u'_1+u_2y'_2+y_2u'_2$$
$$y''_p=u_1y''_1+y'_1u'_1+y_1u''_1+u'_1y'_1+u_2y''_2+y'_2u'_2+y_2u''_2+u'_2y'_2.$$

把(3)和以上导数代入(2)，整理后得：

$$\begin{aligned}y''_p+P(x)y'_p+Q(x)y_p &= u_1\overbrace{[y''_1+Py'_1+Qy_1]}^{0}+u_2\overbrace{[y''_2+Py'_2+Qy_2]}^{0}\\ &\quad+y_1u''_1+u'_1y'_1+y_2u''_2+u'_2y'_2+P[y_1u'_1+y_2u'_2]+y'_1u'_1+y'_2u'_2\\ &=\frac{d}{dx}[y_1u'_1]+\frac{d}{dx}[y_2u'_2]+P[y_1u'_1+y_2u'_2]+y'_1u'_1+y'_2u'_2\\ &=\frac{d}{dx}[y_1u'_1+y_2u'_2]+P[y_1u'_1+y_2u'_2]+y'_1u'_1+y'_2u'_2=f(x).\end{aligned} \tag{4}$$

因为要求两个未知函数 u_1 和 u_2，所以要有两个方程. 我们可以通过进一步的假设得到这些方程，假设 u_1 和 u_2 满足 $y_1u_1'+y_2u_2'=0$. 这个假设不是凭空而来的，而是根据(4)式前两项得到的，因为若令 $y_1u_1'+y_2u_2'=0$，则(4)可以化为 $y_1'u_1'+y_2'u_2'=f(x)$. 这样，我们就得到了这两个方程，尽管这两个方程求的是 u_1' 和 u_2'. 利用克莱姆法则，方程组

$$y_1u'_1+y_2u'_2=0,$$
$$y'_1u'_1+y'_2u'_2=f(x)$$

的解可以用行列式表达出来：

$$u'_1=\frac{W_1}{W}=-\frac{y_2f(x)}{W} \text{ 和 } u'_2=\frac{W_2}{W}=\frac{y_1f(x)}{W}. \tag{5}$$

其中

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

函数 u_1 和 u_2 可以通过对(5)式积分求出来. 行列式 W 是 y_1、y_2 的朗斯基行列式. 由 y_1、y_2 在 I 上的线性独立性，我们知道 $W(y_1(x), y_2(x))\neq 0$ 对区间上的每个 x 均成立.

总结常数变易法 通常在理解的过程中不提倡把这些公式记下来. 然而，前述方法对于解微分方程显得过于繁琐. 在这种情况下，公式(5)就给我们提供了一个简便的方法. 因此，解 $a_2y''+a_1y'+a_0y=g(x)$，首先找到它的余函数 $y_c=c_1y_1+c_2y_2$，然后计算朗斯基行列式 $W(y_1(x),y_2(x))$. 用 a_2 去除方程两端，把方程化为标准型 $y''+Py'+Qy=f(x)$，求出 $f(x)$ 的形式. 接着再对 $u_1'=W_1/W$，$u_2'=W_2/W$ 积分求出 u_1、u_2，这里 W_1 和 W_2 如(6)所定义. 方程的特解为 $y_p=u_1y_1+u_2y_2$，则方程的通解为 $y=y_c+y_p$.

例 1 用常数变易法求通解

解 $y''-4y'+4y=(x+1)e^{2x}$.

解 由辅助方程 $m^2-4m+4=(m-2)^2=0$，可得 $y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$. 那么 $y_1=e^{2x}$，$y_2=xe^{2x}$，然后计算朗斯基行列式：

$$W(e^{2x},xe^{2x})=\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{vmatrix}=e^{4x}.$$

因为方程已经是(2)的标准型了(也就是 y'' 的系数为 1)，所以 $f(x)=(x+1)e^{2x}$. 由(6)式得

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{vmatrix}=-(x+1)xe^{4x}, W_2=\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix}=(x+1)e^{4x},$$

再由(5)式得

$$u_1'=-\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}}=-x^2-x, u_2'=\frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}}=x+1.$$

将上式积分得 $u_1=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$，$u_2=\frac{1}{2}x^2+x$. 因此有

$$y_p=\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}+\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)xe^{2x}=\frac{1}{6}x^3e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

和

$$y=y_c+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

■

例 2 用常数变易法求通解

解 $4y''+36y=\csc 3x$.

解 首先把方程变为如(2)的标准型，方程两端同除以 4，得

$$y''+9y=\frac{1}{4}\csc 3x.$$

因辅助方程 $m^2+9=0$ 的根为 $m_1=3i$，$m_2=-3i$，余函数为 $y_c=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$，所以 $y_1=\cos 3x$，$y_2=\sin 3x$，$f(x)=\frac{1}{4}\csc 3x$，由此可得

$$W(\cos 3x,\sin 3x)=\begin{vmatrix} \cos 3x & x\sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}=3,$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 3x\\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}=-\frac{1}{4},W_2=\begin{vmatrix}\cos 3x & 0\\ -3\sin 3x & \frac{1}{4}\csc 3x\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}.$$

对

$$u_1'=\frac{W_1}{W}=-\frac{1}{12},u_2'=\frac{W_2}{W}=\frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

求积分，可得 $u_1=-\frac{1}{12}x$，$u_2=\frac{1}{36}\ln|\sin 3x|$. 因此，特解为

$$y_p=-\frac{1}{12}x\cos 3x+\frac{1}{36}(\sin 3x)\ln|\sin 3x|.$$

方程的通解是

$$y=y_c+y_p=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-\frac{1}{12}x\cos 3x+\frac{1}{36}(\sin 3x)\ln|\sin 3x|. \tag{7}$$ ■

方程(7)给出了微分方程在区间$(0,\pi/6)$上的通解.

积分常数 计算u_1'、u_2'的不定积分时，我们没有引进任何积分常数，这是因为

$$\begin{aligned}y=y_c+y_p&=c_1y_1+c_2y_2+(u_1+a_1)y_1+(u_2+b_1)y_2\\&=(c_1+a_1)y_1+(c_2+b_1)y_2+u_1y_1+u_2y_2=C_1y_1+C_2y_2+u_1y_1+u_2y_2.\end{aligned}$$

例 3 **用常数变易法求通解**

解 $y''-y=1/x$.

解 由辅助方程 $m^2-1=0$ 可得，$m_1=-1$，$m_2=1$. 因此，有 $y_c=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$成立，那么就有 $W(\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{-x})=-2$ 和

$$u_1'=-\frac{\mathrm{e}^{-x}(1/x)}{-2},u_1=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t,$$

$$u_2'=\frac{\mathrm{e}^{x}(1/x)}{-2},u_2=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\mathrm{d}t.$$

因为前述积分不是初等积分，所以我们将它写成

$$y_p=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\mathrm{d}t,$$

因此，有

$$y=y_c+y_p=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\mathrm{d}t.$$ ■

在例 3 中，我们可以在任何不包括原点的区间 $x_0\leqslant t\leqslant x$ 上积分.

高阶微分方程 解非齐次二阶微分方程的方法可以推广到写为标准型的线性 n 阶方程

$$y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_1(x)y'+P_0(x)y=f(x). \tag{8}$$

如果 $y_c=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$是(8)式的余函数，那么方程的一个特解为

$$y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x),$$

这里 u_k'，$k=1,2,\cdots,n$ 可以通过 n 个方程的方程组解出

$$\begin{aligned}
y_1u_1' + \quad y_2u_2' + \cdots + \quad y_nu_n' &= 0\\
y_1'u_1' + \quad y_2'u_2' + \cdots + \quad y_n'u_n' &= 0\\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots\\
y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}u_n' &= f(x).
\end{aligned} \tag{9}$$

和(4)中的 $y_1u_1'+y_2u_2'=0$ 一样，方程组的前 $n-1$ 个方程是一种假设，它简化了把 $y_p=u_1(x)y_1(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x)$ 代入(8)中以后得到的方程. 由克莱姆法则，可得

$$u_k'=\frac{W_k}{W}, k=1,2,\cdots,n,$$

这里 W 是 y_1，y_2，…，y_n 的朗斯基行列式，W_k 是用(9)式右边替换朗斯基行列式的第 k 列得到的行列式，也就是 W_k 的第 k 列为(0，0，…，$f(x)$). 当 $n=2$ 时，可得(5)式.

注 （ⅰ）常数变易法比待定系数法有明显的优越性，因为由它总是可以得到相关齐次方程的特解 y_p. 这种方法对 $f(x)$ 没有什么限制，它可以是 4.4 节中所列的四种函数类型的线性组合. 同时，与待定系数法不同，常数变易法也可以用于变系数的微分方程.

（ⅱ）简化 y_p 形式的问题. 依赖于求 u_1'、u_2' 原函数的方法，读者在做习题时，得到的 y_p 可能也不同. 比如，在练习 4.6 的习题 3 中，$y_p=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ 和 $y_p=\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ 都是合理的答案. 在每种情况下，通解 $y=y_c+y_p$ 都可以简化为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$. 为什么？

练习 4.6

用常数变易法解习题 1～18 中的微分方程.

1. $y''+y=\sec x$
2. $y''+y=\tan x$
3. $y''+y=\sin x$
4. $y''+y=\sec\theta\tan\theta$
5. $y''+y=\cos^2 x$
6. $y''+y=\sec^2 x$
7. $y''-y=\cosh x$
8. $y''-y=\sinh 2x$
9. $y''-4y=\frac{e^{2x}}{x}$
10. $y''-9y=\frac{9x}{e^{3x}}$
11. $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$
12. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}$
13. $y''+3y'+2y=\sin e^x$
14. $y''-2y'+y=e^t\arctan t$
15. $y''+2y'+y=e^{-t}\ln t$
16. $2y''+2y'+y=4\sqrt{x}$
17. $3y''-6y'+6y=e^x\sec x$
18. $4y''-4y'+y=e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$

用常数变易法解习题 19～22 中的微分方程，它们的初始条件均为 $y(0)=1$，$y'(0)=0$.

19. $4y''-y=xe^{x/2}$
20. $2y''+y'-y=x+1$
21. $y''+2y'-8y=2e^{-2x}-e^{-x}$
22. $y''-4y'+4y=(12x^2-6x)e^{2x}$

在习题 23 和 24 中，已知所给的函数是相关齐次微分方程在(0，$+\infty$)上的线性无关解，求相应的非齐次方程的通解.

23. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x^{3/2}$，$y_1=x^{-1/2}\cos x$，$y_2=x^{-1/2}\sin x$

24. $x^2y''+xy'+y=\sec(\ln x)$；$y_1=\cos(\ln x)$，$y_2=\sin(\ln x)$

用常数变易法解习题 25 和 26 中的三阶微分方程.

25. $y'''+y'=\tan x$　　26. $y'''+4y'=\sec 2x$

讨论题

在习题 27、28 中，讨论如何同时使用待定系数法和常数变易法来解微分方程. 给出求解过程.

27. $3y''-6y'+30y=15\sin x+e^x\tan 3x$

28. $y''-2y'+y=4x^2-3+x^{-1}e^x$

29. 习题 1、7、9、18 中通解的定义区间分别是什么? 讨论习题 24 中通解的定义域为什么不是$(0,+\infty)$.

30. 求 $x^4y''+x^3y'-4x^2y=1$ 的通解，已知 $y_1=x^2$ 是相关齐次方程的解.

4.7 柯西-欧拉方程

由前述章节，我们可以很容易求出常系数高阶线性微分方程的显式解，但是要求出变系数线性微分方程的通解不是很容易. 在第 6 章，我们将看到当微分方程的系数是变系数时，通常求出的解是无穷级数形式的. 然而，本节所考虑的微分方程也是变系数的；而变系数方程通解的形式通常为 x 幂级数、正弦函数、余弦函数和对数函数. 求解方法和常系数方程颇为类似，因为都要求解辅助方程.

柯西-欧拉方程 形如

$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)$$

的线性微分方程，其中系数 a_n，a_{n-1}，…，a_0 是常数，称为柯西-欧拉方程(Cauchy-Euler equation). 这种类型方程的特征是 k 阶微分 d^ky/dx^k 所对应的系数为 x^k，$k=n$，$n-1$，…，1，0：

$$\underbrace{a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}}_{\text{相同}}+\underbrace{a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}_{\text{相同}}+\cdots.$$

和 4.3 节一样，我们从齐次二次方程

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0.$$

的通解开始讨论我们本节的内容. 高阶微分方程的解与二阶的类似. 若知道了余函数 y_c，我们也可以用常数变易法求解非齐次方程 $ax^2y''+bxy'+cy=g(x)$.

注 y''的系数 ax^2 在 $x=0$ 处为零. 因此为了保证定理 4.1 的基本定理对柯西-欧拉方程也适用，我们求定义在区间$(0,+\infty)$上的通解. 区间$(-\infty,0)$上的解可以通过把 $t=-x$ 代入微分方程得到. 请参考练习 4.7 的习题 35、36.

求解的方法 我们来看形如 $y=x^m$ 的解，这里 m 待定. 与把 e^{mx} 代入常系数线性微分方程类似，当我们把 x^m 代入柯西-欧拉方程的每一项时，方程就变成了 m 次的多项式，因为

$$a_kx^k\frac{d^ky}{dx^k}=a_kx^km(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^{m-k}=a_km(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^m.$$

例如，把 $y=x^m$ 代入二阶方程，则这个方程就变成了

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=am(m-1)x^m+bmx^m+cx^m=(am(m-1)+bm+c)x^m.$$

因此 $y=x^m$ 是微分方程的解，只要 m 满足**辅助方程**(auxiliary equation)

$$am(m-1)+bm+c=0 \text{ 或 } am^2+(b-a)m+c=0. \tag{1}$$

因为二次方程的根可能是两个不同的实数、两个相同的实数、两个复根，因此有三种不同的情况需要考虑. 最后一种情况的根以共轭对的形式出现.

情形Ⅰ：两个不同的实根 令 m_1 和 m_2 表示(1)的两个不同实根，且 $m_1\neq m_2$. 那么 $y_1=x^{m_1}$，$y_2=x^{m_2}$ 构成了基本解组. 因此，方程的通解为

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}. \tag{2}$$

例 1 两个不同的实根

解 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0$.

解 为了理解辅助方程的这种新形式的推导以及和 4.3 节的辅助方程之间的不同点，不必记住方程(1)，只要假设 $y=x^m$ 为方程的解就可以了. 对解进行二次微分

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2},$$

并把这个微分的结果代入微分方程，若 $m^2-3m-4=0$，则

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}-2x\cdot mx^{m-1}-4x^m$$
$$=x^m(m(m-1)-2m-4)=x^m(m^2-3m-4)=0.$$

$(m+1)(m-4)=0$ 意味着 $m_1=-1$，$m_2=4$，所以 $y=c_1x^{-1}+c_2x^4$. ■

情形Ⅱ：两个相等的实根 若(1)的根是两个相等的实根(即 $m_1=m_2$)，则我们可以得到唯一解，$y=x^{m_1}$. 当二次方程 $am^2+(b-a)m+c=0$ 的两个根相等时，系数判别式必须等于零. 再由根的关系式得 $m_1=-(b-a)/2a$.

接下来我们用 4.2 节的(5)式求它的第二个解 y_2. 把柯西-欧拉方程写成标准型

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b}{ax}\frac{dy}{dx}+\frac{c}{ax^2}y=0$$

并记 $P(x)=b/ax$，$\int(b/ax)dx=(b/a)\ln x$. 因此，

$$y_2=x^{m_1}\int\frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}dx$$
$$=x^{m_1}\int x^{-b/a}\cdot x^{-2m_1}dx \qquad \leftarrow e^{-(b/a)\ln x}=e^{\ln x^{-b/a}}=x^{-b/a}$$
$$=x^{m_1}\int x^{-b/a}\cdot x^{(b-a)/a}dx \qquad \leftarrow -2m_1=(b-a)/a$$
$$=x^{m_1}\int\frac{dx}{x}=x^{m_1}\ln x.$$

则通解为

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x. \tag{3}$$

例 2　两个相等的实根

解 $4x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

解　把 $y = x^m$ 代入，得到

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1) = x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

其中 $4m^2+4m+1=0$ 或 $(2m+1)^2=0$. 因为 $m_1=-1/2$，所以通解为 $y=c_1x^{-1/2}+c_2x^{-1/2}\ln x$. ■

对于高阶方程，若 m_1 是 k 重根，则可以证明

$$x^{m_1}, x^{m_1}\ln x, x^{m_1}(\ln x)^2, \cdots, x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$$

是 k 个线性无关解. 相应地，微分方程的通解必须包含这 k 个解的线性组合.

情形Ⅲ：共轭复根　若(1)式的根是两个共轭复数 $m_1=\alpha+i\beta$，$m_2=\alpha-i\beta$，这里 α，$\beta>0$ 是实数，则解为

$$y = C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta}.$$

但当辅助方程的根是复数时，比如常系数微分方程的辅助方程，我们希望把解写成实函数的形式. 记

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta\ln x},$$

根据欧拉公式，可以写为

$$x^{i\beta} = \cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x).$$

同样地，

$$x^{-i\beta} = \cos(\beta\ln x) - i\sin(\beta\ln x).$$

把以上两个等式的左右两边分别相加、相减，可分别得到

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta\ln x) \text{ 和 } x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i\sin(\beta\ln x).$$

因为 $y=C_1x^{\alpha+i\beta}+C_2x^{\alpha-i\beta}$ 是对任何常数都适用的解，可以看到，依次令 $C_1=C_2=1$ 和 $C_1=1$，$C_2=-1$，则有

$$y_1 = x^\alpha(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \text{ 和 } y_2 = x^\alpha(x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

或

$$y_1 = 2x^\alpha\cos(\beta\ln x) \text{ 和 } y_2 = 2ix^\alpha\sin(\beta\ln x)$$

也是解. 由于在区间 $(0, +\infty)$ 上，$W(x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha\sin(\beta\ln x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$，$\beta>0$，因此可得

$$y_1 = x^\alpha\cos(\beta\ln x) \text{ 和 } y_2 = x^\alpha\sin(\beta\ln x)$$

构成了微分方程实解的基本解组. 因此，通解为

$$y = x^\alpha[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)]. \tag{4}$$

例 3　初值问题

解 $4x^2y'' + 17y = 0$，$y(1) = -1$，$y'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

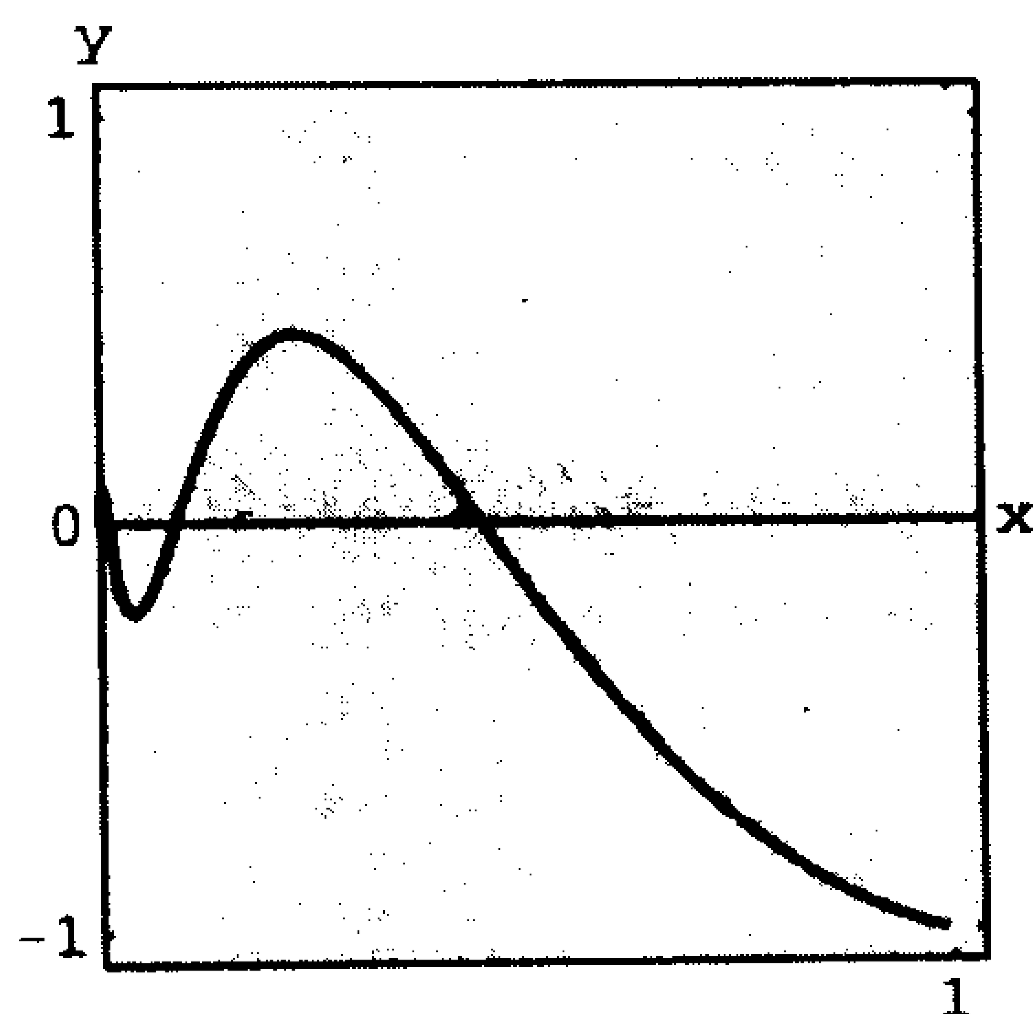
解　在这个柯西-欧拉方程中没有 y' 项，所以代入 $y = x^m$ 得

$$4x^2y'' + 17y = x^m(4m(m-1)+17) = x^m(4m^2-4m+17) = 0,$$

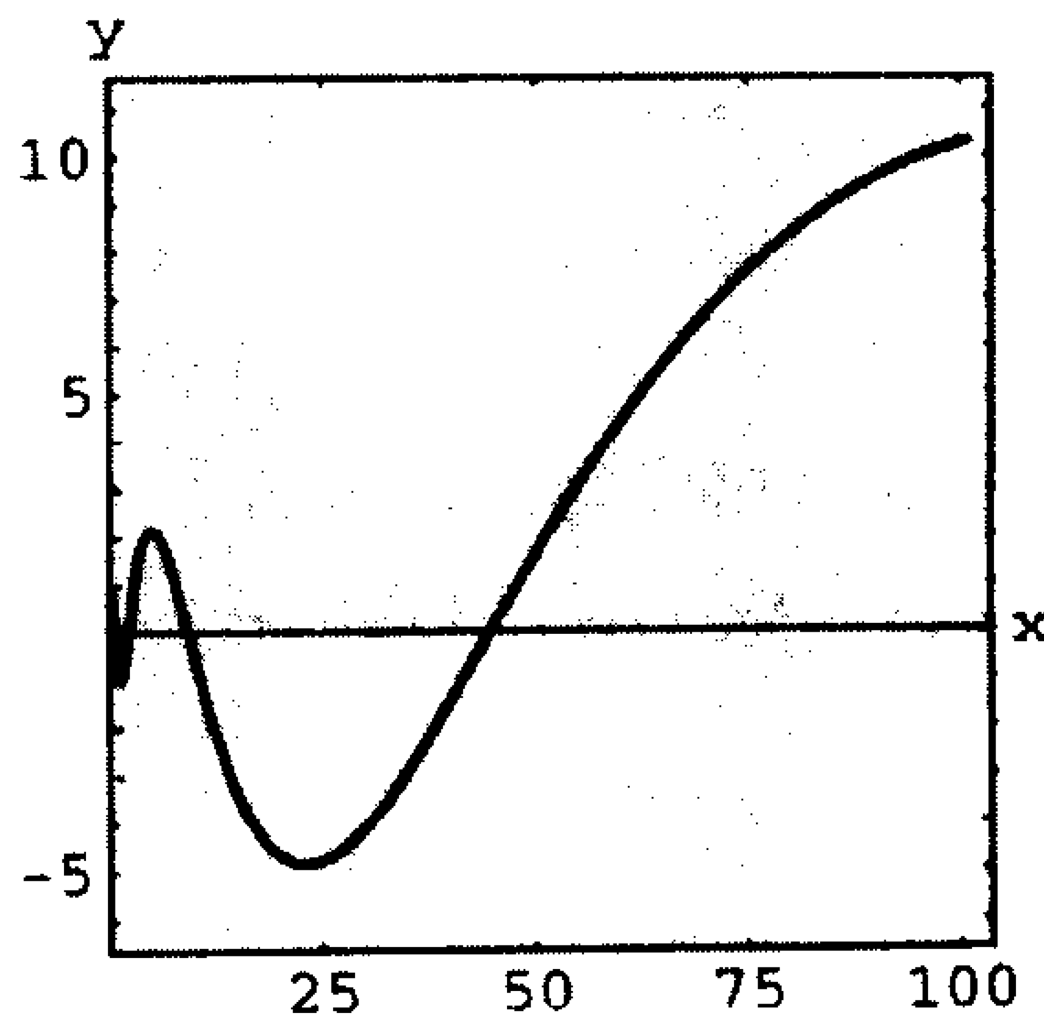
其中 $4m^2-4m+17=0$. 由二次根式的公式，可以求出两个根是 $m_1=1/2+2i$，$m_2=1/2-2i$. 令 $\alpha=1/2$，$\beta=2$，从(4)可以得到微分方程的通解为

$$y = x^{1/2}[c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x)].$$

再应用初始条件 $y(1)=-1$，$y'(1)=-1/2$，因为 $\ln 1=0$，所以依次可得 $c_1=-1$，$c_2=0$. 初值问题的解就为 $y=-x^{1/2}\cos(2\ln x)$. 用计算机绘出这个函数的图形，如图 4.15 所示. 当 $x\to+\infty$ 时，特解是无界且不稳定的.



a) 区间 $0<x\leqslant 1$ 上的解



b) 区间 $0<x\leqslant 100$ 上的解

图 4.15 ■

下一个例子给出了三阶柯西-欧拉方程的解.

例 4 三阶方程

解 $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+5x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+7x\dfrac{dy}{dx}+8y=0$.

解 $y=x^m$ 的前三阶导数分别是

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

因此，这个微分方程可以写成

$$\begin{aligned} x^3\frac{d^3y}{dx^3}+5x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}+8y &= x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3}+5x^2m(m-1)x^{m-2}+7xmx^{m-1}+8x^m \\ &= x^m(m(m-1)(m-2)+5m(m-1)+7m+8) \\ &= x^m(m^3+2m^2+4m+8) = x^m(m+2)(m^2+4) = 0. \end{aligned}$$

在本例中，我们看到 $y=x^m$ 是 $m_1=-2$，$m_2=2i$，$m_3=-2i$ 时的微分方程的解. 因此通解为 $y=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln x)+c_3\sin(2\ln x)$. ■

在 4.5 和 4.6 节中所述的待定系数法一般来说不能应用于变系数的线性微分方程. 因此，下一个例子使用了常数变易法.

例 5 常数变易法

解 $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$.

解 因为方程是非齐次的，所以先解它的相关齐次方程. 从辅助方程 $(m-1)(m-3)=0$

中，可以求出 $y_c=c_1x+c_2x^3$. 在用常数变易法求特解 $y_p=u_1y_1+u_2y_2$ 之前，回忆一下前面讲过的公式 $u_1'=W_1/W$，$u_2'=W_2/W$，这里 W_1、W_2 和 W 是 4.6 节所定义的行列式，这个公式是在假设微分方程化为标准型 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的条件下推导出的. 因此，用 x^2 去除方程的两端，并由

$$y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=2x^2\mathrm{e}^x$$

可以看出 $f(x)=2x^2\mathrm{e}^x$. 现在有 $y_1=x$，$y_2=x^3$ 和

$$W=\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=2x^3,W_1=\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2\mathrm{e}^x & 3x^2 \end{vmatrix}=-2x^5\mathrm{e}^x,W_2=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2\mathrm{e}^x \end{vmatrix}=2x^3\mathrm{e}^x,$$

可以求出 $u_1'=-\dfrac{2x^5\mathrm{e}^x}{2x^3}=-x^2\mathrm{e}^x$ 和 $u_2'=\dfrac{2x^3\mathrm{e}^x}{2x^3}=\mathrm{e}^x$.

对最后一个函数可以直接积分，但对 u_1' 要分两次积分. 结果为 $u_1=-x^2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x$，$u_2=\mathrm{e}^x$. 因此，$y_p=u_1y_1+u_2y_2$ 为

$$y_p=(-x^2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x)x+\mathrm{e}^xx^3=2x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x.$$

最后有 $y=y_c+y_p=c_1x+c_2x^3+2x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$. ■

常系数的降阶法 柯西-欧拉方程解的形式和常系数线性方程解的形式类似，但不完全相同. 例如，当 $ay''+by'+cy=0$ 和 $ax^2y''+bxy'+cy=0$ 的辅助方程的根都是两个不相等的实根时，它们的通解分别为

$$y=c_1\mathrm{e}^{m_1x}+c_2\mathrm{e}^{m_2x}\text{ 和 }y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2},x>0. \tag{5}$$

由 $\mathrm{e}^{\ln x}=x$，$x>0$，(5)中的第二个解可以写成和第一个解相同的形式：

$$y=c_1\mathrm{e}^{m_1\ln x}+c_2\mathrm{e}^{m_2\ln x}=c_1\mathrm{e}^{m_1t}+c_2\mathrm{e}^{m_2t},$$

其中 $t=\ln x$. 最后一个等式说明任何柯西一欧拉方程总可以通过做代换 $x=\mathrm{e}^t$ 写成一个常系数线性微分方程. 这个思想是用上一节的方法解一个变量为 t 的新的微分方程，得到通解后再做代换 $t=\ln x$. 最后一个例子说明了如何使用这种方法，这种方法需要使用微分的链式法则.

例 6 **变换成常系数微分方程**

解 $x^2y''-xy'+y=\ln x$.

解 做代换 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \leftarrow \text{链式法则}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \leftarrow \text{乘积法则与链式法则}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{x}\right)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$

把以上结果代入微分方程，整理后得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t.$$

因为这个方程是常系数的，所以它的辅助方程是 $m^2-2m+1=0$ 或 $(m-1)^2=0$. 因此，可得 $y_c=c_1\mathrm{e}^t+c_2t\mathrm{e}^t$.

用待定系数法，可以解出形如 $y_p=A+Bt$ 的特解. 由这个假设可得 $-2B+A+Bt=t$，所以 $A=2$，$B=1$. 再由 $y=y_c+y_p$ 可得

$$y=c_1\mathrm{e}^t+c_2t\mathrm{e}^t+2+t,$$

那么原始微分方程在区间$(0, +\infty)$上的通解为 $y=c_1x+c_2x\ln x+2+\ln x$. ■

练习 4.7

解习题 1～18 中的微分方程.

1. $x^2y''-2y=0$
2. $4x^2y''+y=0$
3. $xy''+y'=0$
4. $xy''-3y'=0$
5. $x^2y''+xy'+4y=0$
6. $x^2y''+5xy'+3y=0$
7. $x^2y''-3xy'-2y=0$
8. $x^2y''+3xy'-4y=0$
9. $25x^2y''+25xy'+y=0$
10. $4x^2y''+4xy'-y=0$
11. $x^2y''+5xy'+4y=0$
12. $x^2y''+8xy'+6y=0$
13. $3x^2y''+6xy'+y=0$
14. $x^2y''-7xy'+41y=0$
15. $x^3y'''-6y=0$
16. $x^3y'''+xy'-y=0$
17. $xy^{(4)}+6y'''=0$
18. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+9x^2y''+3xy'+y=0$

用常数变易法解习题 19～22 中的微分方程.

19. $xy''-4y'=x^4$
20. $2x^2y''+5xy'+y=x^2-x$
21. $x^2y''-xy'+y=2x$
22. $x^2y''-2xy'+2y=x^4\mathrm{e}^x$

解习题 23～28 中的初值问题. 用绘图工具绘出解曲线.

23. $x^2y''+3xy'=0, y(1)=0, y'(1)=4$
24. $x^2y''-5xy'+8y=0, y(2)=32, y'(2)=0$
25. $x^2y''+xy'+y=0, y(1)=1, y'(1)=2$
26. $x^2y''-3xy'+4y=0, y(1)=5, y'(1)=3$
27. $xy''+y'=x, y(1)=1, y'(1)=-\dfrac{1}{2}$
28. $x^2y''-5xy'+8y=8x^6, y\left(\dfrac{1}{2}\right)=0, y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

在习题 29～34 中，用 $x=\mathrm{e}^t$进行代换，把柯西-欧拉方程变换为常系数微分方程. 用 4.3～4.5 节中介绍的方法解新方程，从而得到原方程的解.

29. $x^2y''+9xy'-20y=0$
30. $x^2y''-9xy'+25y=0$
31. $x^2y''+10xy'+8y=x^2$
32. $x^2y''-4xy'+6y=\ln x^2$
33. $x^2y''-3xy'+13y=4+3x$
34. $x^2y'''-3x^2y''+6xy'-6y=3+\ln x^3$

解习题 35 和 36 中定义在区间$(-\infty, 0)$上的初值问题.

35. $4x^2y''+y=0, y(-1)=2, y'(-1)=4$
36. $x^2y''-4xy'+6y=0, y(-2)=8, y'(-2)=0$

讨论题

37. 如何利用本节介绍的方法解

$$(x+2)^2y''+(x+2)y'+y=0?$$

给出求解过程，并给出解的定义域.

38. 若已知 2 和 $1-\mathrm{i}$ 是辅助方程的根，能否找到一个最低阶的实系数柯西-欧拉方程？给出求解过程.

39. 把初值条件 $y(0)=y_0$，$y'(0)=y_1$代入下列微分方程：

$$x^2y''=0, x^2y''-2xy'+2y=0, x^2y''-4xy'+6y=0.$$

当 y_0、y_1为何值时，这些初值问题有解？

40. 图 4.15 所示的解曲线在 x 轴上的截距是多少？当区间为 $0<x<0.5$ 时，x 轴上的截距是多少？

计算机实验作业

在习题 41～44 中，用 CAS 软件的求根程序求解辅助方程的(近似)根，然后得到微分方程的解.

41. $2x^3y''' - 10.98x^2y'' + 8.5xy' + 1.3y = 0$

42. $x^3y''' + 4x^2y'' + 5xy' - 9y = 0$

43. $x^4y^{(4)} - 6x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

44. $x^4y^{(4)} - 6x^3y''' + 33x^2y'' - 105xy' + 169y = 0$

4.8 消元法解线性方程组

联立的常微分方程包括两个或更多的方程，它们都含有多个因变量的导数，也就是未知函数对一个自变量的导数. 解常系数线性微分方程组的消元法(systematic elimination)基于变量消去的代数原理. 类似于对一个代数方程乘一个常数，我们也对常微分方程进行同样的运算. 因为这种方法不会改变原方程组，所以本节同时为读者提供了一个复习本章前面部分的机会.

方程组消元法 线性微分方程组的消元法是通过用微分算子记号表示方程组中的方程来进行的. 在 4.1 节中，线性微分方程

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(t),$$

这里 a_i，$i=0, 1, \cdots, n$ 是常数，可以写成

$$(a_nD^{(n)} + a_{n-1}D^{(n-1)} + \cdots + a_1D + a_0)y = g(t).$$

若 n 阶微分算子 $a_nD^{(n)}+a_{n-1}D^{(n-1)}+\cdots+a_1D+a_0$ 对低阶的微分算子也适用，那么这些算子是可以互相交换的. 例如，用微分算子 D 表示方程组

$$x'' + 2x' + y'' = x + 3y + \sin t,$$
$$x' + y' = 4x + 2y + e^{-t},$$

首先把含有因变量的项都写到等式左边，整理后得：

$$\begin{aligned} x'' + 2x' - x + y'' - 3y &= \sin t \\ x' - 4x + y' - 2y &= e^{-t} \end{aligned} \quad \text{等价于} \quad \begin{aligned} (D^2 + 2D - 1)x + (D^2 - 3)y &= \sin t \\ (D - 4)x + (D - 2)y &= e^{-t}. \end{aligned}$$

方程组的解 微分方程组的解(solution)是一族充分可微的函数 $x=\phi_1(t)$，$y=\phi_2(t)$，$z=\phi_3(t)$等等，这些解在某个区间 I 上满足方程组的每个方程.

求解方法 考虑一个简单的线性一阶微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x \end{aligned} \quad \text{或等价地，} \quad \begin{aligned} Dx - 3y &= 0 \\ 2x - Dy &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

把 D 作用于(1)的第一个方程，同时在第二个方程两端乘上 -3，然后把两式相加起来，从方程组中消去 y，得到 $D^2x-6x=0$. 因为这个微分方程辅助方程的根为 $m_1=\sqrt{6}$，$m_2=-\sqrt{6}$，所以可得

$$x(t) = c_1e^{-\sqrt{6}t} + c_2e^{\sqrt{6}t}. \tag{2}$$

也可以在(1)的第一个方程两端乘上 2，同时把 D 作用于第二个方程，两式相减得到关于 y 的微分方程 $D^2y-6y=0$. 直接可得

$$y(t) = c_3 e^{-\sqrt{6}t} + c_4 e^{\sqrt{6}t}. \tag{3}$$

现在(2)和(3)不是对所有的 c_1、c_2、c_3和 c_4都满足方程组(1)，因为方程组本身对解中任意可能的参数做了限制. 为了说明这点，把 $x(t)$和 $y(t)$代入原方程组(1)的第一个方程，化简后得

$$(-\sqrt{6}c_1 - 3c_3)e^{-\sqrt{6}t} + (\sqrt{6}c_2 - 3c_4)e^{\sqrt{6}t} = 0.$$

由于这个表达式对所有 t 的值都等于零，所以必须有$-\sqrt{6}c_1 - 3c_3 = 0$ 和$\sqrt{6}c_2 - 3c_4 = 0$. 这两个方程使得我们可以分别用 c_1、c_2表示 c_3、c_4：

$$c_3 = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_1 \quad 和 \quad c_4 = \frac{\sqrt{6}}{3}c_2. \tag{4}$$

因此，我们可以得到方程组的解是

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{6}t} + c_2 e^{\sqrt{6}t}, \quad y(t) = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_1 e^{-\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{3}c_2 e^{\sqrt{6}t}.$$

然后把(2)、(3)代入方程组(1)的第二个方程，可以验证这些常数之间仍然满足关系(4).

例 1　用消元法求解

解

$$\begin{aligned} Dx + (D+2)y &= 0 \\ (D-3)x - 2y &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

解　对第一个方程应用 $D-3$，对第二个方程应用 D，然后把得到的结果相减，从方程组中消去 x，然后得到下列 y 的微分方程：

$$[(D-3)(D+2)+2D]y = 0 \text{ 或}(D^2+D-6)y = 0.$$

因为这个微分方程的特征方程为 $m^2+m-6=(m-2)(m+3)=0$，所以解得

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}. \tag{6}$$

用类似的方法消去方程组中的 y，得到$(D^2+D-6)x=0$，然后可解得

$$x(t) = c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}. \tag{7}$$

正如我们前面所讨论的，(5)的解不包含四个独立的常数. 把(6)和(7)代入(5)的第一个方程，可得

$$(4c_1 + 2c_3)e^{2t} + (-c_2 - 3c_4)e^{-3t} = 0.$$

由 $4c_1+2c_3=0$ 和$-c_2-3c_4=0$ 可得 $c_3=-2c_1$和 $c_4=-\frac{1}{3}c_2$，从而方程组的解为

$$x(t) = -2c_1 e^{2t} - \frac{1}{3}c_2 e^{-3t}, y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

■

因为 c_3、c_4可以很容易地分别用 c_1、c_2解出来，所以例 1 的解可以写成如下等价形式

$$x(t) = c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}, y(t) = -\frac{1}{2}c_3 e^{2t} - 3c_4 e^{-3t}.$$

注　有时在解方程的时候需要注意，如果先用常数之间的关系解 x 再解 y，则需要用(5)的第二个方程. 读者可以证明把 $x(t)$代入 $y=\frac{1}{2}(Dx-3x)$可以得到 $y=-\frac{1}{2}c_3e^{2t}-3c_4e^{-3t}$.

例 2 用消元法求解

解

$$x' - 4x + y'' = t^2$$
$$x' + x + y' = 0. \tag{8}$$

解 首先，用微分算子记号表示方程组

$$(D-4)x + D^2 y = t^2$$
$$(D+1)x + Dy = 0. \tag{9}$$

然后，消去 x，可得

$$[(D+1)D^2 - (D-4)D]y = (D+1)t^2 - (D-4)0$$

或

$$(D^3 + 4D)y = t^2 + 2t.$$

因为辅助方程 $m(m^2+4)=0$ 的根为 $m_1=0$，$m_2=2i$，$m_3=-2i$，则余函数为

$$y_c = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t.$$

为了求特解 y_p，可以假定 $y_p=At^3+Bt^2+Ct$，然后用待定系数法求解. 所以有

$$y'_p = 3At^2 + 2Bt + C, y''_p = 6At + 2B, y'''_p = 6A,$$
$$y'''_p + 4y'_p = 12At^2 + 8Bt + 6A + 4C = t^2 + 2t.$$

最后一个等式意味着 $12A=1$，$8B=2$，$6A+4C=0$；由此有 $A=1/12$，$B=1/4$，$C=-1/8$. 那么

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t. \tag{10}$$

从方程组(9)中消去 y，可得

$$[(D-4) - D(D+1)]x = t^2 \text{ 或 } (D^2+4)x = -t^2.$$

很明显有

$$x_c = c_4\cos 2t + c_5\sin 2t,$$

用待定系数法可以得到形如 $x_p=At^2+Bt+C$ 的特解. 在这种情形下，用微分和代数方法可以解得 $x_p=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8}$，因此

$$x = x_c + x_p = c_4\cos 2t + c_5\sin 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}. \tag{11}$$

接下来把(10)和(11)代入(8)的任何一个方程，可以得到用 c_2，c_3 表示的 c_4，c_5. 利用第二个方程，合并同类项后可得

$$(c_5 - 2c_4 - 2c_2)\sin 2t + (2c_5 + c_4 + 2c_3)\cos 2t = 0,$$

所以 $c_5-2c_4-2c_2=0$，$2c_5+c_4+2c_3=0$. 用 c_2，c_3 把 c_4，c_5 解出来，可得

$$c_4 = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3), c_5 = \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3).$$

最后，(8)的解为

$$x(t) = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3)\cos 2t + \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3)\sin 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$
$$y(t) = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t.$$

■

例 3 再论数学模型

在 3.3 节中，我们知道线性一阶微分方程组描述了在两个容器中流动的盐 $x_1(t)$和盐溶液 $x_2(t)$的重量. 那时，我们还不能解这样的方程组. 但是现在用微分算子，方程组可以写为

$$\left(D+\frac{2}{25}\right)x_1-\frac{1}{50}x_2=0,$$

$$-\frac{2}{25}x_1+\left(D+\frac{2}{25}\right)x_2=0.$$

对第一个方程应用 $D+2/25$，在第二个方程两端乘以 $1/50$，相加并整理后得

$$(625D^2+100D+3)x_1=0.$$

由辅助方程

$$625m^2+100m+3=(25m+1)(25m+3)=0$$

可以马上得到

$$x_1(t)=c_1\mathrm{e}^{-t/25}+c_2\mathrm{e}^{-3t/25}.$$

用同样的方法，可以求得$(625D^2+100D+3)x_2=0$，然后有

$$x_2(t)=c_3\mathrm{e}^{-t/25}+c_4\mathrm{e}^{-3t/25}.$$

把 $x_1(t)$和 $x_2(t)$代入方程组的第一个方程，然后可得

$$(2c_1-c_3)\mathrm{e}^{-t/25}+(-2c_2-c_4)\mathrm{e}^{-3t/25}=0.$$

由这个方程可以求出 $c_3=2c_1$，$c_4=-2c_2$. 因此方程组的解为

$$x_1(t)=c_1\mathrm{e}^{-t/25}+c_2\mathrm{e}^{-3t/25},x_2(t)=2c_1\mathrm{e}^{-t/25}-2c_2\mathrm{e}^{-3t/25}.$$

在刚开始的讨论中，我们假设初始条件为 $x_1(0)=25$，$x_2(0)=0$. 把这些条件代入解中可以得到 $c_1+c_2=25$，$2c_1-2c_2=0$. 同时解这些方程可以得到 $c_1=c_2=25/2$. 最后，初值问题的解为

$$x_1(t)=\frac{25}{2}\mathrm{e}^{-t/25}+\frac{25}{2}\mathrm{e}^{-3t/25},x_2(t)=25\mathrm{e}^{-t/25}-25\mathrm{e}^{-3t/25}.$$ ■

练习 4.8

用消元法解习题 1～20 中的微分方程组.

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x$

2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4x+7y$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2y$

3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+t$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-t$

4. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4y=1$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x=2$

5. $(D^2+5)x-2y=0$

   $-2x+(D^2+2)y=0$

6. $(D+1)x+(D-1)y=2$

   $3x+(D+2)y=-1$

7. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=4y+\mathrm{e}^t$

   $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=4x-\mathrm{e}^t$

8. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-5x$

   $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+4y$

9. $Dx+D^2y=\mathrm{e}^{3t}$

   $(D+1)x+(D-1)y=4\mathrm{e}^{3t}$

10. $D^2x-Dy=t$

    $(D+3)x+(D+3)y=2$

11. $(D^2-1)x-y=0$

    $(D-1)x+Dy=0$

12. $(2D^2-D-1)x-(2D+1)y=1$

    $(D-1)x+Dy=-1$

13. $2\dfrac{dx}{dt}-5x+\dfrac{dy}{dt}=e^t$

    $\dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}=5e^t$

14. $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=e^t$

    $-\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x+y=0$

15. $(D-1)x+(D^2+1)y=1$

    $(D^2-1)x+(D+1)y=2$

16. $D^2x-2(D^2+D)y=\sin t$

    $x+Dy=0$

17. $Dx=y$

    $Dy=z$

    $Dz=x$

18. $Dx+z=e^t$

    $(D-1)x+Dy+Dz=0$

    $x+2y+Dz=e^t$

19. $\dfrac{dx}{dt}=6y$

    $\dfrac{dy}{dt}=x+z$

    $\dfrac{dz}{dt}=x+y$

20. $\dfrac{dx}{dt}=-x+z$

    $\dfrac{dy}{dt}=-y+z$

    $\dfrac{dz}{dt}=-x+y$

解习题 21 和 22 中的初值问题.

21. $\dfrac{dx}{dt}=-5x-y$

    $\dfrac{dy}{dt}=4x-y$

    $x(1)=0, y(1)=1$

22. $\dfrac{dx}{dt}=y-1$

    $\dfrac{dy}{dt}=-3x+2y$

    $x(0)=0, y(0)=0$

23. 从枪中射出一发子弹，子弹重 $w=mg$，速度 $\boldsymbol{v}$ 与其运动轨迹相切. 忽略空气阻力及除自身重力外的其他力，写出一个微分方程组，描述子弹的运动情况. 请参考图 4.16. 解这个方程组. [提示：分别在 x 和 y 方向运用牛顿第二运动定律.]

24. 若习题 23 中的子弹受到与其运动方向相反、与轨迹相切的阻力 $\boldsymbol{k}$(大小为 k)，则描述运动的微分方程组是怎样的. 请参考图 4.17. 解这个方程组. [提示：k 是速度的倍数，即 cv.]

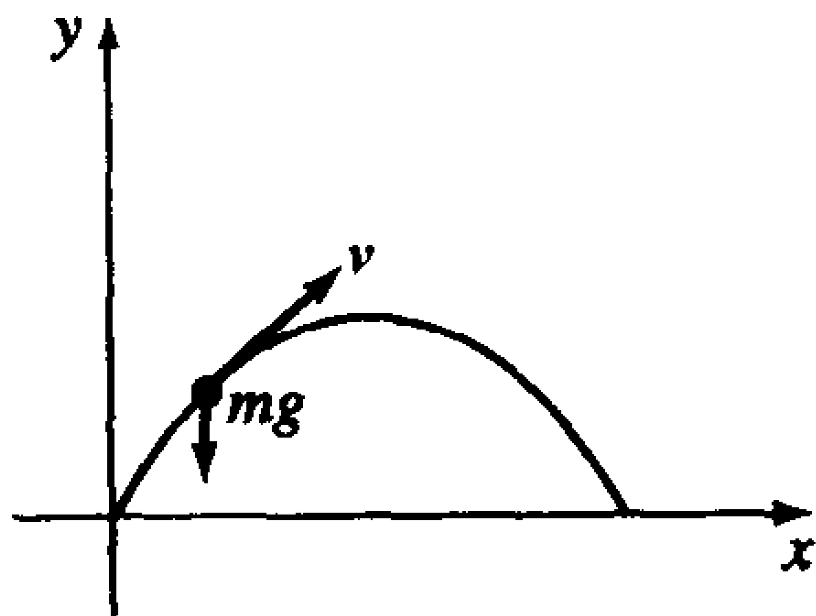


图 4.16

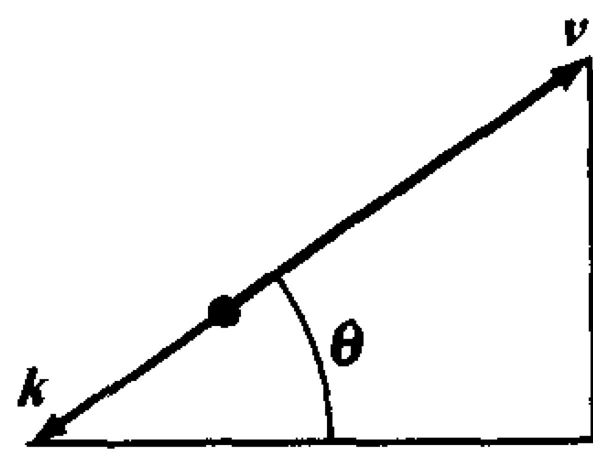


图 4.17

讨论题

25. 讨论下列方程组：

$$Dx-2Dy=t^2$$

$$(D+1)x-2(D+1)y=1.$$

4.9 非线性方程

线性和非线性微分方程有几个很明显的差别. 在 4.1 节中，我们知道二阶或二阶以上齐次线性方程有一个性质，就是解的线性组合仍然是方程的解(定理 4.2). 非线性方程没有这种叠加性质. (见练习 4.9 中的习题 1 和习题 20.)我们可以求出常系数线性一阶或高阶微分方程的通解. 但是我们求出的非线性一阶微分方程的单参数解族并不是它的通解. 换句话说，非线性一阶微分方程有奇异解而线性方程没有. 但是二阶或二阶以上的线性和非线性微分方程的主要区别是解的存在性. 给定一个线性方程，我们可以求出其解的不同形式，显式解或无穷级数形式的解(请见第 6 章). 另一方面，非线性高阶微分方程实际上一般不能用解析方法来解. 尽管这样，但还是可以用其他方法来解的. 正如在 1.3 节的末尾处指出的，我们总是可以通过定性和定量两方面来分析非线性微分方程.

在开始讨论非线性微分方程时，我们要强调一下，非线性微分方程是非常重要的，甚至比线性方程更重要，为什么呢? 因为物理世界的精确数学模型在很大程度上都是用非线性方程来描述的.

我们通过展示一个分析方法来开始本节的讨论，有时候分析方法可以使我们求出一些特殊类型的非线性二阶微分方程的显式解或隐式解.

降阶法 非线性二阶微分方程 $F(x, y', y'')=0$(不含因变量 y)和 $F(y, y', y'')=0$(不含自变量 x)有时可以用一阶方法来解. 每个方程都可以通过换元法降为一阶方程.

下一个例子说明了对形如 $F(x, y', y'')=0$ 的方程如何使用换元法. 若 $u=y'$，那么微分方程可以写为 $F(x, u, u')=0$. 如果能从这个方程中解出 u，通过积分就可以求出 y. 注意因为我们可以解这个二阶方程，所以它的解包含了两个任意的常数.

例 1 不含 y 的二阶方程

解 $y''=2x(y')^2$.

解 若令 $u=y'$，则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=y''$. 换元后，二阶方程降为可分离变量的一阶方程；自变量是 x，因变量为 u：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2xu^2 \text{ 或} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}=2x\mathrm{d}x,$$

$$\int u^{-2}\mathrm{d}u=\int 2x\mathrm{d}x,$$

$$-u^{-1}=x^2+c_1^2.$$

为了方便起见，记积分常数为 c_1^2. 接下来的几步推导是明显的. 因为 $u^{-1}=1/y'$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x^2+c_1^2},$$

$$y=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+c_1^2} \text{ 或 } y=-\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\frac{x}{c_1}+c_2.$$ ■

我们再来看一下如何解形如 $F(y, y', y'')=0$ 的方程. 再令 $u=y'$，但由于方程中不含自变量 x，所以把这个代换代入变形的微分方程中，y 为自变量，u 为因变量. 再用链式法则计

算 y 的二阶导数：

$$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}.$$

本例中，我们要解的一阶微分方程为

$$F\left(y,u,u\frac{du}{dy}\right)=0.$$

例 2　不含自变量 x 的二阶方程

解 $yy''=(y')^2$.

解　令 $u=y'$，由链式法则和变量分离法，微分方程可以写为

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right)=u^2 \text{ 或} \frac{du}{u}=\frac{dy}{y}.$$

对方程积分，可依次求得 $\ln|u|=\ln|y|+c_1$ 和 $u=c_2y$，这里常数项 $\pm e^{c_1}$ 用 c_2 代替. 把 $u=dy/dx$ 代回积分结果，再用一次分离变量法，并求积分，重新标记常数项后得：

$$\int\frac{dy}{y}=c_2\int dx \text{ 或 } \ln|y|=c_2x+c_3 \text{ 或 } y=c_4e^{c_2x}.$$ ■

使用泰勒级数　一些初始条件在 x_0 处的非线性初值问题的解可以通过在 $x=x_0$ 处的泰勒级数来近似.

例 3　初值问题的泰勒级数解

假设初值问题

$$y''=x+y-y^2, y(0)=-1, y'(0)=1 \tag{1}$$

的解存在. 若这个初值问题的解 $y(x)$ 在 0 处可以通过解析方法得到，则 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为：

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5+\cdots. \tag{2}$$

注意到(2)中第一项和第二项的值已知，因为这些值在初值条件 $y(0)=-1$，$y'(0)=1$ 中给出. 进一步，微分方程本身定义了二阶导数在 0 处的值：$y''(0)=0+y(0)-y(0)^2=0+(-1)-(-1)^2=-2$. 那么可以通过计算微分方程的连续导数求出高阶导数 y'''，$y^{(4)}$，…的值：

$$y'''(x)=\frac{d}{dx}(x+y-y^2)=1+y'-2yy', \tag{3}$$

$$y^{(4)}(x)=\frac{d}{dx}(1+y'-2yy')=y''-2yy''-2(y')^2, \tag{4}$$

$$y^{(5)}(x)=\frac{d}{dx}(y''-2yy''-2(y')^2)=y'''-2yy'''-6y'y'', \tag{5}$$

等等. 再利用 $y(0)=-1$，$y'(0)=1$，从(3)中可以求出 $y'''(0)=4$. 又由 $y(0)=-1$，$y'(0)=1$，$y''(0)=-2$，可以从(4)中求出 $y^{(4)}(0)=-8$. 因为 $y'''(0)=4$，所以可以从(5)中求出 $y^{(5)}(0)=24$. 因此，由(2)可以计算出初值问题(1)的级数解的前六项为

$$y(x)=-1+x-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots.$$ ■

数值求解程序的使用　有些数值方法如欧拉方法或龙格-库塔方法只能用来解一阶微分方

程，最多也只能用于一阶方程组．为了分析 n 阶初值问题的数值解，我们可以把 n 阶常微分方程写成 n 个一阶方程组成的方程组．为了简要地说明这个方法，这里只举例说明二阶初值问题的解法：首先，解出 y''，也就是把微分方程写成正规型 $y''=f(x, y, y')$，然后，令 $y'=u$．例如，如果把 $y'=u$ 代入

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=f(x,y,y'),y(x_0)=y_0,y'(x_0)=u_0, \tag{6}$$

则有 $y''=u'$ 和 $y'(x_0)=u(x_0)$，所以初值问题(6)就可以写为

$$\text{解：}\begin{cases} y'=u \\ u'=f(x,y,u) \end{cases}$$

$$\text{使得：}\quad y(x_0)=y_0,u(x_0)=u_0.$$

但是要注意，有些商业数值计算软件可能不要求给出方程组．[⊖]

例4　例3的图形分析

由前面的讨论可知，例3中的二阶初值问题等价于

$$\frac{dy}{dx}=u,$$

$$\frac{du}{dx}=x+y-y^2,$$

初值条件为 $y(0)=-1$，$u(0)=1$．用数值求解程序可以得到如图4.18所示的解曲线．为了进行比较，五次泰勒多项式 $T_5(x)=-1+x-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5$ 的图形用黑色标记．尽管不知道例3中泰勒级数的收敛区间，但是图中原点附近两条曲线紧密靠近的一段表明幂级数可能在区间$(-1, 1)$上收敛． ■

定性问题　图4.18中的图形给我们提出了一些有关其性质的问题：原始初值问题的解在 $x\to+\infty$ 时是不稳定的吗？数值求解程序在更大区间上所绘出的图形做出了肯定的回答，如图4.19所示．但是这个例子，或者说这类例子都不能说明微分方程 $y''=x+y-y^2$ 的所有解都是不稳定的．同时，x 在-1附近时如图4.19所示的解曲线会有什么情况发生？当 $x\to-\infty$ 时微分方程解的性态是怎样的？当 $x\to+\infty$ 时解是有界的吗？一般来讲，这些问题对于非线性二阶微分方程并不容易回答．但是某种类型的二阶方程使得我们可以借助方程组来进行定性分析，像我们在2.1节中遇到的一阶方程就是一类没有显式解的方程．形如

$$F(y,y',y'')=0\text{ 或 }\frac{d^2 y}{dx^2}=f(y,y')$$

的不含自变量 x 的二阶常微分方程被称为自治的(autonomous)．例2中的微分方程就是自治的，例3中的方程在等式右边有含 x 的项，所以是非自治的．关于自治二阶微分方程和自治微分方程组稳定性的话题我们将在第10章中深入讨论．

⊖ 有些数值求解程序只需要给出二阶微分方程的正规型表达式 $y''=f(x, y, y')$．把单个方程转换成两个方程的方程组的程序内置在计算机软件中，因为方程组的第一个方程总是 $y'=u$，第二个方程总是 $u'=f(x, y, u)$．

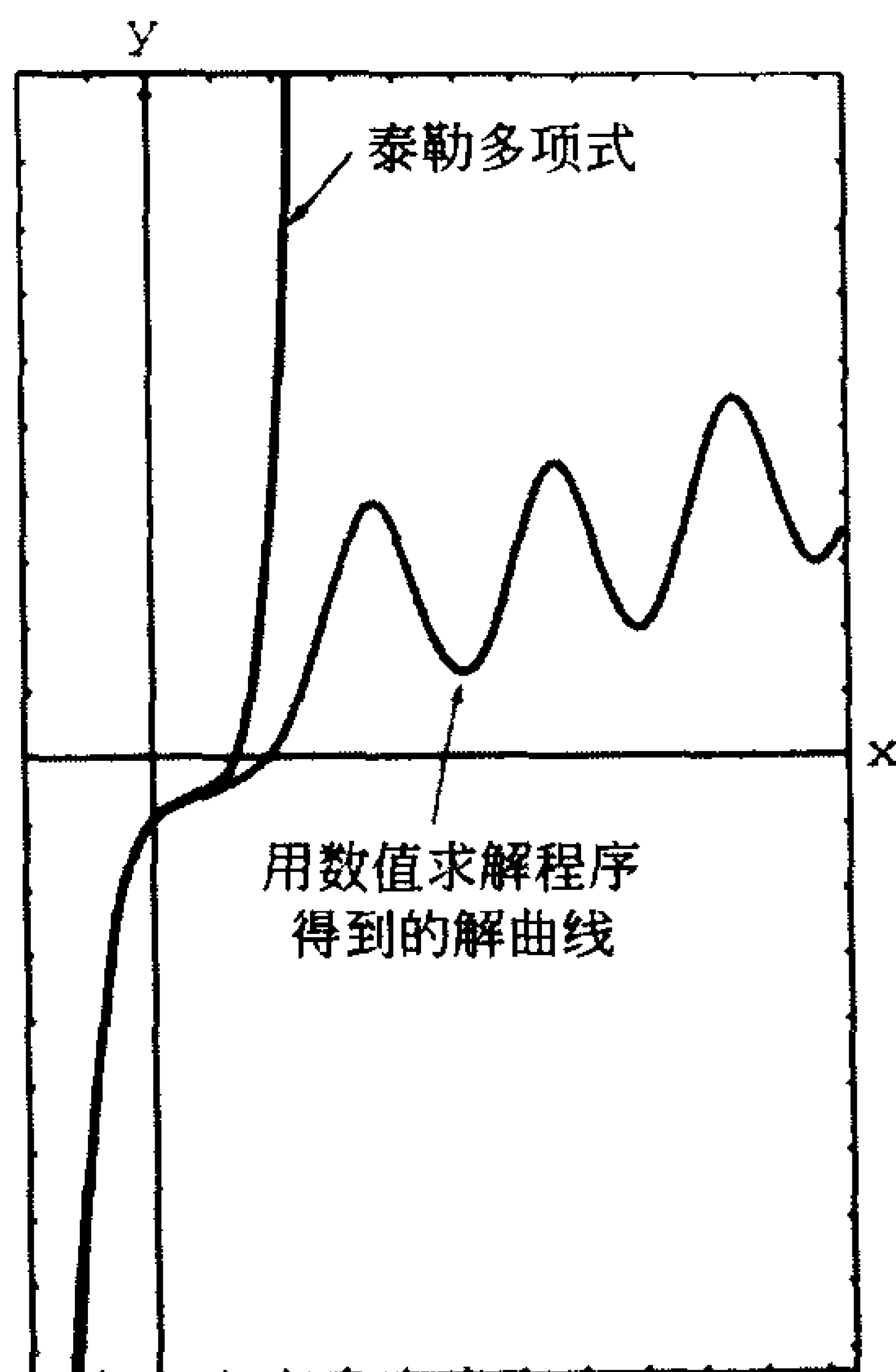


图 4.18 两个近似解的比较

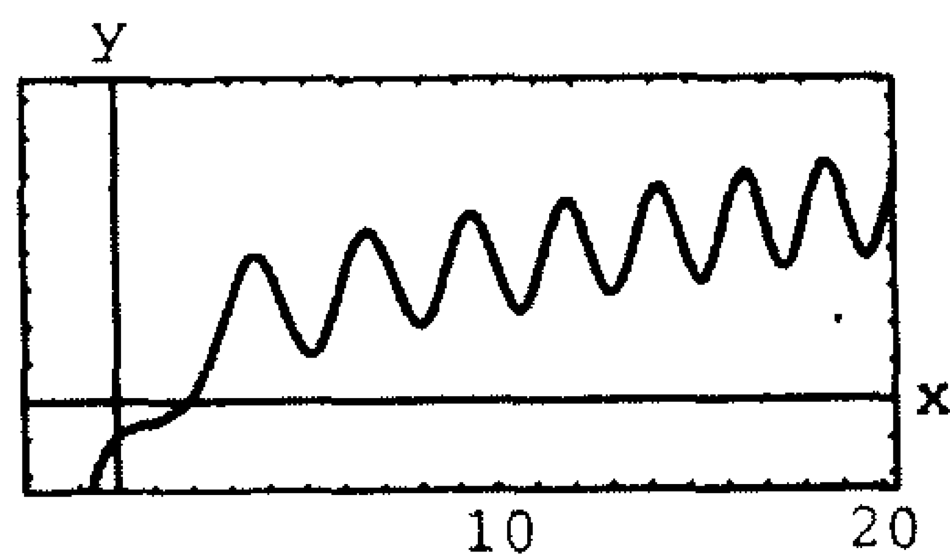


图 4.19

练习 4.9

在习题 1 和 2 中，证明 y_1、y_2是微分方程的解，但是通解形式的 $y=c_1y_1+c_2y_2$却不是解.

1. $(y'')^2=y^2$； $y_1=e^x$， $y_2=\cos x$

2. $yy''=\frac{1}{2}(y')^2$； $y_1=1$， $y_2=x^2$

在习题 3～8 中，用换元法 $u=y'$解微分方程.

3. $y''+(y')^2+1=0$

4. $y''=1+(y')^2$

5. $x^2y''+(y')^2=0$

6. $(y+1)y''=(y')^2$

7. $y''+2y(y')^3=0$

8. $y^2y''=y'$

9. 考虑初值问题 $y''+yy'=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$.

(a)用微分方程和数值求解程序绘出解曲线的图形.

(b)求初值问题的显式解. 用绘图工具绘出解的图形.

(c)求(b)中解的定义区间.

10. 求初值问题的两个解

$$(y'')^2+(y')^2=1,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

用数值求解程序绘出解曲线.

在习题 11 和 12 中，证明用换元法 $u=y'$可以得到一个伯努利方程. 解这个方程(请见 2.5 节).

11. $xy''=y'+(y')^3$

12. $xy''=y'+x(y')^2$

在习题 13～16 中，如例 3 所示的计算过程，写出所给初值问题的泰勒级数解的前六个非零项，以 0 为中心. 用数值求解程序和绘图工具比较解曲线和泰勒多项式的图形.

13. $y''=x+y^2$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$

14. $y''+y^2=1$，$y(0)=2$，$y'(0)=3$

15. $y''=x^2+y^2-2y'$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$

16. $y''=e^y$，$y(0)=0$，$y'(0)=-1$

17. 在微积分中，曲线 $y=f(x)$的曲率定义为

$$\kappa = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}.$$

求 $\kappa=1$ 时的 $y=f(x)$. [提示：简单起见，忽略积分常数项.]

18. 一个在逆向力场中沿 x 轴做直线运动的物体，描述其位置 $x(t)$ 的数学模型为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{x^2}.$$

设 $t=0$ 时刻，物体由静止状态从 $x=x_0$ 处开始运动，$x_0>0$. 证明在任意时刻物体的速度为 $v^2=2k^2(1/x-1/x_0)$. 用 CAS 做积分运算，并用 x 表示时刻 t.

讨论题

19. 运动物体的位置 $x(t)$ 用数学模型描述为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0.$$

用数值求解程序绘出满足初值条件 $x(0)=0$，$x'(0)=x_1$，$x_1\geqslant 0$ 的解. 讨论 x_1 改变时，$t\geqslant 0$ 时刻物体的运动状态. 用同样的方式考察方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \sin x = 0.$$

讨论 dx/dt 项可能有的物理解释.

20. 在习题 1 中，我们知道 $\cos x$ 和 e^x 都是非线性方程 $(y'')^2-y^2=0$ 的解. 证明 $\sin x$ 和 e^{-x} 也是该方程的解. 不解方程，讨论如何通过线性方程的某些特征来寻找显式解. 不加证明，讨论为什么线性组合 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$ 和 $y=c_2e^{-x}+c_4\sin x$ 不是通解，而两个特殊的线性组合 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 和 $y=c_3\cos x+c_4\sin x$ 一定是微分方程的解.

21. 讨论如何用本节介绍的降阶法来解三阶微分方程 $y'''=\sqrt{1+(y'')^2}$. 给出求解过程.

第 4 章复习题

不参考课本回答习题 1～4. 填空或判断对错.

1. 初值问题 $y''+x^2y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$ 的唯一解为________.
2. 用待定系数法解方程，假设 $y''-y=1+e^x$ 的特解 y_p 的形式为________.
3. 线性微分方程的解乘上一个常数仍然是它的解.
4. 若两个函数 f_1、f_2 组成的集合在区间 I 上是线性无关的，则朗斯基行列式 $W(f_1, f_2)\neq 0$ 对 I 上的所有 x 都成立.
5. 给定一个区间，函数 $f_1(x)=x^2$ 和 $f_2(x)=x|x|$ 在其上线性无关. 求一个区间，使得 f_1、f_2 在其上线性相关.
6. 不用朗斯基行列式，判断所给的函数集合在指定的区间上是线性无关还是线性相关的.

   (a) $f_1(x)=\ln x, f_2(x)=\ln x^2, (0,+\infty)$

   (b) $f_1(x)=x^n, f_2(x)=x^{n+1}, n=1,2,\cdots, (-\infty,+\infty)$

   (c) $f_1(x)=x, f_2(x)=x+1, (-\infty,+\infty)$

   (d) $f_1(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), f_2(x)=\sin x, (-\infty,+\infty)$

   (e) $f_1(x)=0, f_2(x)=x, (-5,5)$

   (f) $f_1(x)=2, f_2(x)=2x, (-\infty,+\infty)$

(g) $f_1(x)=x^2, f_2(x)=1-x^2, f_3(x)=2+x^2, (-\infty,+\infty)$

(h) $f_1(x)=xe^{x+1}, f_2(x)=(4x-5)e^x, f_3(x)=xe^x, (-\infty,+\infty)$

7. 设 $m_1=3$，$m_2=-5$，$m_3=1$ 分别是辅助方程的单重根、双重根和三重根. 写出相应的齐次线性微分方程的通解，若有

(a)一个常系数方程.

(b)一个柯西–欧拉方程.

8. 考虑微分方程 $ay''+by'+cy=g(x)$，其中 a、b、c 是常数. 用待定系数法和常数变易法解具有不同输入函数 $g(x)$的方程.

(a) $g(x)=e^x\ln x$　　(b) $g(x)=x^3\cos x$

(c) $g(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$　　(d) $g(x)=2x^{-2}e^x$

(e) $g(x)=\sin^2 x$　　(f) $g(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$

在习题 9～24 中，用本章介绍的方法解每个微分方程的通解.

9. $y''-2y'-2y=0$

10. $2y''+2y'+3y=0$

11. $y'''+10y''+25y'=0$

12. $2y'''+9y''+12y'+5y=0$

13. $3y'''+10y''+15y'+4y=0$

14. $2y^{(4)}+3y'''+2y''+6y'-4y=0$

15. $y''-3y'+5y=4x^3-2x$

16. $y''-2y'+y=x^2e^x$

17. $y'''-5y''+6y'=8+2\sin x$

18. $y'''-y''=6$

19. $y''-2y'+2y=e^x\tan x$

20. $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$

21. $6x^2y''+5xy'-y=0$

22. $2x^3y'''+19x^2y''+39xy'+9y=0$

23. $x^2y''-4xy'+6y=2x^4+x^2$

24. $x^2y''-xy'+y=x^3$

25. 分别在两种情况下 $\omega\neq\alpha$ 和 $\omega=\alpha$ 写出微分方程的通解 $y=y_c+y_p$. 不用求出 y_p 中的系数.

(a) $y''+\omega^2y=\sin\alpha x$　　(b) $y''-\omega^2y=e^{\alpha x}$

26. (a)已知 $y=\sin x$ 是 $y^{(4)}+2y'''+11y''+2y'+10y=0$ 的一个解，不用计算器或计算机求微分方程的通解.

(b)寻找一个常系数线性二阶微分方程，使得 $y_1=1$ 和 $y_2=e^{-x}$ 是其相关齐次方程的解，$y_p=\frac{1}{2}x^2-x$ 是非齐次方程的解.

27. (a)用双曲函数写出四阶微分方程 $y^{(4)}-2y''+y=0$ 的通解.

(b)写出 $y^{(4)}-2y''+y=\sinh x$ 特解的形式.

28. 考虑微分方程 $x^2y''-(x^2+2x)y'+(x+2)y=x^3$. 证明 $y_1=x$ 是相关齐次方程的一个解. 然后用 4.2 节中介绍的降阶法解出齐次方程的第二个解 y_2，以及非齐次方程的特解 y_p. 写出微分方程在区间$(0,+\infty)$上的通解.

在习题 29～34 中，解所给条件下的微分方程.

29. $y''-2y'+2y=0$，$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y(\pi)=-1$

30. $y''+2y'+y=0$，$y(-1)=0$，$y'(0)=0$

31. $y''-y=x+\sin x$，$y(0)=2$，$y'(0)=3$

32. $y''+y=\sec^3 x$，$y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$

33. $y'y''=4x$，$y(1)=5$，$y'(1)=2$

34. $2y''=3y^2$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$

35. (a)用 CAS 求出 $12y^{(4)}+64y'''+59y''-23y'-12y=0$ 的辅助方程的根. 写出方程的通解.

(b)求出(a)的方程在初始条件 $y(0)=-1$，$y'(0)=2$，$y''(0)=5$，$y'''(0)=0$ 下的解. 用 CAS 解含有四

个未知变量的方程组.

36. 求出 $xy''+y'+\sqrt{x}=0$ 解族中的一个特解，它的图形与 x 轴在 $x=1$ 处相切. 用绘图工具绘出解曲线.

用消元法解习题 37～40 中的方程组.

37. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2x+2y+1$

$\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}=y+3$

38. $\frac{dx}{dt}=2x+y+t-2$

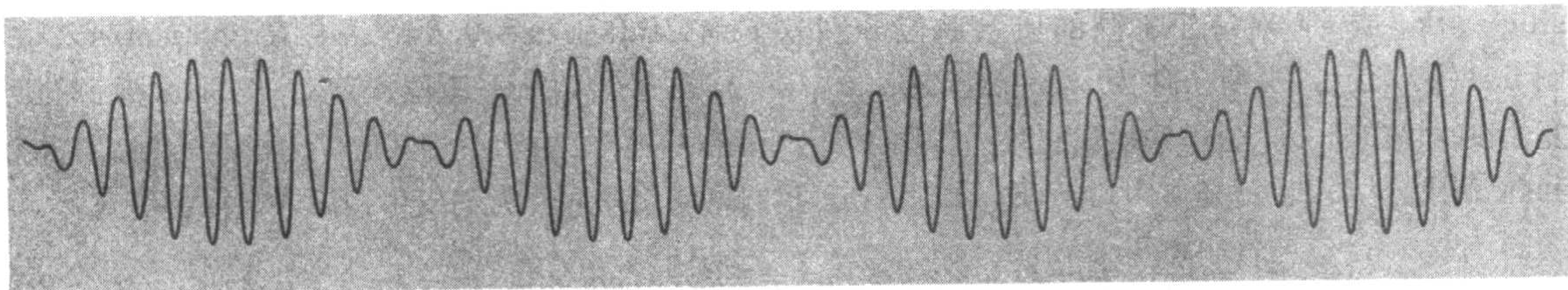
$\frac{dy}{dt}=3x+4y-4t$

39. $(D-2)x-y=-e^t$

$-3x+(D-4)y=-7e^t$

40. $(D+2)x+(D+2)y=\sin 2t$

$5x+(D+3)y=\cos 2t$



频击振荡；见图 5.22

第 5 章　高阶微分方程建模

我们已经学过了不同现象的单个微分方程数学模型. 在本章 5.1 节中我们将更详细地讨论一个应用，即连在弹簧上的质点的运动. 除了将在术语和物理解释上对线性微分方程$ay''+by'+cy=g(t)$中的四项加以阐述外，我们将看到串联电路的数学模型和弹簧/质量系统是完全相同的. 这个线性二阶微分方程的形式在科学和工程的许多其他领域也有广泛的应用. 在 5.1 节中，我们将专门讨论初值问题，而在 5.2 节中专门讨论边界值问题. 我们还将在 5.2 节中学习由边界值问题引出的特征值和特征函数的概念. 在 5.3 节的开始，我们将讨论线性和非线性弹簧的区别，然后给出由钟摆和悬浮线导出的非线性模型.

5.1　线性方程：初值问题

本节中我们主要研究几个线性动态系统，它们的数学模型都是常系数二阶微分方程

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0y=g(t).$$

在前面我们讲过，函数 g 是系统的输入(input)或施迫函数(forcing function). 这个二阶方程在包含 t_0的区间上的解 $y(t)$满足初始条件 $y(t_0)=y_0$，$y'(t_0)=y_1$，称之为系统的输出(output)或响应(response).

5.1.1　弹簧/质量系统：自由无阻尼运动

虎克定律　假设一个有弹性的弹簧[㊀]垂直悬挂在一个刚性物体下方，一个质量为 m 的物体系在它的自由端. 弹簧伸长的长度当然和物体的质量有关；不同质量的物体使得弹簧伸长的长度不同. 根据虎克定律，弹簧的回复力和它伸长 x 的方向相反，并且成一定比例. 简单地说，就是 $F=ks$，这里 k 是比例常数，称为弹性系数(spring constant). 弹簧基本上是根据 k 来分类的. 例如，如果质量为 10lb 的物体使弹簧伸长了 1/2ft，那么由 $10=k(1/2)$可得 $k=20$ lb/ft. 有必要说一下，质量为 8lb 的物体只能使同样的弹簧伸长 2/5ft.

牛顿第二定律　质量为 m 的物体系在弹簧的一端，并使得弹簧拉长 s，其所受重力 W 和弹簧回复力 ks 相等时达到平衡. 前面我们已经定义了重力 $W=mg$，其中质量的单位可以是

㊀　相对于后面的硬化弹簧而言. ——译者注

slug㊀、kg 或 g，对应于不同的质量单位分别有 $g=32\text{ft/s}^2$，$g=9.8\text{m/s}^2$ 或 $g=980\text{cm/s}^2$. 如图 5.1(b)所示，平衡条件为 $mg=ks$，或 $mg-ks=0$. 如果物体从平衡位置移动 x，那么弹簧的回复力变为 $k(x+s)$. 这里假设没有外力作用于整个系统，物体的振动不受其他外力的影响(除了重力和弹簧回复力)，也就是自由运动(free motion)，我们可以用净回复力列出牛顿第二定律的等式：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k(s+x)+mg=-kx+\underbrace{mg-ks}_{0}=-kx. \tag{1}$$

(1)中的负号表示弹簧的回复力和物体位移方向相反. 另外，我们假设从平衡位置指向下的方向为正. 请见图 5.2.

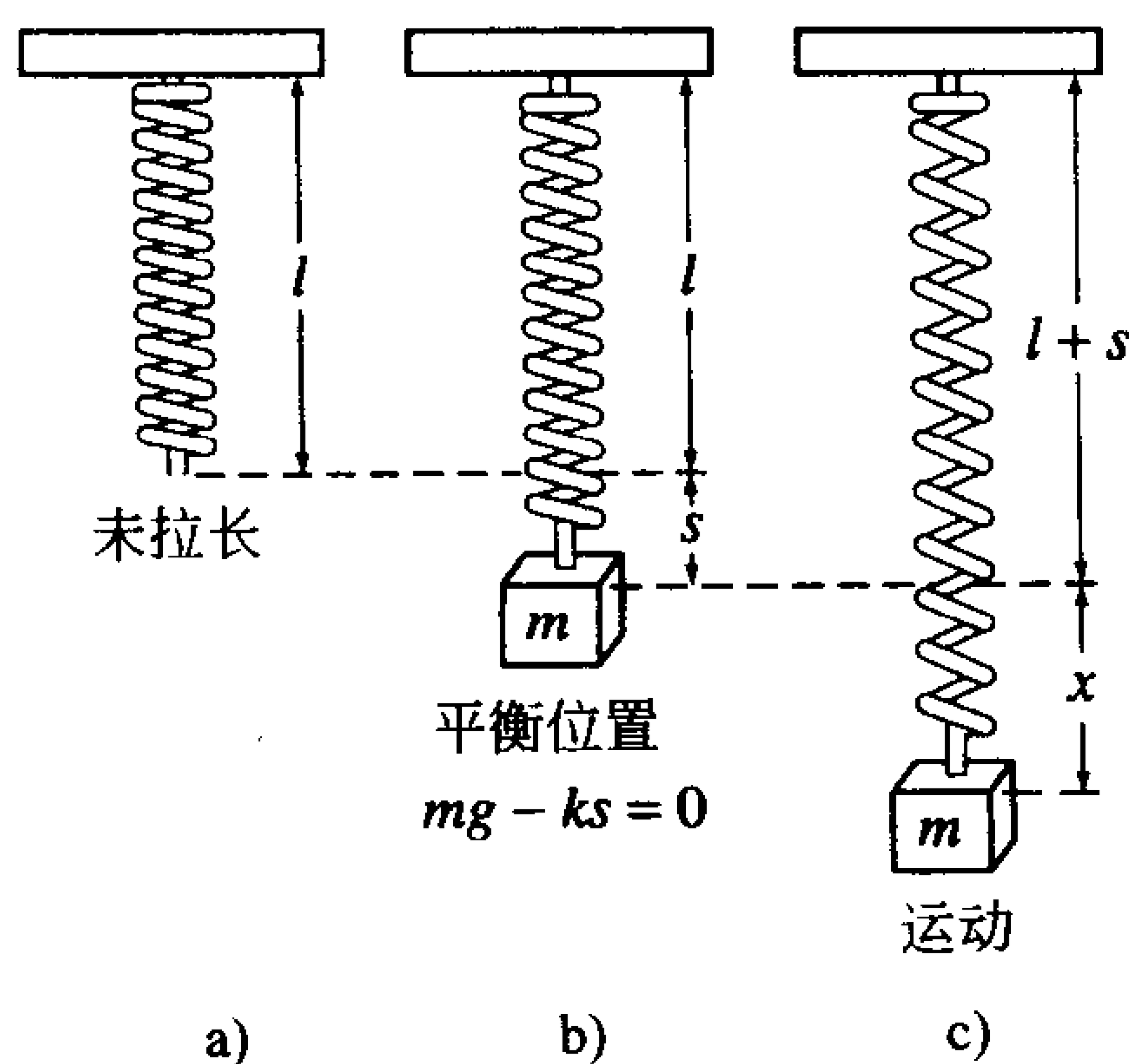


图 5.1

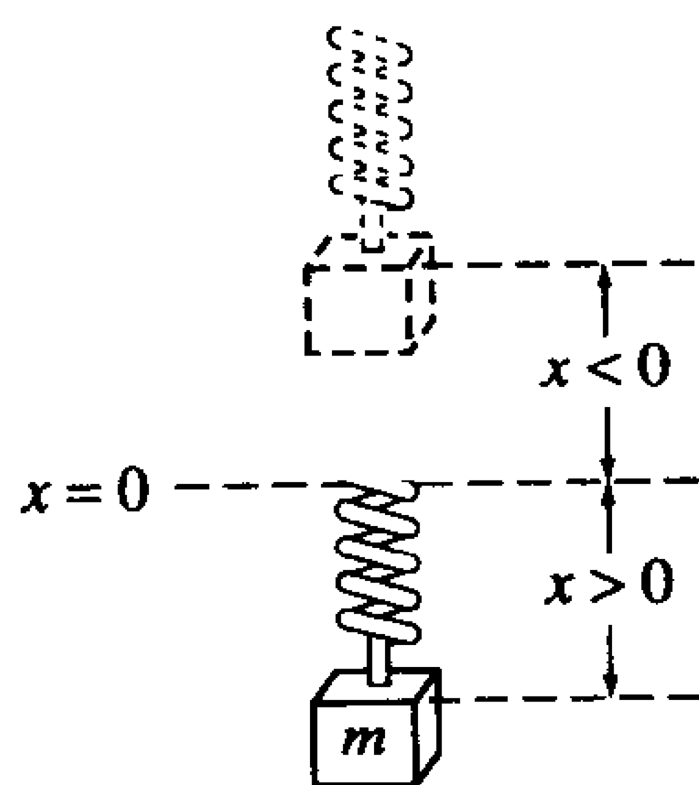


图 5.2

自由无阻尼运动的微分方程 用质量 m 去除(1)式左右两边，可以得到二阶微分方程 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2+(k/m)x=0$ 或

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0, \tag{2}$$

这里 $\omega^2=k/m$. 方程(2)描述了简谐振动(simple harmonic motion)或自由无阻尼运动(free undamped motion)的过程. (2)式有两个明显的初始条件，初始位置 $x(0)=x_0$，物体的初始速度 $x'(0)=x_1$. 若 $x_0>0$，$x_1<0$，则物体是从平衡位置下方开始运动的，具有向上的速度，当 $x_1=0$ 时，称物体从静止状态开始释放. 若 $x_0<0$，$x_1=0$，则物体在平衡位置上方 $|x_0|$ 处从静止状态开始释放.

解和运动方程 为了解方程(2)，我们注意到辅助方程 $m^2+\omega^2=0$ 的解是复数 $m_1=\omega i$，$m_2=-\omega i$. 因此，由 4.3 节(8)式可求出(2)的通解为

$$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t. \tag{3}$$

(3)式表示自由振动的周期为 $T=2\pi/\omega$，频率为 $f=1/T=\omega/2\pi$. 例如，$x(t)=2\cos3t-4\sin3t$，周期为 $2\pi/3$，频率为 $3/2\pi$. 前一个数字表示 $x(t)$ 的图形每 $2\pi/3$ 个单位重复一次；后一个数字表示每 2π 个单位图形循环 3 次，或者说物体每单位时间内振动 $3/2\pi$ 次. 另外，周期 $2\pi/3$ 也

㊀ 在重为 1lb 的力的作用下产生 1ft/s^2 的加速度的质量单位. ——译者注

表示 $x(t)$连续两次达到最大值的时间间隔．请读者注意，$x(t)$的最大值是对应于物体在平衡位置下方最大距离的正位移，而 $x(t)$的最小值是对应于物体在平衡位置上方最大距离的负位移．每一种情形都是物体的极值位移(extreme displacement)．最后，应用初始条件解(3)中的常数 c_1，c_2，我们称结果为运动方程(equation of motion)的特解或响应．

例 1　自由无阻尼运动

质量为 2lb 的物体使得弹簧伸长 6in．在 $t=0$ 时刻，物体从平衡位置下方 8in 开始释放，向上的速度为 4/3 ft/s．求自由运动的方程．

解　因为我们一直在用通用单位，所以题中给出的计量单位尺寸必须转换成英尺：6in$=\frac{1}{2}$ft；8in$=\frac{2}{3}$ft．另外，必须把重量单位转换成质量单位．由 $m=W/g$ 知，$m=2/32=1/16$，又由虎克定律，$2=k(1/2)$给出了弹性系数为 $k=4$ lb/ft．由(1)式可得

$$\frac{1}{16}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-4x \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+64x=0.$$

初始位移和初始速度为 $x(0)=2/3$，$x'(0)=-4/3$，负号表示物体的初始速度为负，或者说是竖直向上的．

因 $\omega^2=64$，$\omega=8$，所以微分方程的通解为

$$x(t)=c_1\cos 8t+c_2\sin 8t. \tag{4}$$

把初始条件代入 $x(t)$，$x'(t)$，得 $c_1=2/3$，$c_2=-1/6$．因此运动方程为

$$x(t)=\frac{2}{3}\cos 8t-\frac{1}{6}\sin 8t. \tag{5}$$

■

$x(t)$的另一种形式　当 $c_1\neq 0$ 且 $c_2\neq 0$ 时，自由振动的实际振幅 A 并不能从方程(3)中看出来．例如，尽管例 1 中的物体初始位移为 2/3ft，但是振动的振幅要大于 2/3．因此，通常把形式(3)的解写成更简单的形式

$$x(t)=A\sin(\omega t+\phi), \tag{6}$$

其中 $A=\sqrt{c_1{}^2+c_2{}^2}$，ϕ 是如下定义的相角(phase angle)：

$$\left.\begin{aligned}\sin\phi&=\frac{c_1}{A}\\ \cos\phi&=\frac{c_2}{A}\end{aligned}\right\}\tan\phi=\frac{c_1}{c_2}. \tag{7}$$

要证明这个等式，只需把(6)式按正弦函数的加法公式展开：

$$A\sin\omega t\cos\phi+A\cos\omega t\sin\phi=(A\sin\phi)\cos\omega t+(A\cos\phi)\sin\omega t. \tag{8}$$

由图 5.3 可得，若 ϕ 为如下定义

$$\sin\phi=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{c_1}{A},\cos\phi=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{c_2}{A},$$

那么(8)可以写成

$$A\frac{c_1}{A}\cos\omega t+A\frac{c_2}{A}\sin\omega t=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t=x(t).$$

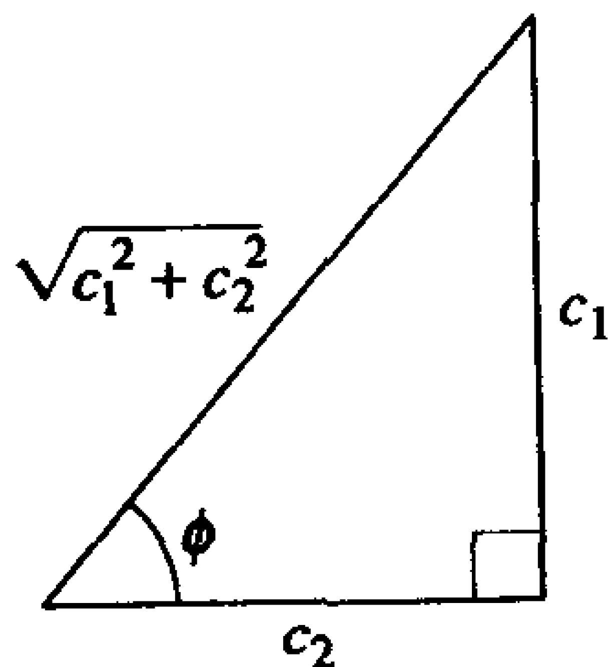


图 5.3

例 2　(5)的另一种形式

根据前面的讨论，我们可以把(5)式，$x(t)=\frac{2}{3}\cos 8t-\frac{1}{6}\sin 8t$，写成另外一种形式 $x(t)=A\sin(8t+\phi)$．振幅可以从中直接计算出来，$A=\sqrt{(2/3)^2+(-1/6)^2}=$

$\sqrt{17/36} \approx 0.69\text{ft}$，计算(7)定义的相角 ϕ 需要多练习. 令 $c_1=2/3$，$c_2=-1/6$，可以求出 $\tan\phi=-4$，用计算器可以算出 $\tan^{-1}(-4)=-1.326\text{rad}$. 这还不是相角，因为 $\tan^{-1}(-4)$ 在第四象限，和 $c_1>0$，$c_2<0$ 时，$\sin\phi>0$、$\cos\phi<0$ 矛盾. 因此必须把 ϕ 转换成第二象限的角 $\phi=\pi+(-1.326)=1.816\text{rad}$. 由此可得

$$x(t)=\frac{\sqrt{17}}{6}\sin(8t+1.816). \tag{9}$$

这个函数的周期是 $T=2\pi/8=\pi/4$. ■

图 5.4(a)给出了例 2 中物体的两个运动周期的图像. 从左到右的前五个位置(用黑点标记)分别相应于物体的初始位置在平衡点以下($x=2/3$)、第一次通过平衡位置($x=0$)向上运动、物体到达平衡位置上方的最大位移($x=-\sqrt{17}/6$)、物体第二次通过平衡位置($x=0$)向下运动、物体到达平衡位置下方的最大位移($x=\sqrt{17}/6$). (9)的图像，也就是图 5.4(b)中的点分别对应于前面给出的五个位置. 但是，要注意，图 5.4(b) tx 平面中的正方向通常是向上的，和图 5.4(a)中的正方向相反. 因此图 5.4(b)中的实线是图 5.4(a)中物体运动虚线的映射.

形式(6)非常有用，因为通过 t 轴正方向($x=0$)求 $x(t)$ 图像中的时间非常容易. 不难发现当 $\omega t+\phi=n\pi$ 时，其中 n 为非负整数，$\sin(\omega t+\phi)=0$.

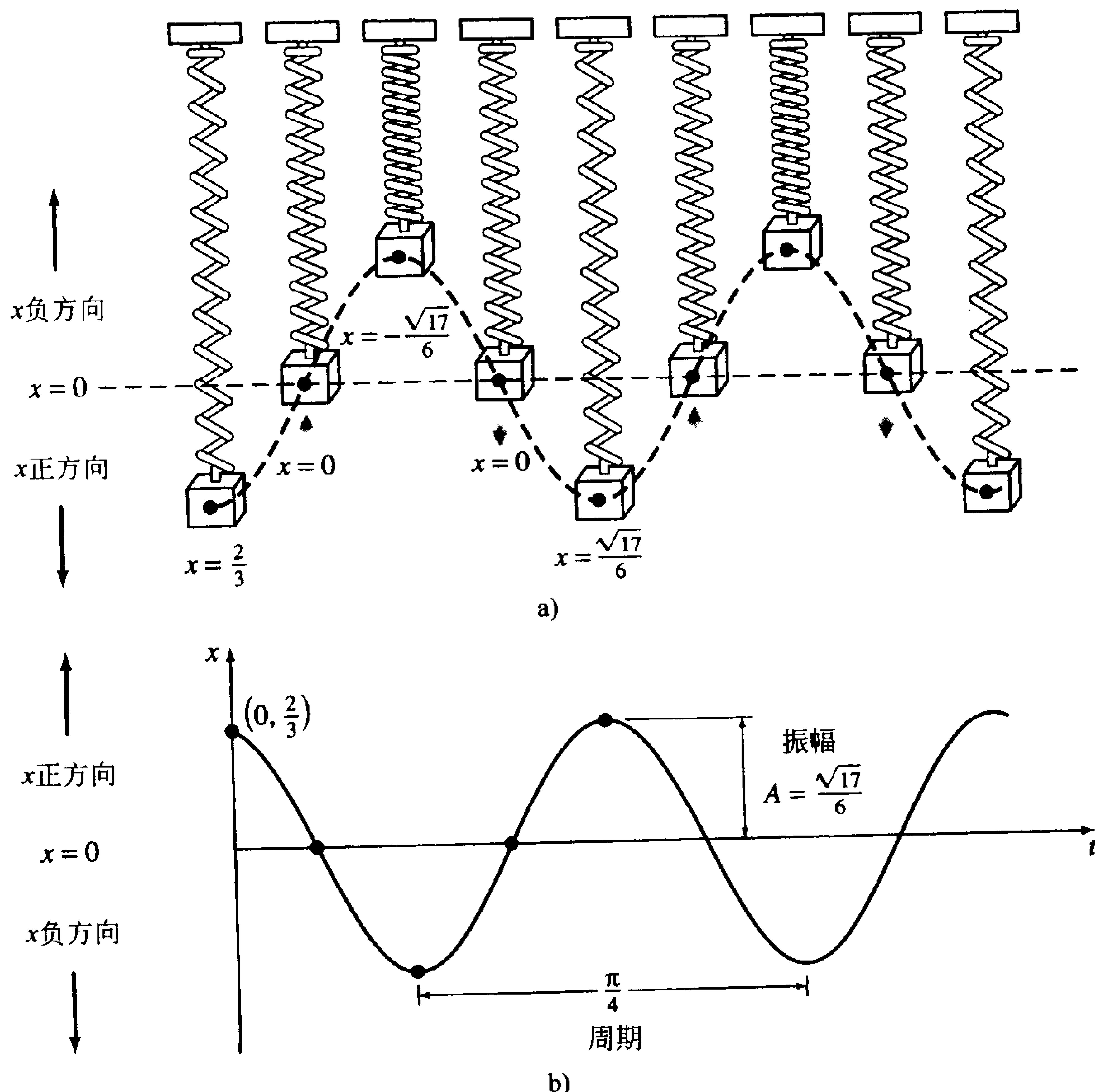


图 5.4

可变弹性系数系统 在上面讨论的模型中，我们假设的是一个理想模型，即弹簧的物体特性不随时间而改变．但是在现实世界中，弹簧用了很长时间以后会磨损；也就是说弹性系数可以变化，或者更准确地说是随着时间衰减．在老化弹簧(aging spring)的模型中，弹簧系数 k 由递减函数 $K(t)=ke^{-\alpha t}$，$k>0$，$\alpha>0$ 所代替．线性微分方程 $mx''+ke^{-\alpha t}x=0$ 不能用第 4 章所讲的方法来解．但是，用第 6 章的方法我们可以得到两个线性无关的解．请参考练习 5.1 的习题 15，6.3 节的例 3，以及练习 6.3 的习题 25、26.

当弹簧/质量系统受温度快速降低的环境影响时，应该用 $K(t)=kt$，$k>0$ 代替常数 k，这个函数随着时间的增加而增加．然后我们可以得到模型 $mx''+ktx=0$，这是气体微分方程(Airy's differential equation)的形式．像硬化弹簧的方程一样，气体微分方程可以用第 6 章的方法来解．请参考练习 5.1 的习题 16，6.1 节中的例 2，练习 6.3 中的习题 27～29.

5.1.2 弹簧/质量系统：自由阻尼运动

自由振动的概念多少有些不切实际，因为方程(1)描述的模型假设了运动物体不受任何阻力．除非物体悬浮在完全真空的环境中，否则环境至少对物体施加一个阻力．如图 5.5 所示，物体悬浮在粘性介质中或与一个阻尼器相连.

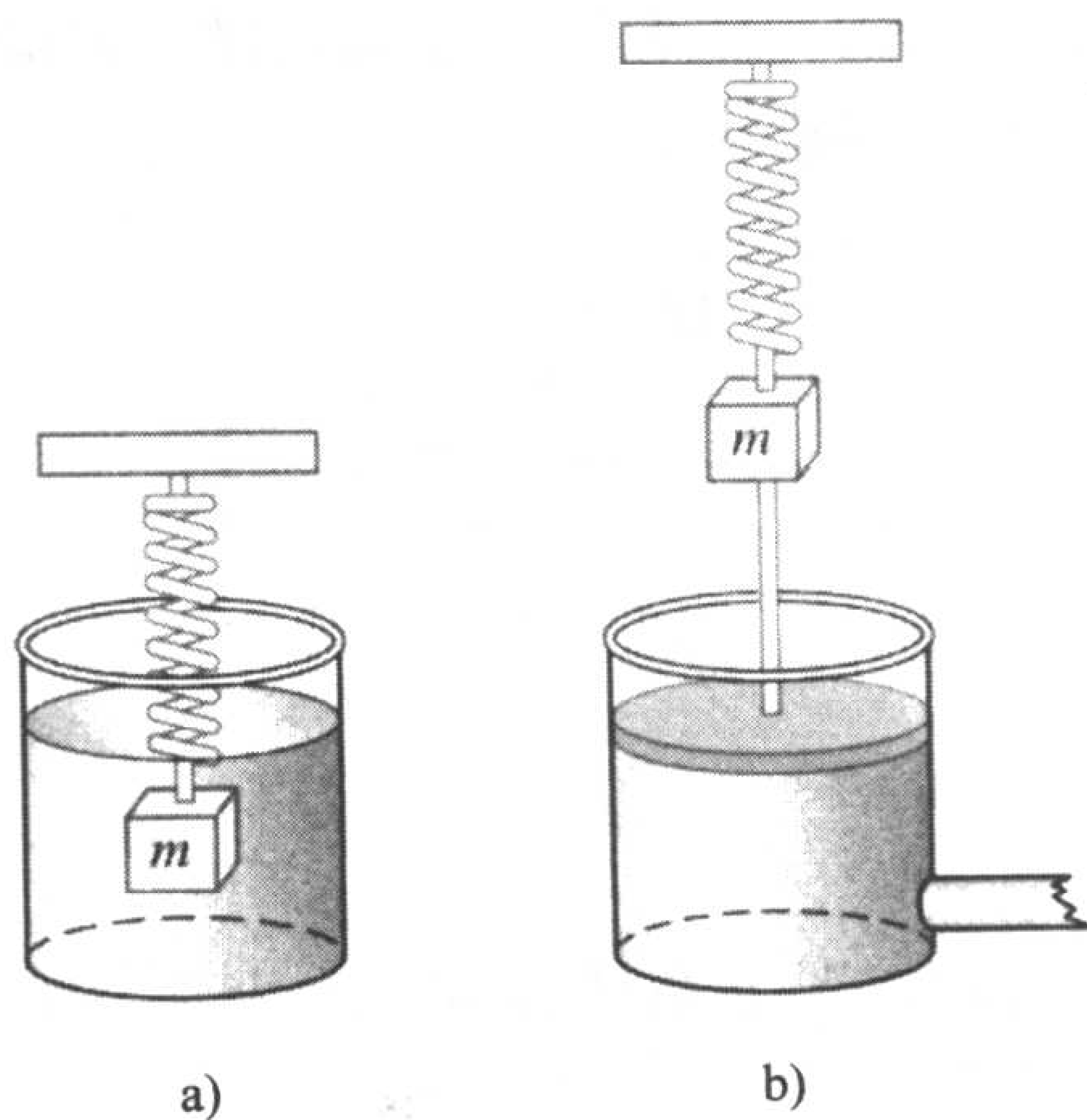


图 5.5

自由阻尼运动微分方程 在力学研究中，作用于物体的阻力与物体的瞬时速率成正比．特别地，我们接下来的讨论都假设这个阻力等于一个常数与 dx/dt 的乘积．若没有外力作用在整个系统上，那么由牛顿第二定律可得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\beta\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

其中 β 是正的阻尼常数，负号表示阻力和物体运动方向相反.

用质量 m 去除(10)的两端，可得自由阻尼运动(free damped motion)的微分方程为 $d^2x/dt^2+(\beta/m)dx/dt+(k/m)x=0$ 或是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0,\tag{11}$$

其中

$$2\lambda=\frac{\beta}{m},\omega^2=\frac{k}{m}.\tag{12}$$

这里 2λ 用来简化代数符号，因此辅助方程 $m^2+2\lambda m+\omega^2=0$ 及其相应的根为

$$m_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2},m_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}.$$

根据 $\lambda^2-\omega^2$ 的符号不同，可以分三种情况来讨论. 因为每个解都有阻尼因子 $e^{-\lambda t}$，$\lambda>0$，所以随着时间的增加物体的位移可以忽略不计.

情形Ⅰ：$\lambda^2-\omega^2>0$ 在这种情况下系统称为是过阻尼的(overdamped)，因为阻尼系数 β 相对于弹性系数 k 来说是很大的. (11)的解为 $x(t)=c_1e^{m_1t}+c_2e^{m_2t}$，或者

$$x(t)=e^{-\lambda t}(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}+c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}).\tag{13}$$

这个方程表示的是一个平滑且没有振荡的运动. 图 5.6 表示了 $x(t)$ 两种可能的图形.

情形Ⅱ：$\lambda^2-\omega^2=0$ 在这种情况下系统称为是临界阻尼的(critically damped)，因为阻力只要稍微减小一点就会引起运动的振荡. (11)的通解为 $x(t)=c_1e^{m_1t}+c_2te^{m_1t}$，或者

$$x(t)=e^{-\lambda t}(c_1+c_2t).\tag{14}$$

一些典型运动的图像在图 5.7 中给出. 注意这种运动与过阻尼运动非常类似. 这个现象由(14)也可以看出，因为物体最多只通过平衡位置一次.

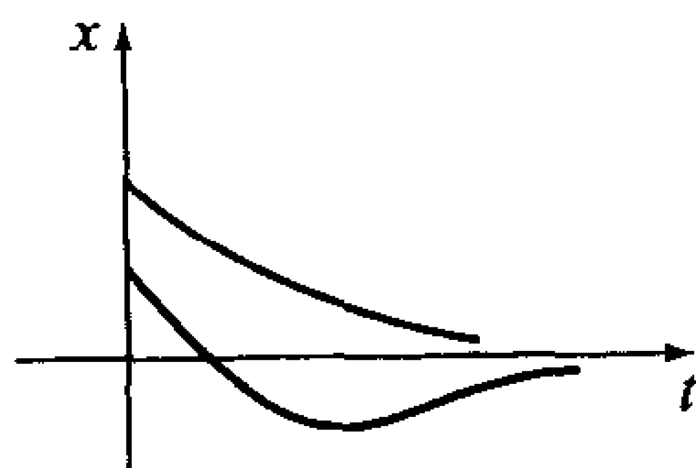


图 5.6

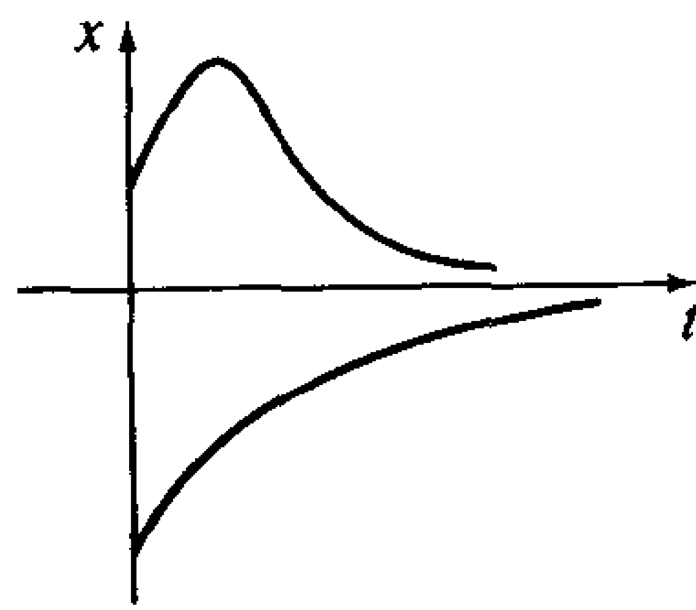


图 5.7

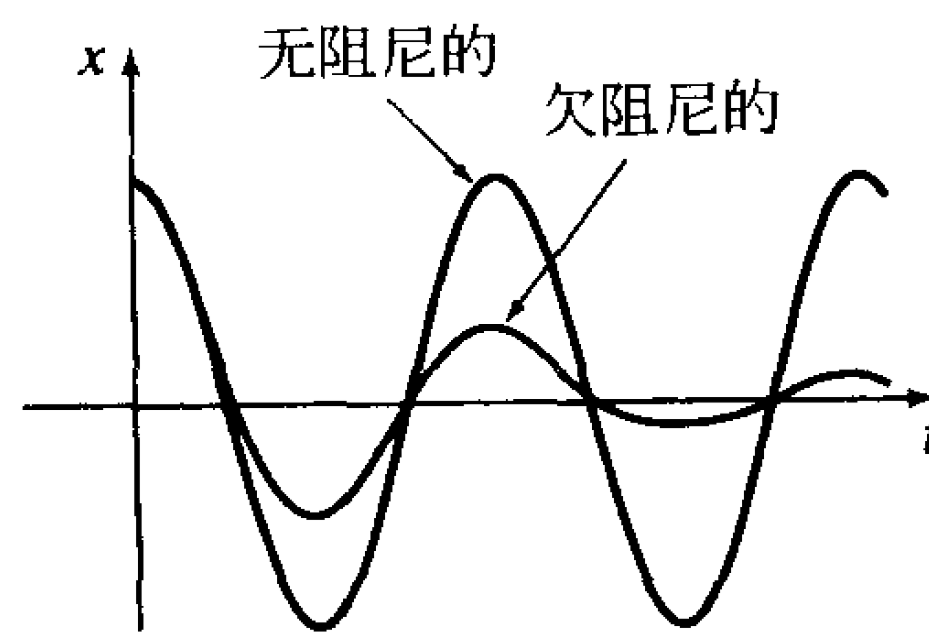


图 5.8

情形Ⅲ：$\lambda^2-\omega^2<0$ 在这种情况下系统称为是欠阻尼的(underdamped)，因为阻尼系数与弹性系数相比很小. 运动方程的根 m_1 和 m_2 是复数：

$$m_1=-\lambda+\sqrt{\omega^2-\lambda^2}i,m_2=-\lambda-\sqrt{\omega^2-\lambda^2}i.$$

因此，方程(11)的通解为

$$x(t)=e^{-\lambda t}(c_1\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t+c_2\sin\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t).\tag{15}$$

如图 5.8 所示，(15)式所描述的运动是振荡的；但是由于存在系数 $e^{-\lambda t}$，所以当 $t\to+\infty$ 时振幅趋于 0.

例 3 **过阻尼运动**

可以很容易证明初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+4x=0,x(0)=1,x'(0)=1,$$

的解是

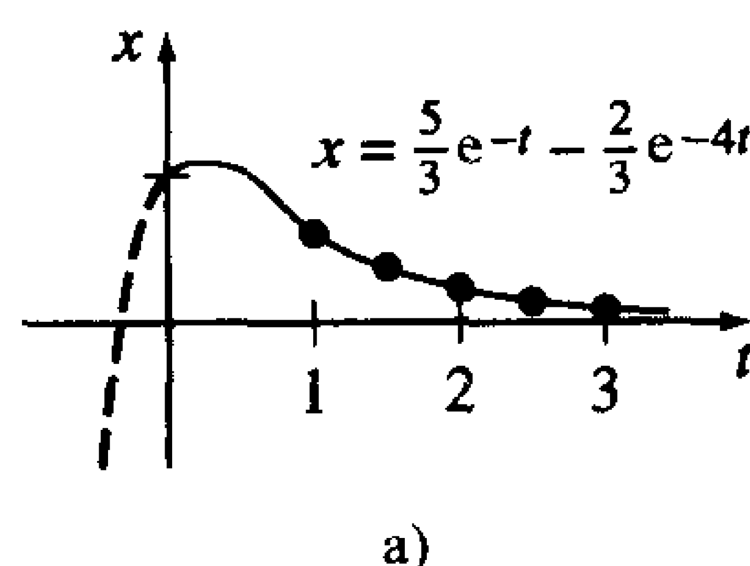
$$x(t)=\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}.\tag{16}$$

这个初值问题可以看作是弹簧上物体做过阻尼运动的模型. 物体从平衡位置下方一单位的距离处开始运动，并具有向下 1 ft/s 的速度.

由 $x(t)$的图像可以求出函数极值处的 t 值，即关于时间的一阶导数(速度)为零时的 t 值. 对(16)式求微分可得 $x'(t)=-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{8}{3}e^{-4t}$，因此 $x'(t)=0$ 意味着 $e^{3t}=8/5$ 或 $t=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}=0.157$. 由一阶导数以及我们的物理常识，可知 $x(0.157)=1.069$ft 是最大值. 也就是说，物体达到的最大位移是平衡位置下方 1.069ft.

我们也可以检验一下这个图像是否通过 t 轴，即物体是否通过平衡位置. 这种情况在本例中不会发生，因为方程 $x(t)=0$，或 $e^{3t}=2/5$ 的解 $t=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}=-0.305$ 无意义.

$x(t)$的图像及其中的数据如图 5.9 所示.



a)

t	$x(t)$
1	0.601
1.5	0.370
2	0.225
2.5	0.137
3	0.083

b)

图 5.9 ■

例 4 临界阻尼运动

一个重 8lb 的物体使得弹簧伸长了 2ft. 假设作用在物体上的阻力数值上等于瞬时速率的 2 倍，若物体从平衡位置释放并具有向上 3ft/s 的初始速度，求物体的运动方程.

解 由虎克定律可知，因为 $8=k(2)$，所以 $k=4$lb/ft，并且有 $W=mg$，$m=8/32=1/4$slug,则运动的微分方程为

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}=-4x-2\frac{dx}{dt} \quad 或 \quad \frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+16x=0. \tag{17}$$

(17)的辅助方程为 $m^2+8m+16=(m+4)^2=0$，其解为 $m_1=m_2=-4$. 因此这个系统是临界阻尼的，并有

$$x(t)=c_1e^{-4t}+c_2te^{-4t}. \tag{18}$$

把初始条件 $x(0)=0$，$x'(0)=-3$ 代入，可依次求得 $c_1=0$，$c_2=-3$. 因此运动方程为

$$x(t)=-3te^{-4t}. \tag{19}$$

$x(t)$图形的做法如例 3 中所示. 由 $x'(t)=-3e^{-4t}(1-4t)$，可知当 $t=1/4$ 时，$x'(t)=0$. 相应的极值位移为 $x(1/4)=-3(1/4)e^{-1}=-0.276$ ft. 如图 5.10 所示，这个最大位移值可以解释成物体达到平衡位置上方的最大距离为 0.276ft. ■

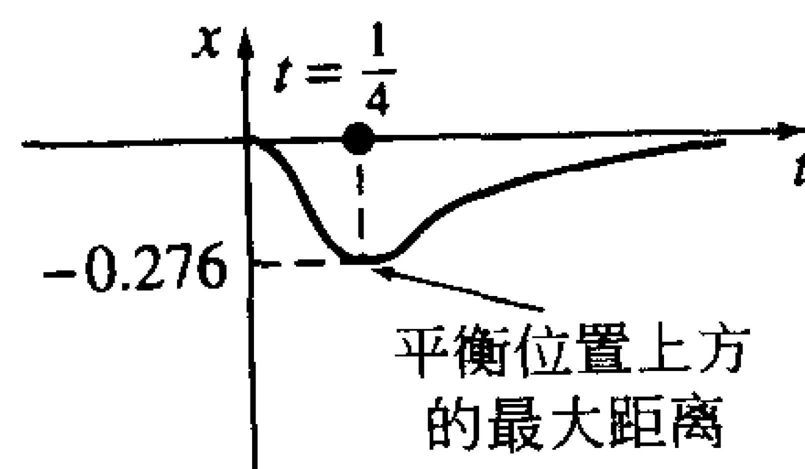


图 5.10

例 5 欠阻尼运动

一个 16lb 的重物系在一个 5ft 长的弹簧上. 系统达到平衡时，弹簧长为 8.2ft. 若重物被推到平衡位置上方 2ft 处，由静止状态释放，另外，环境提供的阻力数值上等于瞬时速度，求位移 $x(t)$.

解 重物系在弹簧上后，弹簧伸长了 8.2−5=3.2ft，因此，由虎克定律知 $16=k(3.2)$ 或 $k=5$ lb/ft. 此外，$m=16/32=1/2$slug，所以微分方程为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-5x-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\text{ 或 }\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+10x=0. \tag{20}$$

首先求辅助方程 $m^2+2m+10=0$ 的根，$m_1=-1+3\mathrm{i}$，$m_2=-1-3\mathrm{i}$，这说明系统是欠阻尼的，方程的解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}(c_1\cos3t+c_2\sin3t). \tag{21}$$

最后，把初始条件 $x(0)=-2$，$x'(0)=0$ 代入，得到 $c_1=-2$，$c_2=-2/3$，因此运动方程为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(-2\cos3t-\frac{2}{3}\sin3t\right). \tag{22}$$

■

***x(t)*的另一种形式** 用 5.1.1 节中类似的方法，可以把通解

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(c_1\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+c_2\sin\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right)$$

写为另一种形式

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+\phi), \tag{23}$$

其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$，相角 ϕ 可由方程

$$\sin\phi=\frac{c_1}{A},\cos\phi=\frac{c_2}{A},\tan\phi=\frac{c_1}{c_2}$$

求出. 系数 $A\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 有时称为振动的衰减幅度(damped amplitude). 因为(23)式不是周期函数，所以 $2\pi/\sqrt{\omega^2-\lambda^2}$ 称为准周期(quasi period)，$\sqrt{\omega^2-\lambda^2}/2\pi$ 是准频率(quasi frequency). 准周期是 $x(t)$ 连续两次达到最大值的时间间隔. 请读者证明，例 5 中的运动方程的 $A=2\sqrt{10}/3$，$\phi=4.391$. 因此，(22)的一个等价形式为

$$x(t)=\frac{2\sqrt{10}}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin(3t+4.391).$$

5.1.3 弹簧/质量系统：受迫运动

带阻尼受迫运动的微分方程 我们考虑弹簧上振动物体受外力 $f(t)$ 的情况. 比如，$f(t)$ 可以表示作用在弹簧支撑上并使其垂直运动的外力. 请见图 5.11. 把 $f(t)$ 考虑进牛顿第二定律，可得受迫(driven)或受激运动(forced motion)的微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+f(t), \tag{24}$$

用 m 除(24)两端可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=F(t), \tag{25}$$

其中 $F(t)=f(t)/m$，$2\lambda=\beta/m$，$\omega^2=k/m$. 我们可以用待定系数法或常数变易法解后一个非齐次方程.

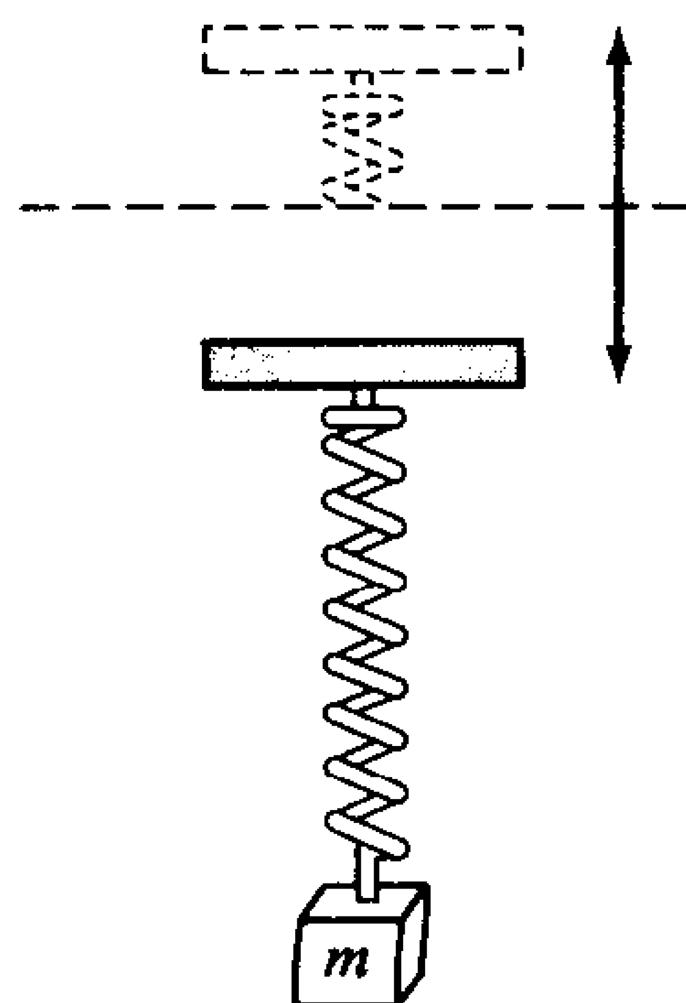


图 5.11

例 6　初值问题的解释

解释并求解初值问题

$$\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+1.2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=5\cos4t, x(0)=\frac{1}{2}, x'(0)=0. \tag{26}$$

解　我们可以把这个初值问题解释成质点($m=1/5$slug 或 kg)和弹簧($k=2$lb/ft 或 N/m)组成的振动系统. 质点从平衡位置下方 1/2 单位(ft 或 m)处开始释放. 质点从 $t=0$ 时刻开始受外部周期($T=\pi/2s$)力的作用做阻尼运动($\beta=1.2$). 我们希望带阻尼的系统在外力转向之前仍保持运动状态，在这种情况下振幅会逐渐消失. 但是，一旦这个问题给定，$f(t)=5\cos4t$ 将持续对系统作用，不会停止.

我们先在(26)两端乘以 5，然后用一般方法解

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+10x=0.$$

由于 $m_1=-3+i$，$m_2=-3-i$，所以有 $x_c(t)=\mathrm{e}^{-3t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$. 利用待定系数法，假设特解的形式为 $x_p(t)=A\cos4t+B\sin4t$. 对 $x_p(t)$求微分，并将其代入微分方程得到

$$x''_p+6x'_p+10x_p=(-6A+24B)\cos4t+(-24A-6B)\sin4t=25\cos4t.$$

然后可得方程组

$$-6A+24B=25, -24A-6B=0,$$

解得 $A=-25/102$，$B=50/51$. 所以通解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}(c_1\cos t+c_2\sin t)-\frac{25}{102}\cos4t+\frac{50}{51}\sin4t. \tag{27}$$

令上面的方程中 $t=0$，可得 $c_1=38/51$. 把 c_1 代入后再求微分，再令 $t=0$，可以求出 $c_1=-86/51$. 因此运动方程为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t-\frac{86}{51}\sin t\right)-\frac{25}{102}\cos4t+\frac{50}{51}\sin4t. \tag{28}$$

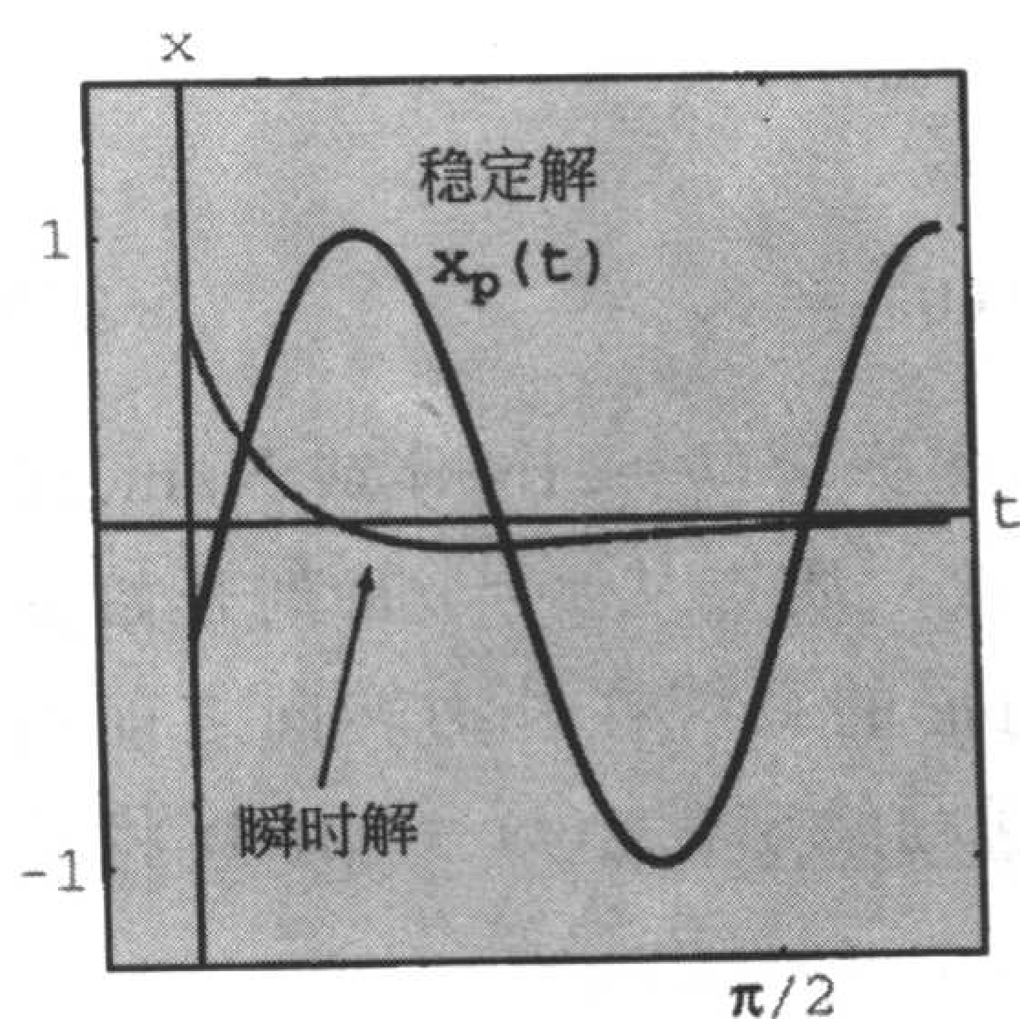
■

瞬时项与稳定项　若 F 是周期函数，如 $F(t)=F_0\sin\gamma t$ 或 $F(t)=F_0\cos\gamma t$，$\gamma>0$ 时(25)的通解为非周期函数 $x_c(t)$与周期函数 $x_p(t)$之和. 此外，$x_c(t)$随着时间的增加趋向于 0，即 $\lim\limits_{t\to+\infty}x_c(t)=0$. 因此，当时间较长的时候，质点的位移可以用特解 $x_p(t)$来近似. 余函数 $x_c(t)$称为瞬时项(transient term)或瞬时解(transient solution)，而解的另外一部分函数 $x_p(t)$在一段时间以后仍然存在，这部分函数称为稳定项(steady-state term)或稳定解(steady-state solution). 注意，因为外力 F 的作用，初值条件的约束是短暂的. 在特解(28)中，$\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t-\frac{86}{51}\sin t\right)$是瞬时项，$x_p(t)=-\frac{25}{102}\cos4t+\frac{50}{51}\sin4t$ 是稳定项. 这两项的函数图像和解(28)的图像分别在图 5.12(a)、(b)中给出.

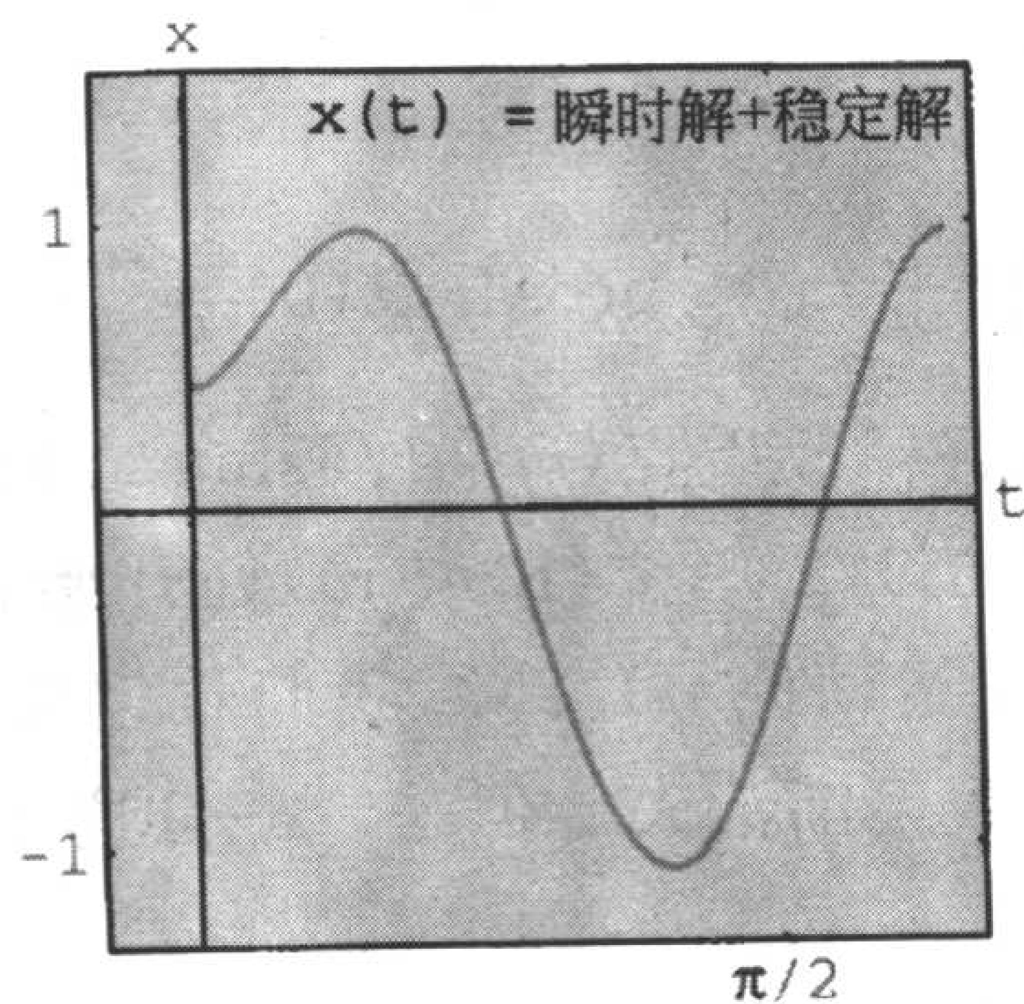
例 7　瞬时/稳定解

初值问题(其中 x_1是常数)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=4\cos t+2\sin t, x(0)=0, x'(0)=x_1$$



a)



b)

图　5.12

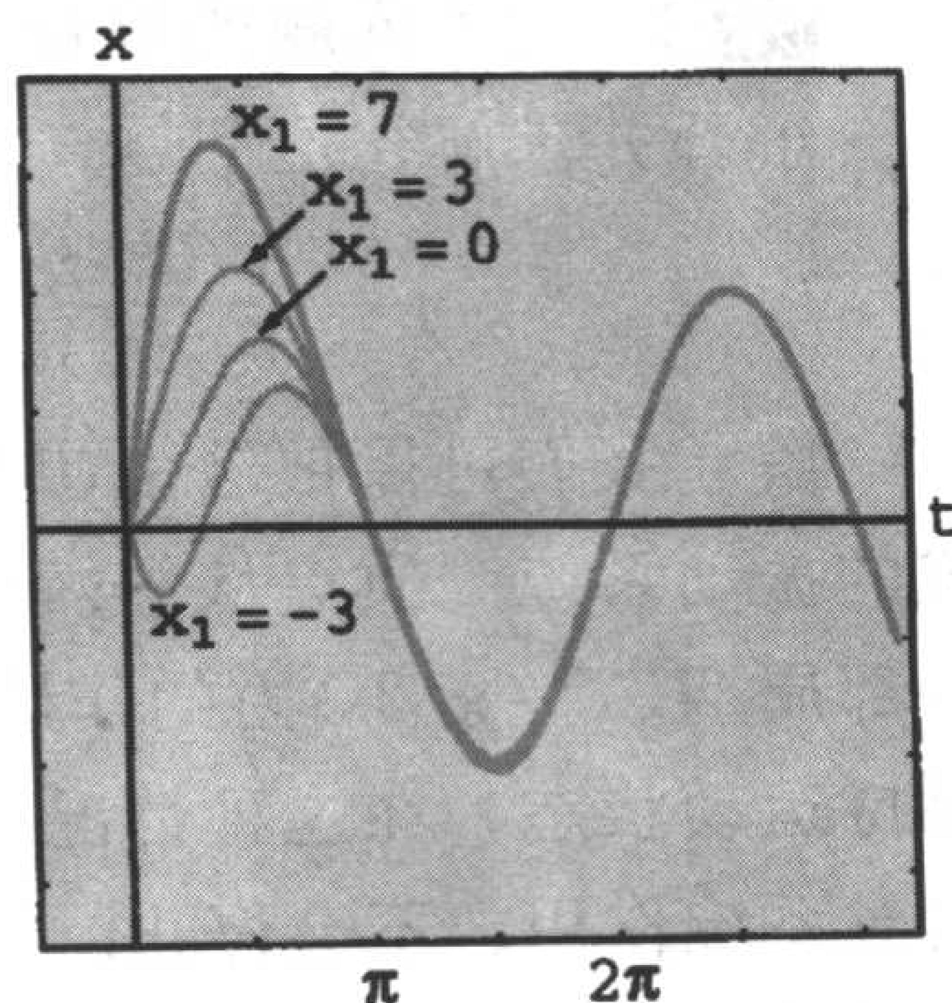


图　5.13

的解为

$$x(t) = (x_1 - 2)\underbrace{e^{-t}\sin t}_{\text{瞬时}} + \underbrace{2\sin t}_{\text{稳定}}.$$

不同初始速度 x_1 所对应的解曲线如图 5.13 所示．这个图像显示，当 $t > 3\pi/2$ 时，瞬时项的影响可以忽略不计．■

无阻尼受迫运动的微分方程　一个受周期外力作用且无阻尼的运动，其解中是没有瞬时项的．同时，我们也将看到当周期外力的频率近似或等于自由无阻尼运动的频率时，会在振荡系统中引起非常严重的问题．

例 8　无阻尼受迫运动

解初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin\gamma t, x(0) = 0, x'(0) = 0, \tag{29}$$

其中 F_0 为常数，并有 $\gamma \neq \omega$.

解　余函数为 $x_c(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$．为了求得特解，我们假设 $x_p(t) = A\cos\gamma t + B\sin\gamma t$，因此有

$$x''_p + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\sin\gamma t = F_0\sin\gamma t.$$

由等式两端相同项的系数相等，可得 $A=0$，$B=F_0/(\omega^2-\gamma^2)$．因此，

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\sin\gamma t.$$

把初始条件代入通解

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\sin\gamma t$$

可得 $c_1 = 0$，$c_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$．通解为

$$x(t)=\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\sin\omega t+\omega\sin\gamma t),\gamma\neq\omega. \tag{30}$$

■

完全共振 尽管方程(30)不要求 $\gamma=\omega$，但是当 $\gamma\to\omega$ 时，应用洛必达法则可知 $x(t)$ 是有限值. 这个求极限的过程也就是把外力的频率($\gamma/2\pi$)转为自由振动的频率($\omega/2\pi$)的过程. 我们希望在经过相当长的一段时间后显著增加振动的振幅. 因为 $\gamma=\omega$，所以我们可以把解定义为

$$x(t)=\lim_{\gamma\to\omega}F_0\frac{-\gamma\sin\omega t+\omega\sin\gamma t}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}=F_0\lim_{\gamma\to\omega}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}(-\gamma\sin\omega t+\omega\sin\gamma t)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}(\omega^3-\omega\gamma^2)}$$

$$=F_0\lim_{\gamma\to\omega}\frac{-\sin\omega t+\omega t\cos\gamma t}{-2\omega\gamma}$$

$$=F_0\frac{-\sin\omega t+\omega t\cos\omega t}{-2\omega^2}$$

$$=\frac{F_0}{2\omega^2}\sin\omega t-\frac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t. \tag{31}$$

正如所想的，当 $t\to+\infty$ 时，质点的位移变得非常大；实际上是当 $t_n=n\pi/\omega$，$n=1$，2，…时 $|x(t_n)|\to+\infty$，这个现象我们称之为完全共振(pure resonance). 图 5.14 所示的图形给出了这个例子的典型运动图像.

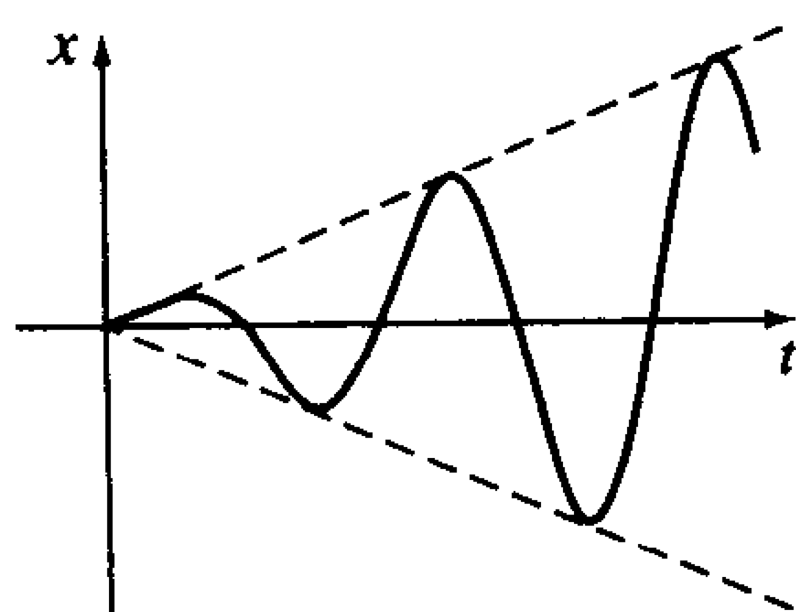


图 5.14

最后需要注意，实际上不需要对(30)求极限以得到 $\gamma=\omega$ 时的解. (31)可以用普通方法直接解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=F_0\sin\omega t,x(0)=0,x'(0)=0$$

得到.

若弹簧/质量系统的位移可以用如(31)的函数来描述，那么这个系统是失败的. 质点过大幅度的振动最终会导致弹簧超过其弹性限度. 图 5.14 所示的共振模型是完全理想化的，因为它忽略了一切可能的阻尼作用. 虽然很小的阻尼效果也可以使完全共振现象不会发生，但是大的或破坏性的振幅(尽管当 $t\to+\infty$)还是可能发生的. 请参考练习 5.1 的习题 43.

5.1.4 串联电路模型

LRC 串联电路 正如本章开头引言部分提到的，许多不同的物理系统可以用线性二阶微分方程来描述，这和受迫阻尼运动的微分方程类似：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=f(t). \tag{32}$$

若 $i(t)$ 表示 *LRC* 串联电路(LRC series electrical circuit)中的电流，如图 5.15 所示，则电感线圈、电阻和电容上的电压降均如图 1.18 所示. 根据基尔霍夫第二定律，这些电压降的和等于电路两端的电压 $E(t)$；即

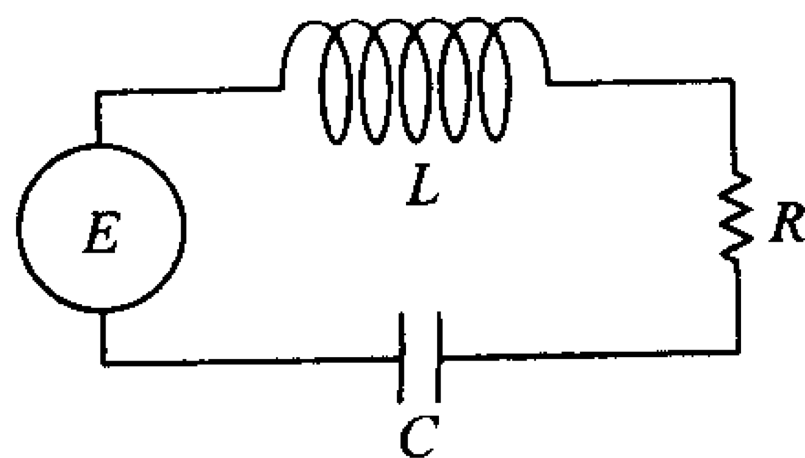


图 5.15

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t). \tag{33}$$

但是电容上的电荷 $q(t)$ 和电流 $i(t)$ 有关，$i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$，因此(33)式可以写成一个线性二阶微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=E(t). \tag{34}$$

电路分析中的术语和弹簧/质量系统的术语类似.

若 $E(t)=0$，则电路中的*电流振荡*(electrical vibrations)称为是*自由的*. 因为(34)的辅助方程为 $Lm^2+Rm+1/C=0$，所以当 $R\neq 0$ 时，根据判别式 R^2-4L/C 的不同值有三种情况需要讨论. 我们称电流是

过阻尼的，若 $R^2-4L/C>0$，

临界阻尼的，若 $R^2-4L/C=0$，

欠阻尼的，若 $R^2-4L/C<0$.

在每种情形下，(34)的通解都包含了因子 $\mathrm{e}^{-Rt/2L}$，因此当 $t\to+\infty$ 时，$q(t)\to 0$. 在欠阻尼的情形下，当 $q(0)=q_0$ 时，电容器上的电荷是振荡减少的；换句话说就是当 $t\to+\infty$ 时电容总是在不断地充电和放电. 当 $E(t)=0$，$R=0$ 时，电路称为是无阻尼的，并且随着时间的流逝电流振荡的振幅不会接近零；电流的响应是*简谐振动*(simple harmonic).

例 9　欠阻尼串联电路

求 LRC 电路中电容器上的电荷 $q(t)$，$L=0.25$ h，$R=10\ \Omega$，$C=0.001$ f，$E(t)=0$，$q(0)=q_0$(C)，$i(0)=0$.

解　因为 $1/C=1\,000$，方程(34)可以写为

$$\frac{1}{4}q''+10q'+1\,000q=0 \text{ 或 } q''+40q'+4\,000q=0.$$

用一般方法解这个齐次方程，可知电路是欠阻尼的，$q(t)=\mathrm{e}^{-20t}(c_1\cos 60t+c_2\sin 60t)$. 把初始条件代入，可求出 $c_1=q_0$，$c_2=\frac{1}{3}q_0$. 因此

$$q(t)=q_0\mathrm{e}^{-20t}\left(\cos 60t+\frac{1}{3}\sin 60t\right).$$

利用(23)，可以把上述解写为

$$q(t)=\frac{q_0\sqrt{10}}{3}\mathrm{e}^{-20t}\sin(60t+1.249).$$ ■

当电路两端有电压 $E(t)$ 时，电流振荡称为是*受迫的*(forced). 在这种情形下，$R\neq 0$，(34)的余函数 $q_c(t)$ 称为*瞬时解*(transient solution). 若 $E(t)$ 是周期的或是恒定不变的，则(34)的特解 $q_p(t)$ 是*稳定解*(steady-state solution).

例 10　稳定电流

求 LRC 串联电路中的稳定解 $q_p(t)$ 和*稳定电流*(steady-state current)，电压降为 $E(t)=E_0\sin\gamma t$.

解　稳定解 $q_p(t)$ 是微分方程

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E_0\sin\gamma t$$

的一个特解. 利用待定系数法，假设特解的形式为 $q_p(t)=A\sin\gamma t+B\cos\gamma t$. 把这个表达式代入微分方程，整理后再由相同项的系数相等得

$$A=\frac{E_0\left(L\gamma-\dfrac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma(L^2\gamma^2-\dfrac{2L}{C}+\dfrac{1}{C^2\gamma^2}+R^2)},B=\frac{E_0R}{-\gamma(L^2\gamma^2-\dfrac{2L}{C}+\dfrac{1}{C^2\gamma^2}+R^2)}.$$

出于方便，我们把 A 和 B 用一些新的符号表示.

若 $X=L\gamma-\dfrac{1}{C\gamma}$，则 $X^2=L^2\gamma^2-\dfrac{2L}{C}+\dfrac{1}{C^2\gamma^2}$.

若 $Z=\sqrt{X^2+R^2}$，则 $Z^2=L^2\gamma^2-\dfrac{2L}{C}+\dfrac{1}{C^2\gamma^2}+R^2$.

因此，$A=E_0X/(-\gamma Z^2)$，$B=E_0R/(-\gamma Z^2)$，所以稳定电荷为

$$q_p(t)=-\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\sin\gamma t-\frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

稳定电流为 $i_p(t)=q_p{}'(t)$：

$$i_p(t)=\frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\sin\gamma t-\frac{X}{Z}\cos\gamma t\right).\tag{35}$$

■

例 10 中所定义的 $X=L\gamma-1/C\gamma$，$Z=\sqrt{X^2+R^2}$ 分别称为电路的电抗(reactance)和电阻抗(impedance). 电抗和电阻抗的单位都是欧姆.

练习 5.1

5.1.1 弹簧/质量系统：无阻尼运动

1. 一个 4lb 重的物体连接在弹簧一端，这个弹簧的弹性系数为 16 lb/ft. 那么简谐运动的周期是多少?
2. 一个质量为 20kg 的物体连接在弹簧上. 若简谐运动的频率是每秒 2π/次，那么弹性系数 k 是多少? 若用质量为 80kg 的物体代替原来的物体，则简谐振动的频率是多少?
3. 重 lb 磅的物体连接在弹簧的一端，使得弹簧伸长 4in. 如果重物从平衡位置上方 3in 处由静止释放，求运动的方程.
4. 如果习题 3 中的重物从平衡位置处以向下 2 ft/s 的速度开始运动，求运动方程.
5. 一个重 20lb 的物体使得弹簧伸长 6in. 重物从平衡位置下方 6in 处由静止释放.
   (a)求重物在时刻 $t=\pi/12$，$\pi/8$，$\pi/6$，$\pi/4$，$9\pi/32$s 时的位置.
   (b)$t=3\pi/16$s 时重物的速度是多少? 这一瞬间重物朝哪个方向运动?
   (c)重物在何时通过平衡位置?
6. 400N 的力使得弹簧伸长了 2m. 一个质量为 50kg 的重物连接在弹簧的末端，并在平衡位置处以向上 10m/s 的速度开始运动. 求运动方程.
7. 弹性系数为 20N/m 的弹簧悬挂在和习题 6 中相同的支撑物上，并与之平行. 一个质量为 20kg 的重物连接在这个弹簧上，两个物体都以向上 10m/s 的速度从平衡位置释放.
   (a)哪一个物体有更大的振幅?
   (b)在 $t=\pi/4$，$\pi/2$s 时，哪一个物体的速度较大?
   (c)在什么时刻两个物体的位置相同? 这些时刻物体处在什么位置? 它们朝哪个方向运动?

8. 一个重 32lb 的物体使得弹簧伸长了 2ft. 若重物在平衡位置上方 1ft 处以向上 2ft/s 的速度释放，求该物体运动的振幅和周期. 重物在 4s 的时间内可以完成多少个完整的振动?

9. 一个 8lb 重的物体连接在弹簧一端做简谐运动. 若弹性系数为 1 lb/ft，物体从平衡位置下方 6in 处以向下$\frac{3}{2}$ ft/s 的速度释放. 求运动的方程，并把它写成形如(6)的形式.

10. 一个重 10lb 的物体使得弹簧伸长了 1/4ft. 用重 1.6slug 的物体代替这个物体，并从平衡位置上方 1/3ft 处以向下$\frac{5}{4}$ft/s 的速度释放. 写出形如(6)的解. 在什么时刻物体会处在平衡位置下方振幅的 1/2 处?

11. 一个重 64lb 的物体连接在弹簧的末端，并使得弹簧伸长了 0.32ft. 在平衡位置上方 8in 处，物体具有向下 5ft/s 的速度.

(a)求运动的方程.

(b)运动的振幅和周期是多少?

(c)在 3π 的时间内物体能完成多少个完整的振动?

(d)在什么时刻物体第二次以向下的速度通过平衡位置?

(e)在什么时刻物体达到距离平衡位置的最大位移处?

(f)$t=3$s 时物体在什么位置?

(g)$t=3$s 时物体的瞬时速度是多少?

(h)$t=3$s 时物体的加速度是多少?

(i)当物体通过平衡位置时瞬时速度是多少?

(j)在什么时刻物体处在平衡位置下方 5in 的地方?

(k)在什么时刻物体处在平衡位置下方 5in 的地方并具有向上的速度?

12. 重 1 slug 的物体悬挂在一弹簧下端，其弹性系数为 9 lb/ft. 初始时刻物体从平衡位置上方 1ft 处开始运动，且具有向上的大小为$\sqrt{3}$ft/s 的速度. 求物体具有向下 3ft/s 速度的时刻.

13. 在有些情况下，当两个平行的、弹性系数分别为 k_1，k_2的弹簧同时支撑一个重物 W 时，系统的有效弹性系数(effective spring constant)为 $k=4k_1k_2/(k_1+k_2)$. 一个重 20lb 的物体使得一个弹簧伸长了 6in，另一个弹簧伸长了 2in. 这两个弹簧连接在一个普通的支撑物上，也就是一个金属板. 如图 5.16 所示，这个 20lb 的重物连接在双弹簧金属板的中间位置. 求这个系统的有效弹性系数. 若重物从平衡位置处以向下 2ft/s 的速度释放，求运动方程.

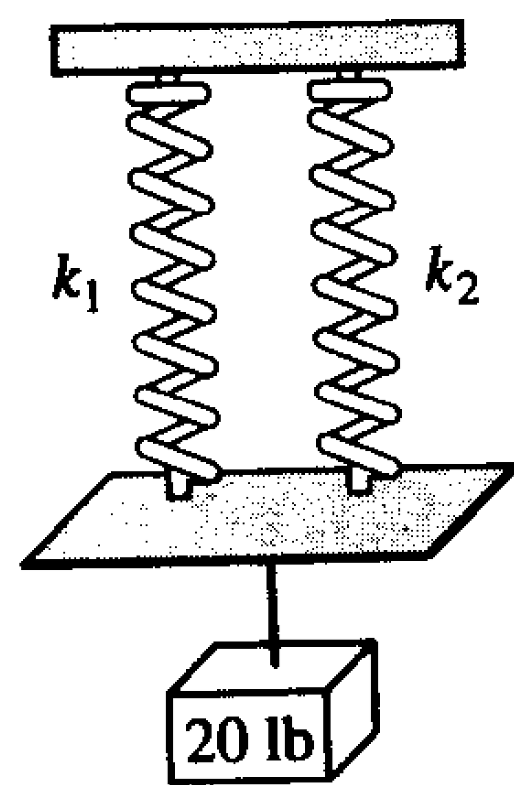


图 5.16

14. 某个重物使得一个弹簧伸长了 1/3ft，另一个弹簧伸长了 1/2ft. 这两个弹簧连接在一个普通支撑物上，如习题 13 的图 5.16 所示. 把第一个重物换下，用一个 8lb 的重物连接在双弹簧系统上，并使之运动. 若运动的周期是 $\pi/15$s，求第一个重物质量的数值解.

15. 只通过微分方程讨论 $4x''+e^{-0.1t}x=0$ 所描述的弹簧/质量系统在相当长的周期后行为是怎样的.

16. 只通过微分方程讨论 $4x''+tx=0$ 所描述的弹簧/质量系统在相当长的周期后行为是怎样的.

5.1.2 弹簧/质量系统：自由阻尼运动

在习题 17～20 中，给出的图形表示了弹簧上质点运动的图像. 用图像求：

(a)质点的初始位移是在平衡位置上方还是下方.

(b)弹簧释放时是静止的，还是具有向下或向上的速度.

17.

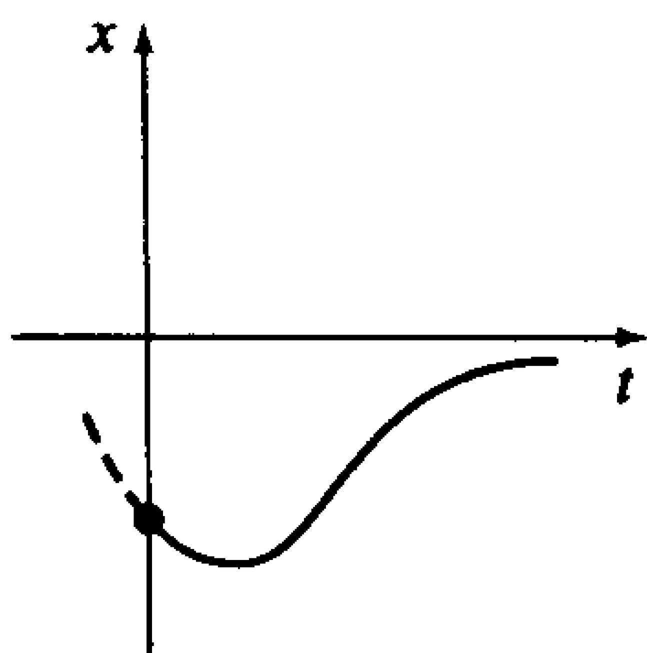


图 5.17

18.

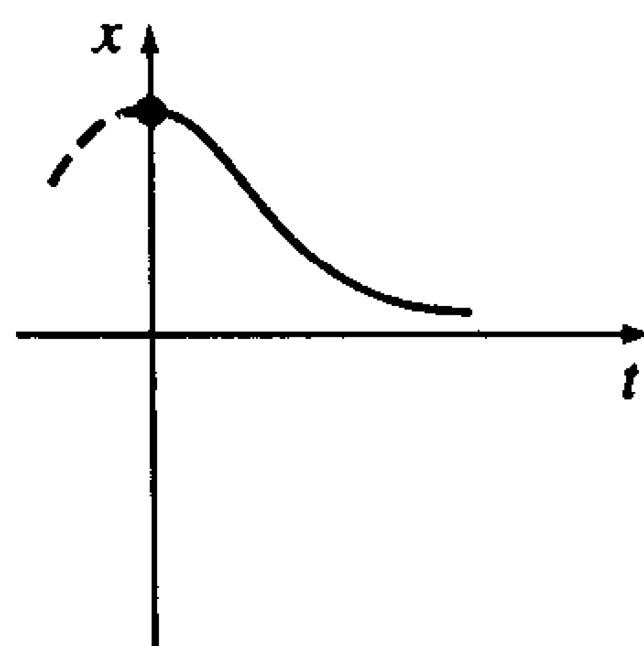


图 5.18

19.

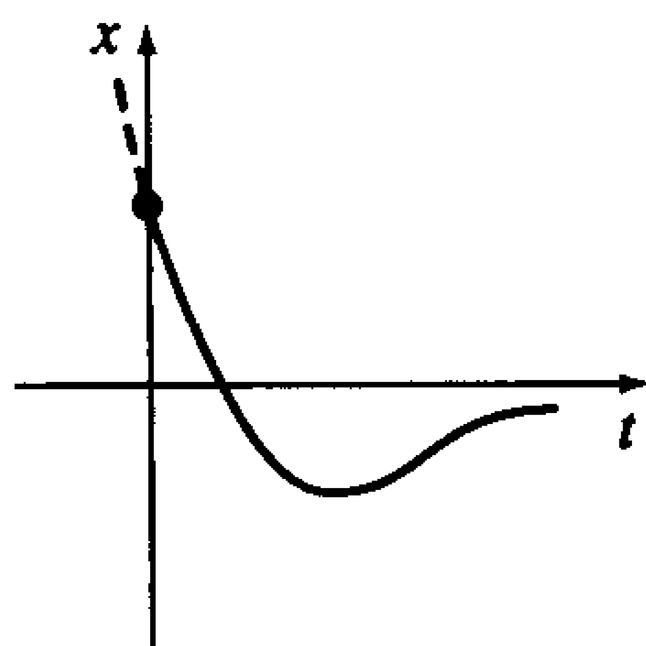


图 5.19

20.

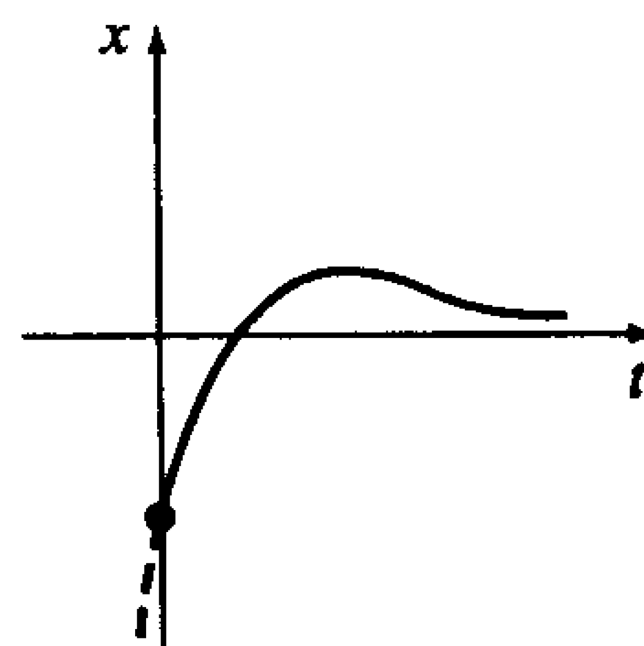


图 5.20

21. 一个 4lb 的重物连接在弹性系数为 2 lb/ft 的弹簧的一端. 介质对重物的运动施加阻尼作用，阻力的大小数值上等于物体的瞬时速率. 若重物从平衡位置上方 1ft 处以向下 8 ft/s 的速度释放，求重物通过平衡位置的时刻. 求出重物达到相对于平衡位置最大位移处的时刻. 在这一瞬间物体处在什么位置?

22. 一个长 4ft 的弹簧在悬挂了 8lb 重的重物后长度为 8ft. 物体运动的介质对物体施加阻力，阻力大小等于$\sqrt{2}$倍瞬时速度. 若重物从平衡位置处以向下 5ft/s 的速度释放，求其运动方程. 求物体达到相对于平衡位置最大位移处的时刻，并求出此时的位置.

23. 一个 1kg 的重物连接在弹簧一端，其弹性系数为 16N/m，整个系统处在液体中，受到的阻力等于 10 倍的瞬时速度. 求出运动方程，若

(a)重物从平衡位置下方 1m 处由静止释放.

(b)重物从平衡位置下方 1m 处以向上 12m/s 的速度释放.

24. 在习题 23 的(a)和(b)中，求出物体是否能通过平衡位置. 在每一种情况下，求出物体达到相对于平衡位置最大位移处的时刻，在这个时刻物体处在什么位置?

25. 对弹簧施加 2lb 的力，使它伸长 1ft. 一个 3.2lb 的重物连接在弹簧一端，这个系统处在介质中，该介质对运动施加的阻力数值上等于瞬时速度的 0.4 倍.

(a)若重物从平衡位置上方 1ft 处由静止释放，求运动方程.

(b)求形如(23)的运动方程.

(c)求重物第一次向上通过平衡位置的时刻.

26. 一个重 10lb 的物体连接在长 5ft 的弹簧上，测得该弹簧长度为 7ft. 把 10lb 的重物去掉，用 8lb 的重物替代之，把整个系统置于一种介质中，这种介质对系统施加的阻力数值上等于瞬时速度.

(a)若重物从平衡位置下方 1/2ft 处以向下 1 ft/s 的速度释放，求运动方程.

(b)写出形如(23)的运动方程.

(c)求出物体向上通过平衡位置的时刻.

(d)绘出运动方程的图像.

27. 一个 10lb 的重物连接在弹簧的一端，使之伸长了 2ft. 该重物附在阻力大小为瞬时速度 $\beta(\beta>0)$倍的阻尼设备上. 求出阻尼常数 β，使得下列运动满足(a)过阻尼，(b)临界阻尼以及(c)无阻尼.
28. 一个 24lb 的重物使得弹簧伸长了 4ft. 运动发生在阻尼介质中，阻尼介质施加的阻力数值上等于瞬时速度的 $\beta(\beta>0)$倍. 若重物从平衡位置处以向上 2ft/s 的速度开始运动，证明如果 $\beta>3\sqrt{2}$，则运动方程为

$$x(t)=\frac{-3}{\sqrt{\beta^2-18}}e^{-2\beta t/3}\sinh\frac{2}{3}\sqrt{\beta^2-18t}.$$

5.1.3 弹簧/质量系统：受迫运动

29. 一个 16lb 的重物使得弹簧伸长了 8/3ft. 初始时刻重物从平衡位置下方 2ft 处由静止释放，运动发生在阻尼介质中，该介质所施加的阻力数值上等于 1/2 倍瞬时速度. 如果重物受大小等于 $f(t)=10\cos3t$ 的外力驱动，求运动方程.
30. 1 slug 的物体连接在弹簧一端，其弹性系数为 5 lb/ft. 初始时刻，物体从平衡位置下方 1ft 处以向下 5ft/s 的速度释放，运动发生在阻尼介质中，该介质对运动所施加的阻力数值上等于瞬时速度的 2 倍.
    (a)若物体受大小等于 $f(t)=12\cos2t+3\sin2t$ 的外力驱动，求运动方程.
    (b)在同一坐标系下绘出瞬时解和稳定解的图像.
    (c)绘出运动方程的图像.
31. 1slug 的物体连接在弹簧的一端，该弹簧伸长了 2ft，并且在平衡位置处于静止状态. 时刻 $t=0$ 开始，大小等于 $f(t)=8\sin4t$ 的外力施加于系统上. 若周围介质对运动施加的阻力数值上等于瞬时速度的 8 倍，求运动方程.
32. 在习题 31 中，若外力等于 $f(t)=e^{-t}\sin4t$，求运动方程. 分析当 $t\to+\infty$时的位移是多少.
33. 一个 2kg 的重物连接在弹性系数为 32N/m 的弹簧的一端，它在平衡位置处保持静止状态. 在 $t=0$ 时刻，一个大小等于 $f(t)=68e^{-2t}\cos4t$ 的外力作用于系统. 求有阻力作用下的运动方程.
34. 在习题 33 中，把运动方程写为形如 $x(t)=A\sin(\omega t+\phi)+Be^{-2t}\sin(4t+\theta)$. 在很长时间后振动的振幅是多少?
35. 物体 m 系在弹簧的末端，弹性系数为 k. 物体达到平衡以后，它的支撑物开始在与水平线 L 垂直的方向上按照 $h(t)$的规律做振荡运动. h 的值表示距离 L 的距离，单位为 ft. 请参考图 5.21.
    (a)如果整个系统在介质中运动，这种介质施加的阻力大小等于 $\beta(dx/dt)$，求运动的微分方程.
    (b)若在弹簧上连接 16lb 的重物使其伸长 4ft，$\beta=2$，$h(t)=5\cos t$，$x(0)=x'(0)=0$，解(a)中的微分方程.

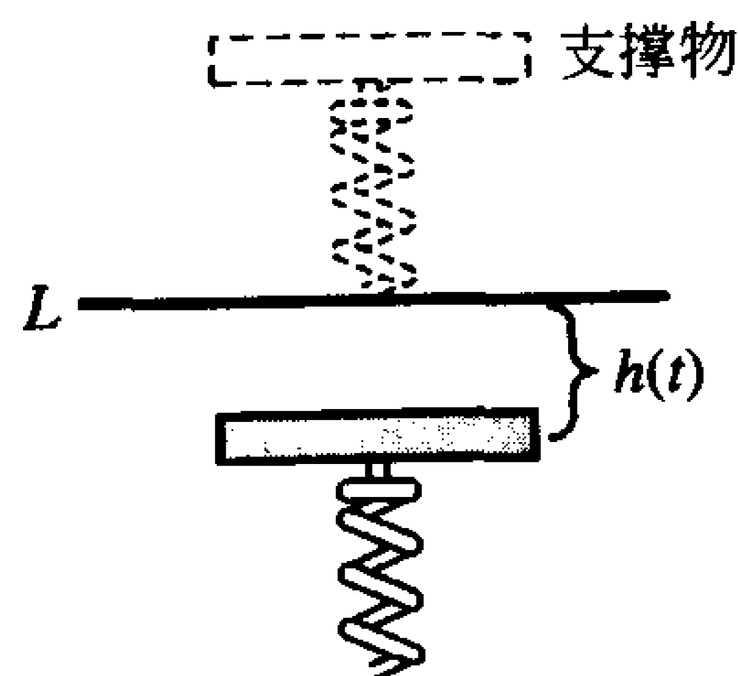


图 5.21

36. 100g 的重物连接在弹簧上，其弹性系数为 1600 dynes/cm. 当物体达到平衡以后，它的支撑物开始按照 $h(t)=\sin8t$ 的规律振荡，这里 h 表示距离初始位置的位移. 请参考习题 35 以及图 5.21.
    (a)在有阻尼的情况下，若重物从平衡位置处由静止释放，求运动方程.
    (b)物体在什么时刻通过平衡位置?
    (c)物体在什么时刻达到最大位移?
    (d)最大和最小位移是多少?
    (e)绘出运动方程的图像.

在习题 37 和 38 中，求解所给的初值问题.

37. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=-5\sin2t+3\cos2t$，$x(0)=-1$，$x'(0)=1$

38. $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=5\sin 3t$，$x(0)=2$，$x'(0)=0$

39. (a)证明初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=F_0\cos\gamma t, x(0)=0, x'(0)=0$$

的解是

$$x(t)=\frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}(\cos\gamma t-\cos\omega t).$$

(b)计算 $\lim\limits_{\gamma\to\omega}\frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}(\cos\gamma t-\cos\omega t)$.

40. 把习题 39 中(b)的结果和有外力 $F_0\cos\omega t$ 情况下用常数变易法求得的解加以比较.

41. (a)证明习题 39 (a)中给出的 $x(t)$ 可以写成下面的形式

$$x(t)=\frac{-2F_0}{\omega^2-\gamma^2}\sin\frac{1}{2}(\gamma-\omega)t\sin\frac{1}{2}(\gamma+\omega)t.$$

 (b)如果定义 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\gamma-\omega)$，证明当 ε 很小时，近似解为

$$x(t)=\frac{F_0}{2\varepsilon\gamma}\sin\varepsilon t\sin\gamma t.$$

当 ε 很小时，外力的频率 $\gamma/2\pi$ 近似于自由振动的频率 $\omega/2\pi$. 当这种情况成立时，这个运动就如图 5.22 所示. 这种类型的振荡称为频击(beats)，这也是因为 $\sin\varepsilon t$ 的频率相对于 $\sin\gamma t$ 的频率来说相当小. 虚线，亦或是 $x(t)$ 图像封闭的区域可以从 $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma)\sin\varepsilon t$ 的图像中得到. 用绘图工具绘出不同的 F_0、ε 和 γ 值的图像以验证图 5.22 中的图像.

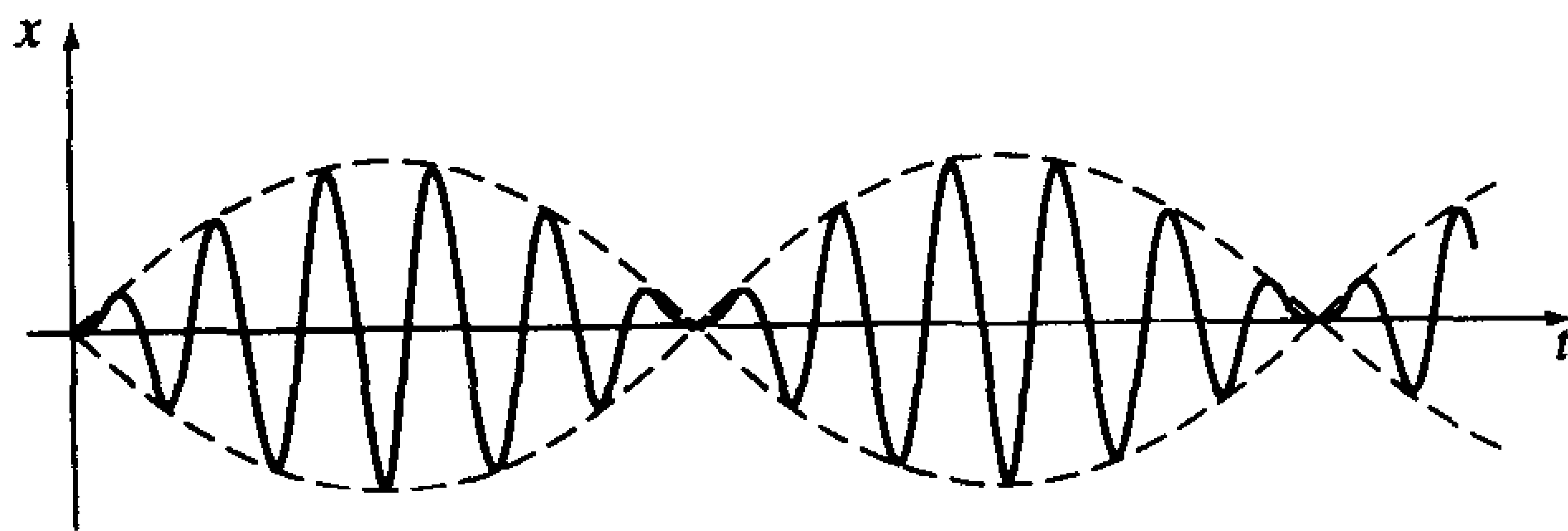


图 5.22

计算机实验作业

42. 当有阻力作用于习题 39(a)中的模型时，有频击现象发生吗？用问题

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega^2x=F_0\cos\gamma t, x(0)=0, x'(0)=0$$

的显式解的图像或用数值求解程序绘出的解曲线来说明所得答案.

43. (a)证明

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega^2x=F_0\sin\gamma t$$

的通解为

$$x(t)=Ae^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t+\phi)+\frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}\sin(\gamma t+\theta),$$

其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$，相角 ϕ 和 θ 分别定义为 $\sin\phi=c_1/A$，$\cos\phi=c_2/A$，

$$\sin\theta=\frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}},\cos\theta=\frac{\omega^2-\gamma^2}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}.$$

(b)(a)中的解可以写为 $x(t)=x_c(t)+x_p(t)$ 的形式. 证明 $x_c(t)$ 是瞬时解，因此，当时间很大时，这个解近似于 $x_p(t)=g(\gamma)\sin(\gamma t+\theta)$，其中

$$g(\gamma)=\frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}.$$

尽管 $x_p(t)$ 的振幅 $g(\gamma)$ 当 $t\to+\infty$ 时是有界的，证明最大的振动幅度发生在 $\gamma_1=\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}$. g 的最大值是多少？ $\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}/2\pi$ 称为系统的共振频率(resonance frequency).

(c)当 $F_0=2$，$m=1$，$k=4$ 时，g 为

$$g(\gamma)=\frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+\beta^2\gamma^2}}.$$

对应于阻尼系数 $\beta=2$，$\beta=1$，$\beta=3/4$，$\beta=1/2$ 和 $\beta=1/4$，构建一张 γ_1 和 $g(\gamma)$ 的表格. 用绘图工具在同一坐标系下绘出相应于这些阻尼系数的图像. 这个图像族称为共振曲线(resonance curve)或系统的频率响应曲线(frequency response curve). 当 $\beta\to0$ 时 γ_1 趋近于什么值？当 $\beta\to0$ 时共振曲线会有什么情况发生？

44. 考虑一个受迫无阻尼弹簧/质量系统，用如下初值问题描述

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=F_0\sin^n\gamma t,x(0)=0,x'(0)=0.$$

(a)$n=2$ 时，讨论为什么完全共振系统只有单一频率 $\gamma_1/2\pi$.

(b)$n=3$ 时，讨论为什么完全共振系统有两个频率 $\gamma_1/2\pi$ 和 $\gamma_2/2\pi$?

(c)设 $\omega=1$ 和 $F_0=1$. 用数值求解程序绘出(a)中初值问题 $n=2$ 及 $\gamma_1=\gamma_2$ 的解图像. 依次绘出(b)中初值问题 $n=3$ 时对应的 $\gamma=\gamma_1$ 和 $\gamma=\gamma_2$ 的解图像.

5.1.4 串联电路模型

45. 求 LRC 串联电路在 $t=0.01$s 时刻电容器上的电荷量，$L=0.05$h，$R=2\Omega$，$C=0.01$f，$E(t)=0$V，$q(0)=5$C，$i(0)=0$A. 求电容器上电荷第一次等于零的时刻.

46. 求 LRC 串联电路中电容器上的电量，其中 $L=1/4$h，$R=20\Omega$，$C=1/300$f，$E(t)=0$V，$q(0)=4$C，$i(0)=0$A. 电容器上的电荷量会等于零吗？

在习题 47 和 48 中，求给定 LRC 串联电路中电容器上的电量和电路中的电流. 求电容器上的最大电荷量.

47. $L=\frac{5}{3}$h，$R=10\Omega$，$C=\frac{1}{30}$f，$E(t)=300$V，$q(0)=0$C，$i(0)=0$A

48. $L=1$h，$R=100\Omega$，$C=0.0004$f，$E(t)=30$V，$q(0)=0$C，$i(0)=2$A

49. 求 LRC 串联电路中稳定的电荷量和稳定的电流，其中 $L=1$h，$R=2\Omega$，$C=0.25$f，$E(t)=50\cos t$V.

50. 证明例 10 中 LRC 串联电路的稳定电流振幅为 E_0/Z，这里 Z 是电路的全电阻.

51. 证明 LRC 串联电路中稳定电流是 $i_p(t)=4.160\sin(60t-0.588)$，其中 $L=1/2$h，$R=20\Omega$，$C=0.001$f，$E(t)=100\sin60t$V. [提示：利用习题 50.]

52. 求 LRC 串联电路中稳定的电流，$L=1/2$h，$R=20\Omega$，$C=0.001$f，$E(t)=(100\sin60t+200\cos40t)$V.

53. 求 LRC 串联电路中电容器上的电荷量，其中 $L=1/2$h，$R=10\Omega$，$C=0.01$f，$E(t)=150$V，$q(0)=1$C，$i(0)=0$A. 很长一段时间以后电容器上的电荷量是多少？

54. 证明如果 L、R、C 和 E_0 都是常数，那么例 10 中稳定电流的振幅当 $\gamma=1/\sqrt{LC}$ 时达到最大. 最大振幅是多少？

55. 证明如果 L、R、E_0 和 γ 都是常数，则例 10 中稳定电流的振幅当电容 $C=1/L\gamma^2$ 时达到最大.

56. 求 LC 电路中电容器上的电荷量以及电流，$L=0.1\text{h}$，$C=0.1\text{f}$，$E(t)=100\sin\gamma t\text{V}$，$q(0)=0\text{C}$，$i(0)=0\text{A}$.

57. 求 LC 电路中电容器上的电荷量以及电流，$E(t)=E_0\cos\gamma t\text{V}$，$q(0)=q_0\text{C}$，$i(0)=i_0\text{A}$.

58. 在习题 57 中，求电路在共振状态下的电流.

5.2 线性方程：边界值问题

在上一节里讨论了带有初始条件的二阶方程系统模型，即限制条件为某个未知函数及其在一点的导数. 但是物理系统的数学模型经常需要我们解带有边界条件的微分方程，也就是限制在某个未知函数上的条件，亦或限制在它的导数上，亦或限制在这个未知函数与其在两点(或更多点)上的导数的线性组合.

横梁的偏斜 许多建筑是由钢桁的支架或横梁组成的，而这些横梁在它们自身的重力或外力的影响下会发生偏斜或弯曲. 正如我们所看到的，这种偏斜量 $y(x)$ 可以用一个相对简单的线性四阶微分方程来描述.

首先，假设长度为 L 的横梁是匀质的，且横截面都一样. 横梁上没有任何载荷(包括其自身的重量)，一条直线把所有横截面的质心连接起来，这条直线称为对称轴(axis of symmetry). 请见图 5.23(a). 若在横梁上施加载荷，且这个载荷通过一个包括对称轴的垂直平面，如图 5.23(b)所示，那么这个横梁会发生弯曲，这时连接所有横截面质心的曲线称为偏斜曲线(deflection curve)或弹性曲线(elastic curve). 偏斜曲线近似于横梁的形状. 设 x 轴和对称轴一致，偏斜量 $y(x)$ 可以通过相对于 x 轴的位置来计算，若向下偏离 x 轴，则偏离方向为正. 由弹性定理知，x 点的弯曲矩 $M(x)$ 和每单位长度的载荷 $w(x)$ 有关，这个关系可以用下面的方程来描述

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=w(x). \tag{1}$$

另外，弯曲矩 $M(x)$ 与弹性曲线的曲率 κ 成正比

$$M(x)=EI\kappa, \tag{2}$$

这里 E 和 I 都是常数；E 是横梁材料弹性的杨氏模量，I 是横截面的惯性矩(相对于已知中轴的矩). 乘积 EI 称为横梁的抗挠刚度(flexural rigidity).

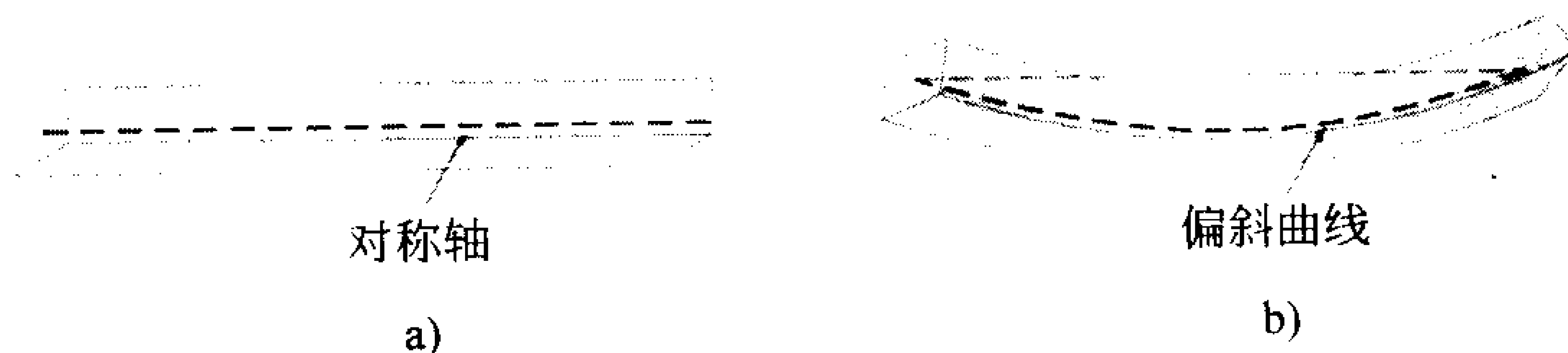


图 5.23

由微积分知，曲率可由 $\kappa=y''/[1+(y')^2]^{3/2}$ 给出. 当偏斜量 $y(x)$ 很小的时候，斜率 $y'\approx0$，并且有 $[1+(y')^2]^{3/2}\approx1$. 若令 $\kappa=y''$，则方程(2)可以写为 $M=EIy''$. 这个表达式中的二阶导数为

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d^2}{dx^2}y'' = EI\frac{d^4y}{dx^4}. \tag{3}$$

用(1)的结果替代(3)中的 d^2M/dx^2，可以看到偏斜量 $y(x)$ 满足一个四阶微分方程

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \tag{4}$$

方程(4)的边界条件与横梁的端点是用什么方式支撑的有关. 悬梁的一端是嵌在(embedded)或夹在(clamped)支撑物上的，另一端是自由的. 跳板、伸展的胳膊、机翼以及电影院的楼座都是这种结构的例子，甚至树木、旗杆、摩天大楼和乔治·华盛顿纪念碑都是这种悬梁结构，因为它们一端都嵌在支撑物里，而另一端受风的扭曲力作用. 对于悬梁来说，偏斜量 $y(x)$ 必须满足下面两个在嵌入端点 $x=0$ 处的条件：

- $y(0)=0$，因为端点处没有偏斜量.
- $y'(0)=0$，因为偏斜曲线在这点和 x 轴相切(换言之，偏斜曲线在这点的斜率为零).

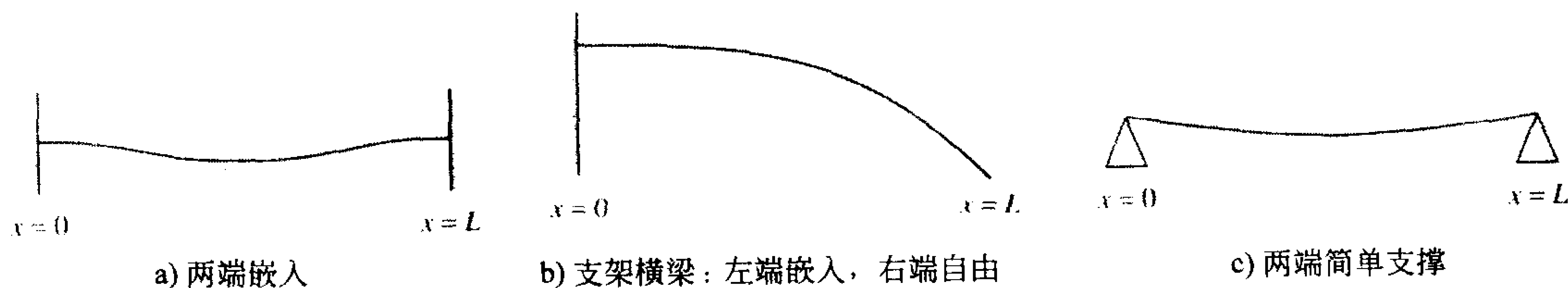
在自由端 $x=L$ 处的条件是：

- $y''(L)=0$，因为扭曲时刻为 0.
- $y'''(L)=0$，因为剪力为 0.

函数 $F(x)=dM/dx=EId^3y/dx^3$ 称为剪力. 如果横梁的一端是简单支撑的(也称针脚式支撑、支点支撑或铰链支撑)，那么在支撑点必有 $y=0$ 和 $y''=0$ 成立. 请见图 5.24. 表 5.1 给出了(4)式可能的边界条件.

表 5.1

横梁的两端	边界条件
嵌入	$y=0$，$y'=0$
自由	$y''=0$，$y'''=0$
简单支撑	$y=0$，$y''=0$



a) 两端嵌入　b) 支架横梁：左端嵌入，右端自由　c) 两端简单支撑

图 5.24

例 1　嵌入式横梁

长为 L 的横梁两端都嵌在支撑物里. 若常载荷 w_0 均匀分布在整个横梁上，$w(x)=w_0$，$0<x<L$，求横梁的偏斜量.

解　由前面的讨论我们可知，偏斜量 $y(x)$ 满足

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0.$$

因为横梁的左端点($x=0$)和右端点($x=L$)都是嵌入的，所以端点处没有偏斜量. 因此边界条件是

$$y(0)=0, y'(0)=0 \quad 和 \quad y(L)=0, y'(L)=0.$$

我们可以用普通方法解这个非齐次微分方程(由四次辅助方程 $m^4=0$ 的根 $m=0$ 求出 y_c，再由待定系数法求出特解 y_p)，或者也可以对这个微分方程连续积分四次来求解. 不管哪种方法，

都可以求出方程的通解为

$$y(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+\frac{w_0}{24EI}x^4.$$

把条件 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=0$ 代入，依次可得 $c_1=0$，$c_2=0$，但是把 $y(L)=0$ 和 $y'(L)=0$ 代入方程 $y(x)=c_3x^2+c_4x^3+\frac{w_0}{24EI}x^4$ 可得方程组

$$c_3L^2+c_4L^3+\frac{w_0}{24EI}L^4=0,$$

$$2c_3L+3c_4L^2+\frac{w_0}{6EI}L^3=0.$$

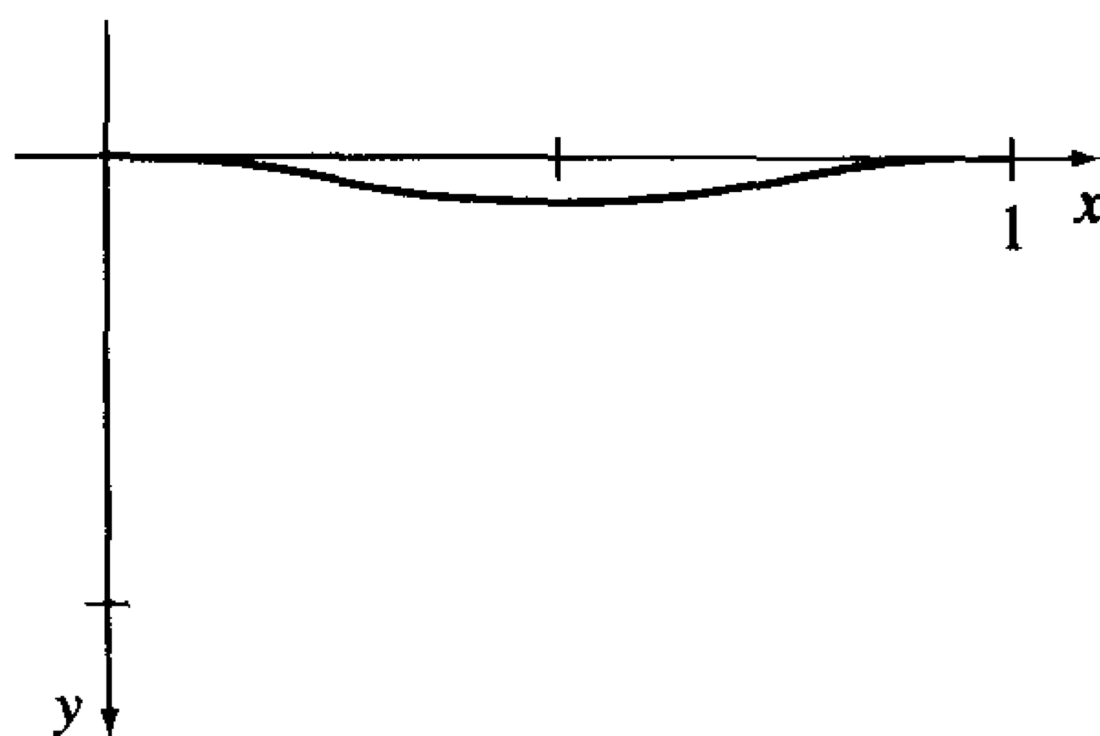


图 5.25

解这个方程组，$c_3=\frac{w_0L^2}{24EI}$，$c_4=\frac{-w_0L}{12EI}$. 因此偏斜量为

$$y(x)=\frac{w_0L^2}{24EI}x^2-\frac{w_0L}{12EI}x^3+\frac{w_0}{24EI}x^4=\frac{w_0}{24EI}x^2(x-L)^2.$$

令 $w_0=24EI$，$L=1$，可得图 5.25 中所示的偏离曲线的图形. ■

特征值与特征函数 很多应用方面的问题需要求解两点处的边界值问题以及一个包含参数 λ 的线性微分方程. 我们可以通过边界值问题的非平凡解来求 λ 的值.

例 2 边界值问题的非平凡解

解边界值问题

$$y''+\lambda y=0,y(0)=0,y(L)=0.$$

解 考虑以下三种情形：$\lambda=0$，$\lambda<0$，$\lambda>0$.

情形 I： 当 $\lambda=0$ 时，$y''=0$ 的解是 $y=c_1x+c_2$. 由边界条件 $y(0)=0$ 和 $y(L)=0$ 依次可以求出 $c_2=0$，$c_1=0$. 因此 $\lambda=0$ 时边界值问题的唯一解是平凡解 $y=0$.

情形 II： 当 $\lambda<0$ 时，我们有 $y=c_1\cosh\sqrt{-\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{-\lambda}x$.[⊖] 又由 $y(0)=0$ 得 $c_1=0$，则有 $y=c_2\sinh\sqrt{-\lambda}x$. 再把第二个条件 $y(L)=0$ 代入得 $c_2\sinh\sqrt{-\lambda}L=0$. 因为 $\sinh\sqrt{-\lambda}L\neq0$，所以一定有 $c_2=0$. 因此 $y=0$.

情形 III： 当 $\lambda>0$ 时，$y''+\lambda y=0$ 的通解可由 $y=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$ 得到. 如前所述，由 $y(0)=0$ 可得 $c_1=0$，但是把 $y(L)=0$ 代入得到

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}L=0.$$

若 $c_2=0$，则必有 $y=0$. 但是，如果 $c_2\neq0$，那么 $\sin\sqrt{\lambda}L=0$. 最后一个条件说明正弦函数的参数必须是 π 的整数倍：

$$\sqrt{\lambda}L=n\pi \text{ 或 } \lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2},n=1,2,3,\cdots.$$

因此对任何非零实数 c_2，$y=c_2\sin(n\pi x/L)$是这个边界问题的解，对每一个 n 均成立. 因为微分方程是齐次的，所以可以不写 c_2. 换句话说，给定一个序列

⊖ $\sqrt{-\lambda}$看起来好像有点奇怪，但是记住 $\lambda<0$ 等价于 $-\lambda>0$.

$$\frac{\pi^2}{L^2},\frac{4\pi^2}{L^2},\frac{9\pi^2}{L^2},\cdots,$$

相应的函数序列为

$$\sin\frac{\pi}{L}x,\sin\frac{2\pi}{L}x,\sin\frac{3\pi}{L}x,\cdots,$$

这些函数都是原问题的非平凡解. ■

例 2 中边界值问题的非平凡解 $\lambda_n=n^2\pi^2/L^2$ ($n=1$, 2, 3, …)称为特征值(characteristic value 或 eigenvalue). 这些解与 λ_n 的值有关，$y_n=c_2\sin(n\pi x/L)$ 或 $y_n=\sin(n\pi x/L)$ 称为特征函数(characteristic function 或 eigenfunction).

细柱体的弯曲 在 18 世纪，欧拉是研究特征值问题的最著名的数学家之一，他用特征值问题分析细的弹性柱体在轴向力的作用下是如何弯曲的.

考虑一个细长的垂直柱体，长为 L，其上所有横截面都相同. 令 $y(x)$ 表示当柱体受到恒定不变的轴向力作用时发生的偏斜量，P 是作用于顶部的轴向力，如图 5.26 所示. 由沿柱体上每一点的弯曲矩可得

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py \text{ 或 } EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0, \tag{5}$$

这里 E 为弹性的杨氏模量，I 是关于通过质点的垂直线的惯性矩.

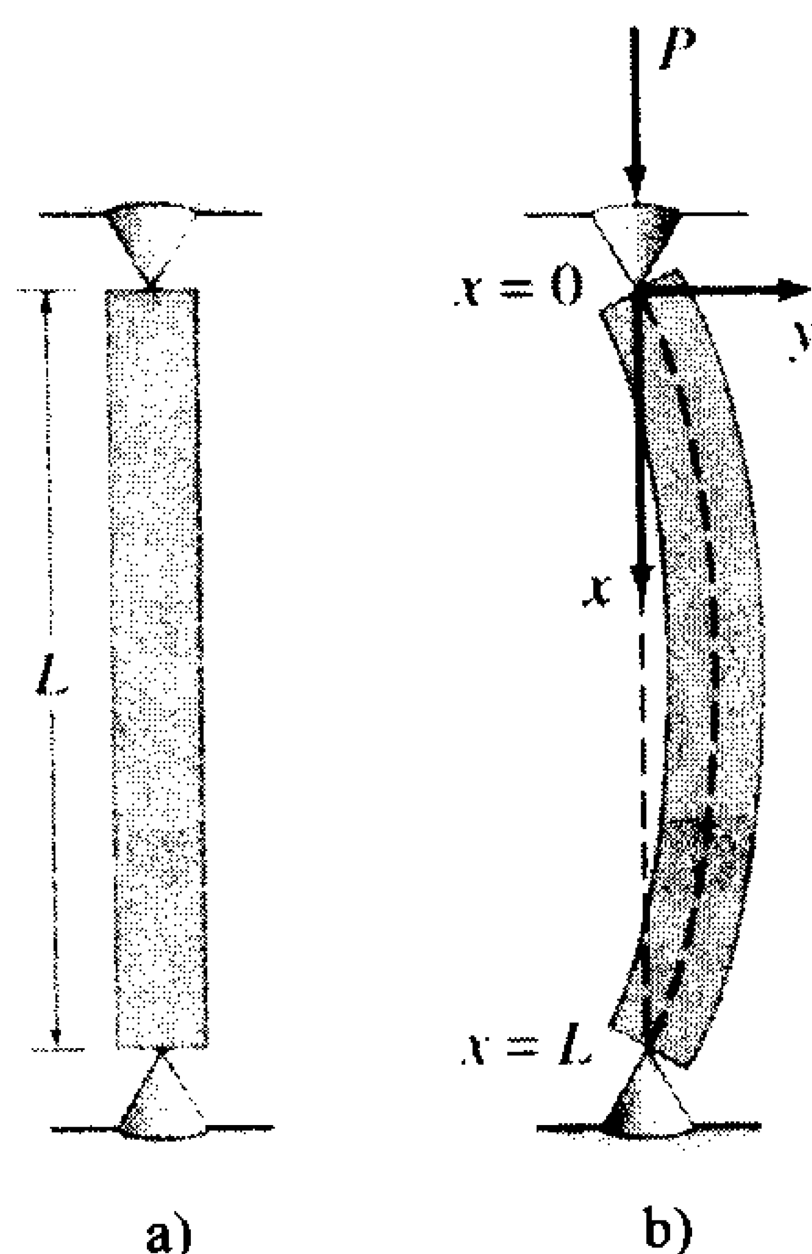


图 5.26

例 3 **欧拉载荷**

求长度为 L 的细长垂直匀质柱体在恒定轴向力 P 作用下的偏斜量，柱体的两端都是铰接在支撑物上的.

解 待解的边界值问题为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0,y(0)=0,y(L)=0.$$

首先注意到 $y=0$ 是这个问题的一个解. 这个解有一个直观的解释，若载荷 P 很小，则没有偏斜发生. 那么接下来的问题就是，当 P 值为多少时柱体会发生弯曲? 用数学术语说明为，当 P 值为多少时，边界值问题有非平凡解?

记 $\lambda=\frac{P}{EI}$，则可得

$$y''+\lambda y=0,y(0)=0,y(L)=0,$$

这和例 2 完全相同. 由例 2 中情形Ⅲ的讨论，我们知道偏斜曲线为 $y_n=c_2\sin(n\pi x/L)$，相应的特征值为 $\lambda_n=\frac{P_n}{EI}=n^2\pi^2/L^2$，$n=1$, 2, 3, …. 从物理上说，这表示当压力为 $P_n=n^2\pi^2EI/L^2$ ($n=1$, 2, 3, …)时柱体会发生弯曲或偏斜. 这些不同的力称为临界载荷(critical load). 对应于称为欧拉载荷(Euler load)的最小临界载荷 $P_1=\pi^2EI/L^2$ 的偏斜曲线称为第一弯曲模型(first buckling mode). ■

例 3 中相应于 $n=1$，$n=2$，$n=3$ 的偏斜曲线如图 5.27 所示. 注意，若原柱体在 $x=L/2$ 处有某种类型的物体约束，那么最小临界载荷为 $P_2=4\pi^2EI/L^2$，偏斜曲线如图 5.27(b)所示.

若约束施加在柱体的 $x=L/3$ 或 $x=2L/3$ 处，则临界载荷为 $P_3=9\pi^2 EI/L^2$，偏斜曲线如图 5.27(c)所示．请参考练习 5.2 的习题 23.

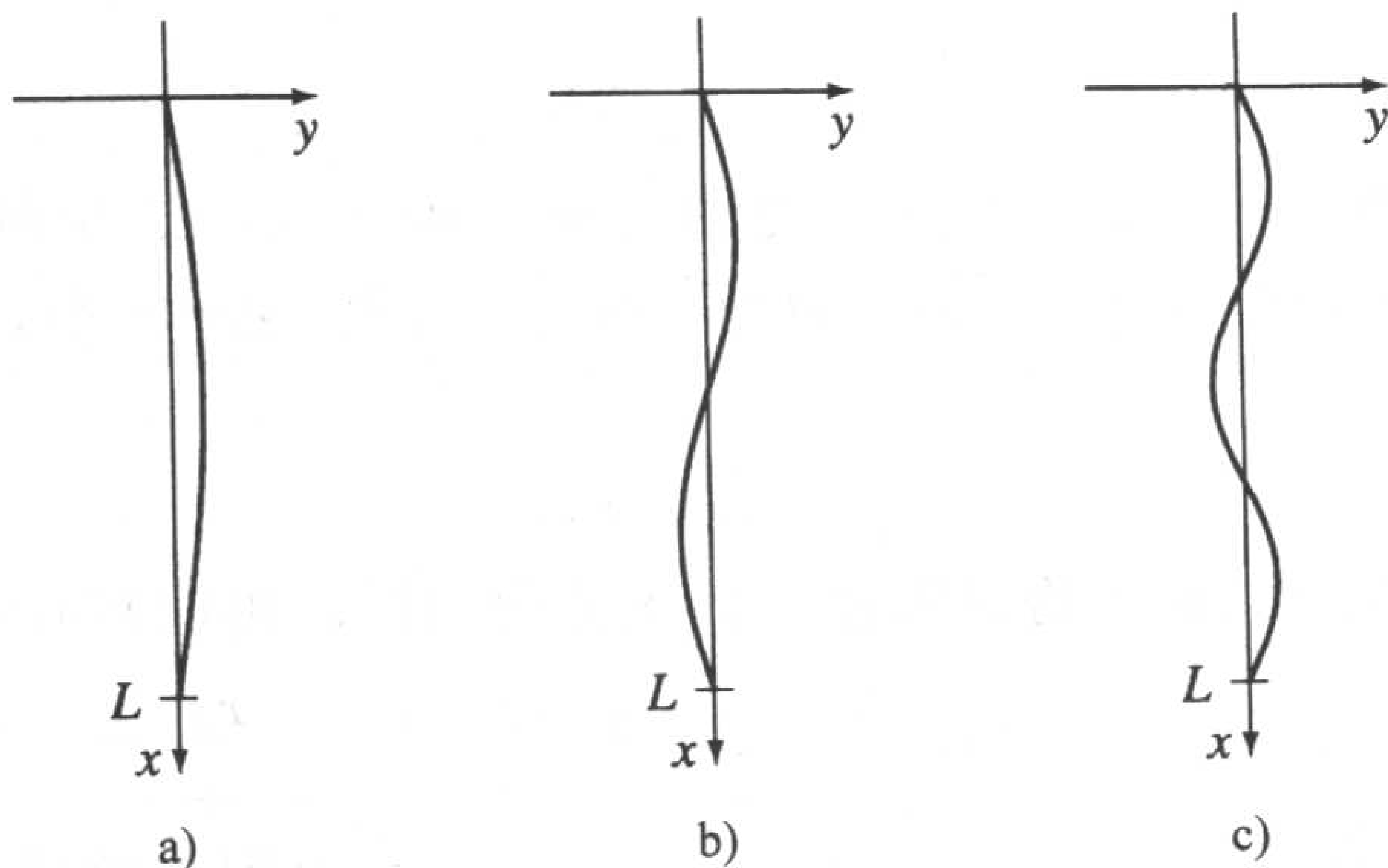


图 5.27

旋转弦 这个问题的线性二阶微分方程仍然为

$$y''+\lambda y=0. \tag{6}$$

在 5.1 节中，我们可以看到(6)式分别在弹簧/质量系统的简谐振动和串联电路的简谐振荡模型中以 $d^2x/dt^2+(k/m)x=0$ 和 $d^2q/dt^2+\left(\frac{1}{LC}\right)q=0$ 的形式出现的．对于(5)表示的柱体偏斜模型可以写为 $d^2y/dx^2+\left(\frac{P}{EI}\right)y=0$，这个形式和(6)式一样．在本节中我们又一次遇到了方程(6)：作为数学模型，它通过旋转弦的假设定义了一条偏斜曲线 $y(x)$．这个情况类似于两个人握住弦的两端以同步的方式转动．请见图 5.28 的(a)和(b).

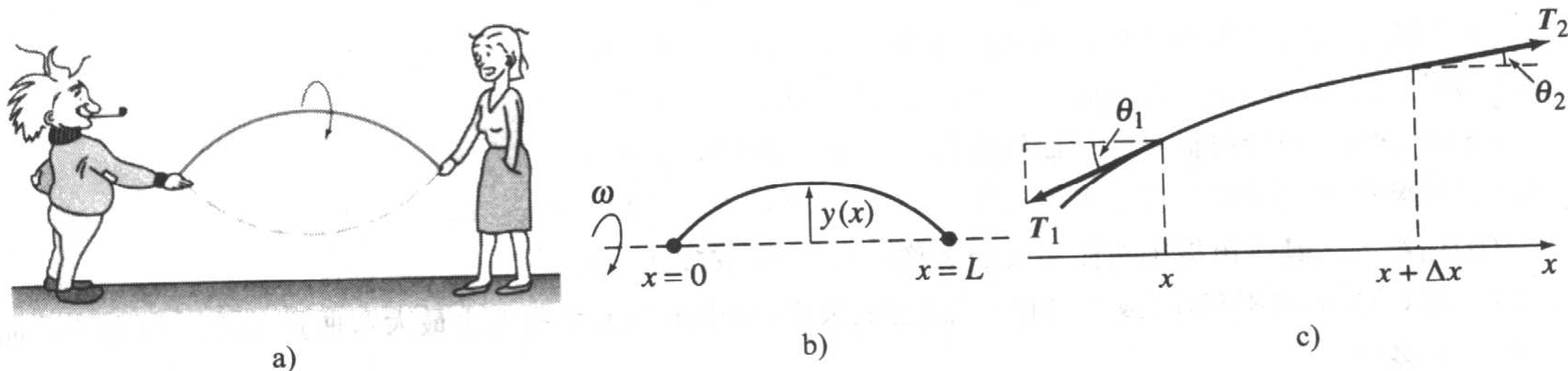


图 5.28

假设长为 L 的弦有均匀的密度 ρ(每单位长度的质量)沿着 x 轴伸长，将 $x=0$ 和 $x=L$ 处固定．设弦围绕着 x 轴以常角速率 ω 旋转．考虑弦在区间$[x, x+\Delta x]$之间的一段，这里 Δx 是一个小量．若弦的张力为常数 T，且与弦相切，那么上述微分方程可以通过令区间$[x, x+\Delta x]$上两个不同的净力公式相等得到．首先，从图 5.28(c)所示可以得到净垂直力为

$$F=T\sin\theta_2-T\sin\theta_1. \tag{7}$$

当角度 θ_1 和 θ_2(单位是弧度)很小时，有 $\sin\theta_2\approx\tan\theta_2$，$\sin\theta_1\approx\tan\theta_1$．此外，因为 $\tan\theta_2$ 和 $\tan\theta_1$

分别是沿 $\boldsymbol{T}_2$ 和 $\boldsymbol{T}_1$ 方向的弦的斜率，所以可得

$$\tan\theta_2 = y'(x+\Delta x) \text{ 和 } \tan\theta_1 = y'(x).$$

因此(7)可以写为

$$F \approx T[y'(x+\Delta x) - y'(x)]. \tag{8}$$

然后，用牛顿第二定律 $F=ma$ 可以得到净力的另外一种形式．这里区间上弦的质量为 $m=\rho\Delta x$；角速度为 ω 的那部分半径为 r，向心力为 $a=r\omega^2$．因为 Δx 很小，所以 $r=y$．所以垂直方向的净力可以用

$$F \approx -(\rho\Delta x)y\omega^2, \tag{9}$$

来近似，这里取负号是因为加速度的方向和 y 的正方向相反．由(8)和(9)可得

$$T[y'(x+\Delta x) - y'(x)] \approx -(\rho\Delta x)y\omega^2 \text{ 或 } T\frac{y'(x+\Delta x)-y'(x)}{\Delta x} \approx -\rho\omega^2 y. \tag{10}$$

当 Δx 趋于零时，(10)中的微商 $[y'(x+\Delta x)-y'(x)]/\Delta x$ 可以用二阶导数 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 代替．最后可以得到模型

$$T\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\rho\omega^2 y \text{ 或 } T\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \rho\omega^2 y = 0. \tag{11}$$

因为弦的两端 $x=0$ 和 $x=L$ 固定在支撑物上，所以方程(11)的解 $y(x)$ 也应该满足边界条件 $y(0)=0$ 和 $y(L)=0$.

练习 5.2

横梁的弯曲

在习题 1～5 中，解受制于下列边界条件的方程(4)．横梁长为 L，w_0 是常数.

1. (a)横梁的左端被固定住，右端是自由的，$w(x)=w_0$，$0<x<L$.
   (b)用绘图工具绘出横梁弯曲曲线的图像，$w_0=24EI$，$L=1$.
2. (a)横梁两端都被简单支撑着，$w(x)=w_0$，$0<x<L$.
   (b)用绘图工具绘出横梁弯曲曲线的图像，$w_0=24EI$，$L=1$.
3. (a)横梁的左端固定，右端简单支撑，$w(x)=w_0$，$0<x<L$.
   (b)用绘图工具绘出横梁弯曲曲线的图像，$w_0=48EI$，$L=1$
4. (a)横梁的左端固定，右端简单支撑，$w(x)=w_0\sin(\pi x/L)$，$0<x<L$.
   (b)用绘图工具绘出横梁弯曲曲线的图像，$w_0=2\pi^3EI$，$L=1$.
   (c)用 CAS 的求根程序(或图形计算器)近似求出(b)中图像上那些发生最大弯曲量的点．最大的弯曲量是多少？
5. (a)横梁两端简单支撑，$w(x)=w_0x$，$0<x<L$.
   (b)用绘图工具绘出横梁弯曲曲线的图形，其中 $w_0=36EI$，$L=1$.
   (c)用 CAS 的求根程序(或图形计算器)近似求出(b)中图像上那些发生最大弯曲量的点．最大的弯曲量是多少？
6. (a)求出习题 1 中悬臂梁的最大弯曲量.
   (b)梁的中部最大弯曲量和(a)中的值相比是怎样的？
   (c)求出习题 2 中简单支撑梁的最大弯曲量.
   (d)(c)中简单支撑梁的最大弯曲量和例 1 中嵌入式梁的最大弯曲量相比是怎样的？

7. 长为 L 的悬臂梁右端是嵌在支撑物内的，左端受到 Plb 的水平拉力. 原点取在它的自由端，如图 5.29 所示，可以证明横梁的弯曲量 $y(x)$满足微分方程

$$EIy'' = Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

如果 $w(x)=w_0x$，$0<x<L$，$y(0)=0$，$y'(L)=0$，求悬臂梁的弯曲量.

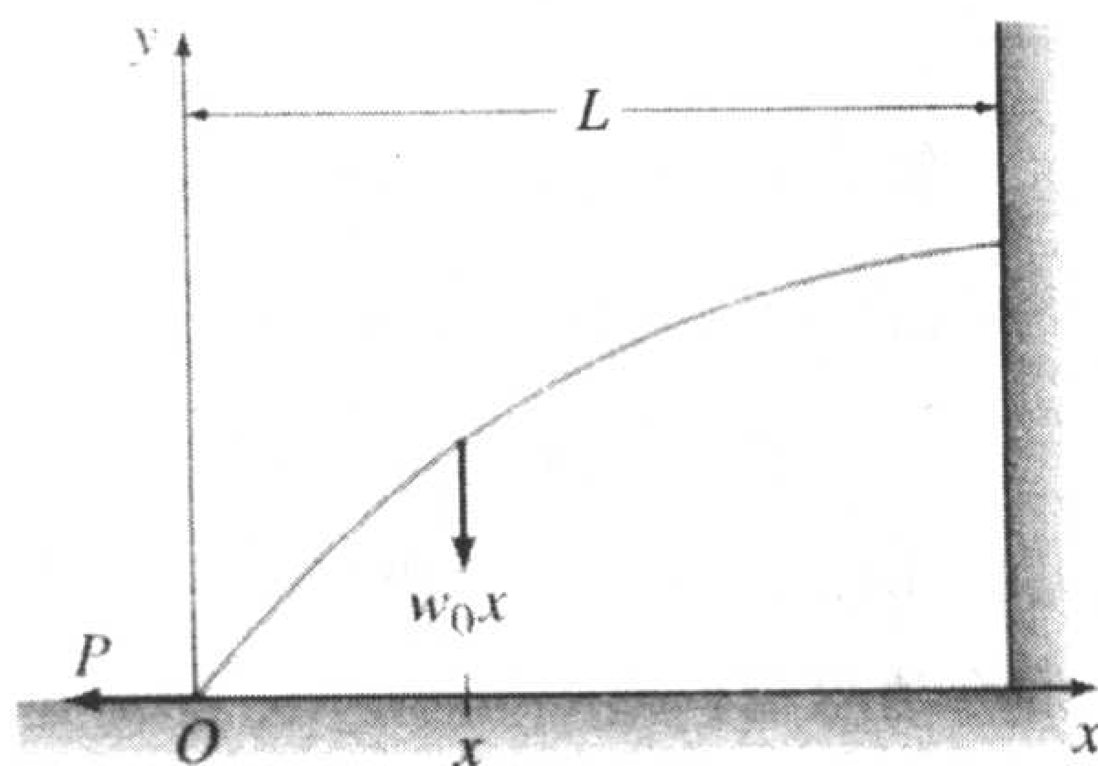


图 5.29

8. 若习题 7 中作用于自由端的是压力而不是拉力，那么弯曲量的微分方程为

$$EIy'' = -Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

若 $w(x)=w_0x$，$0<x<L$，$y(0)=0$，$y'(L)=0$，解这个方程.

在习题 9～22 中，求所给边界值问题的特征值和特征函数.

9. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(\pi)=0$

10. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

11. $y''+\lambda y=0$，$y'(0)=0$，$y(L)=0$

12. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

13. $y''+\lambda y=0$，$y'(0)=0$，$y'(\pi)=0$

14. $y''+\lambda y=0$，$y(-\pi)=0$，$y(\pi)=0$

15. $y''+2y'+(\lambda+1)y=0$，$y(0)=0$，$y(5)=0$

16. $y''+(\lambda+1)y=0$，$y'(0)=0$，$y'(1)=0$

17. $y''+\lambda^2y=0$，$y(0)=0$，$y(L)=0$

18. $y''+\lambda^2y=0$，$y(0)=0$，$y'(3\pi)=0$

19. $x^2y''+xy'+\lambda y=0$，$y(1)=0$，$y(e^{\pi})=0$

20. $x^2y''+xy'+\lambda y=0$，$y'(e^{-1})=0$，$y(1)=0$

21. $x^2y''+xy'+\lambda y=0$，$y'(1)=0$，$y'(e^2)=0$

22. $x^2y''+2xy'+\lambda y=0$，$y(1)=0$，$y(e^2)=0$

细柱体的弯曲

23. 考虑图 5.27. 如果我们想要临界载荷为 P_4，那么物理约束应该施加在柱体的什么位置？给出对应于这个载荷的弯曲曲线.

24. 细柱体的临界载荷与柱体的边界条件有关. 例 3 中的欧拉载荷值 P_1 是在假设柱体两端铰接的条件下推导出来的，假定匀质垂直的细柱体底端固定($x=0$)，顶端($x=L$)处于自由状态，一个轴向载荷 P 作用于它的自由端. 这种载荷可能引起柱体发生小的弯曲 δ，如图 5.30 所示，也可能不会引起这种小的弯曲. 不论哪一种情况，弯曲量 $y(x)$的微分方程都可以写为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=P\delta.$$

(a)当 $\delta=0$ 时弯曲量是多少？

(b)当 $\delta\neq0$ 时，证明该柱体所受的欧拉载荷为例 3 中铰接柱体所受欧拉载荷的 1/4.

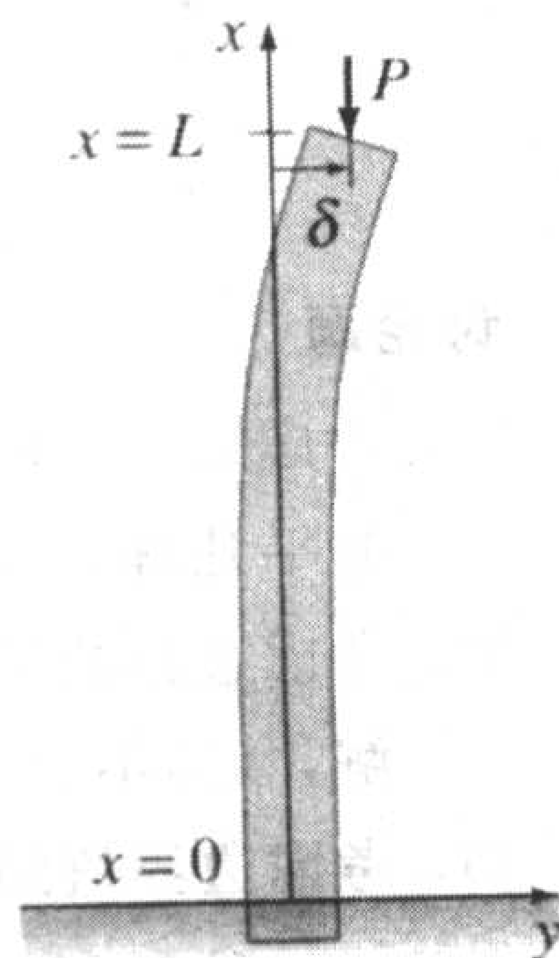


图 5.30

旋转弦

25. 考虑旋转弦问题中数学模型的边界值问题：

$$T\frac{d^2y}{dx^2}+\rho\omega^2y=0, y(0)=0, y(L)=0.$$

T 和 ρ 都是常数，定义旋转的临界角速度为 ω_n，作为 ω 的一个值，它使得边界值问题有非平凡解. 求临界角速度及相应的弯曲曲线 $y_n(x)$.

26. 若拉力 T 不是常数，那么旋转弦假设下的弯曲曲线或形状 $y(x)$为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[T(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\rho\omega^2 y=0.$$

假定 $1<x<e$，$T(x)=x^2$.

(a)如果 $y(1)=0$，$y(e)=0$，$\rho\omega^2>0.25$，证明旋转的临界角速度为 $\omega_n=\frac{1}{2}\sqrt{(4n^2\pi^2+1)/\rho}$，相应的弯曲曲线为 $y_n(x)=c_2x^{-1/2}\sin(n\pi\ln x)$，$n=1,2,3,\cdots$.


(b)用绘图工具绘出区间 $[1,e]$ 上 $n=1,2,3$ 时的弯曲曲线. 令 $c_2=1$.

混合边界值问题

27. 考虑两个半径分别为 $r=a$，$r=b$ 的同心球体，$a<b$，如图 5.31 所示. 两个球体之间的区域的温度 $u(r)$ 由下面边界值问题决定，

$$r\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0,\quad u(a)=u_0,\quad u(b)=u_1,$$

其中 u_0，u_1 均是常数，解出 $u(r)$.

28. 如图 5.32 所示，圆环内的温度 $u(r)$ 由下面的边界值问题决定：

$$r\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0,\quad u(a)=u_0\quad u(b)=u_1,$$

其中 u_0，u_1 均是常数，证明

$$u(r)=\frac{u_0\ln(r/b)-u_1\ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

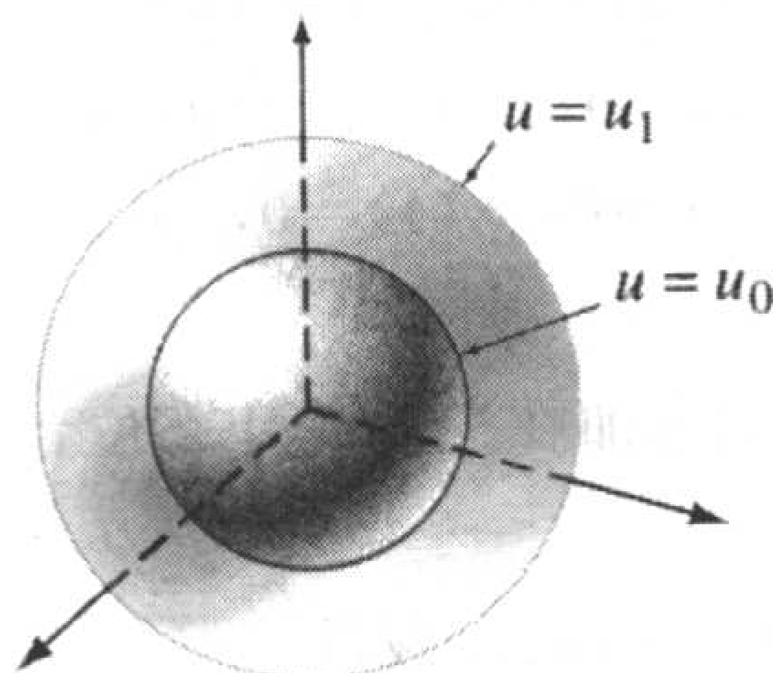


图 5.31

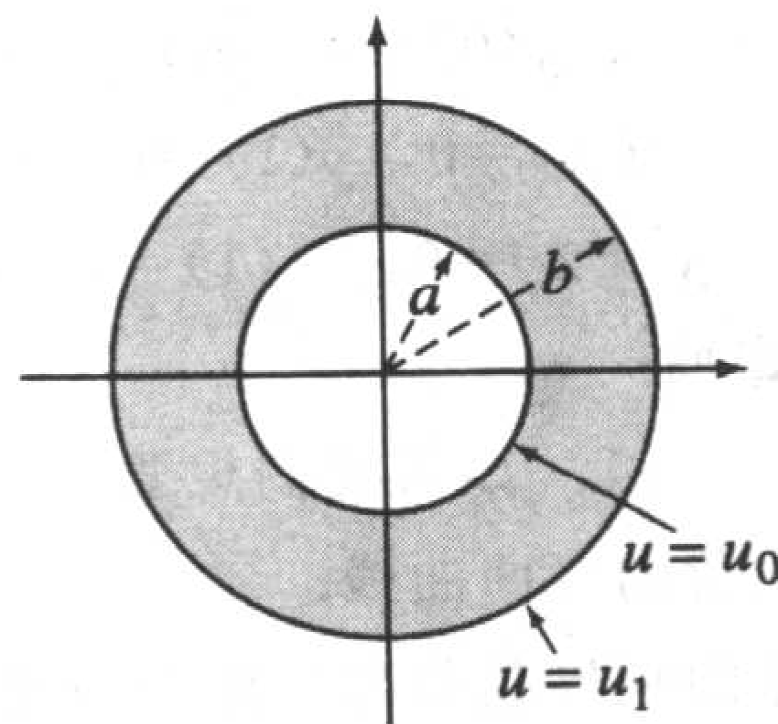


图 5.32

讨论题

29. 考虑边界值问题 $y''+16y=0$，$y(0)=y_0$，$y(\pi/2)=y_1$. 是否能找到 y_0 和 y_1 的值，使问题(a)只有一个非平凡解，(b)不止一个解，(c)无解，(d)有平凡解.

30. 考虑边界值问题 $y''+16y=0$，$y(0)=1$，$y(L)=1$. 是否能找到 $L>0$ 的值使问题(a)只有一个非平凡解，(b)不止一个解，(c)无解，(d)有平凡解.

31. 考虑边界值问题

$$y''+\lambda^2y=0,y(-\pi)=y(\pi),y'(-\pi)=y'(\pi).$$

(a)讨论边界条件的几何解释.

(b)求该问题的特征值和特征函数.


(c)用绘图工具绘出其中的一些特征函数. 证明边界条件的几何解释.

计算机实验作业

32. (a)证明边界值问题

$$y''+\lambda y=0,y(0)=0,y(1)+y'(1)=0$$

的特征值和特征函数分别是 $\lambda_n = x_n{}^2$ 和 $y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x$，其中 x_n，$n=1$，2，3，…是方程 $\tan\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$的连续正根.

(b)用绘图工具说明方程 $\tan x = -x$ 有无穷个根. 解释为什么方程的负根可以忽略. 解释为什么 $\lambda=0$ 不是一个特征值，即使 $x=0$ 是方程的一个根.

(c)用 CAS 的求根程序(或图形计算器)近似求出方程 $\tan x = -x$ 的前四个非负根. 用这些信息近似求出(a)中边界值问题的特征值 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4. 写出相应的特征函数.

5.3 非线性方程

5.1 节(1)的数学模型形如

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + F(x) = 0, \tag{1}$$

其中 $F(x)=kx$. 因为 x 表示质点相对于平衡位置的位移，$F(x)=kx$ 表示虎克定律，即弹簧的回复力总是使得质点向平衡位置运动. 弹簧所施加的力 $F(x)=kx$ 为线性的，则这种弹簧称为线性弹簧(linear spring). 但是弹簧很少有完全是线性的. 根据结构和材料，弹簧可以从柔软到坚硬分类，因此回复力可以依据线性定律在一定范围内变动.

非线性弹簧 在自由运动的情形下，若假设非硬化弹簧有某些非线性特征，也就是(1)中的 $F(x)$与质点相对于平衡位置的位移 x 的三次方成正比，或者说 $F(x)$是位移幂的线性组合，比如 $F(x) = kx + k_1x^3$. 具有如下非线性回复力的弹簧称为非线性弹簧(nonlinear spring)：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx^3 = 0 \text{ 或 } m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx + k_1x^3 = 0. \tag{2}$$

另外，我们也考虑对运动施加阻尼的数学模型，这个模型中阻尼与瞬时速率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 成正比，弹簧回复力仍为线性函数 $F(x)=kx$. 但是这里有几个简单的假设；在更理想化的情形中，阻尼和瞬时速率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的某些次幂成正比. 非线性微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \tag{3}$$

是自由弹簧/质量的运动模型，它带有与速率平方成正比的阻尼. 同样也可以构造出其他模型：线性阻尼和非线性回复力，非线性阻尼和非线性回复力等等. 这一点是物理系统的非线性特征，它可以导出一个非线性数学模型.

注意在(2)中，$F(x)=kx^3$ 和 $F(x)=kx+k_1x^3$ 都是 x 的奇次幂函数. 为了了解为什么回复力的模型都是只含有 x 奇次幂的多项式函数，我们把 F 在平衡位置 $x=0$ 处展开成幂级数：

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots.$$

当位移 x 很小，n 很大时，x^n的值可以忽略. 若略去四次和四次以上的项，则有

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

为了满足在 $x>0(F(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3)$ 和 $-x<0(F(-x)=c_0-c_1x+c_2x^2-c_3x^3)$ 处具有大小相等、方向相反的回复力，则必有 $F(-x)=-F(x)$. 这说明 F 是一个奇函数，所以必有 $c_0=0$，$c_2=0$，因此有 $F(x)=c_1x+c_3x^3$. 若只取级数的前两项，则根据前面的讨论有线性

函数 $F(x)=c_1x$. 为了方便讨论，记 $c_1=k$，$c_2=k_1$. 回复力为如 $F(x)=kx+k_1x^2$ 的混合幂的振动被称为是非对称的.

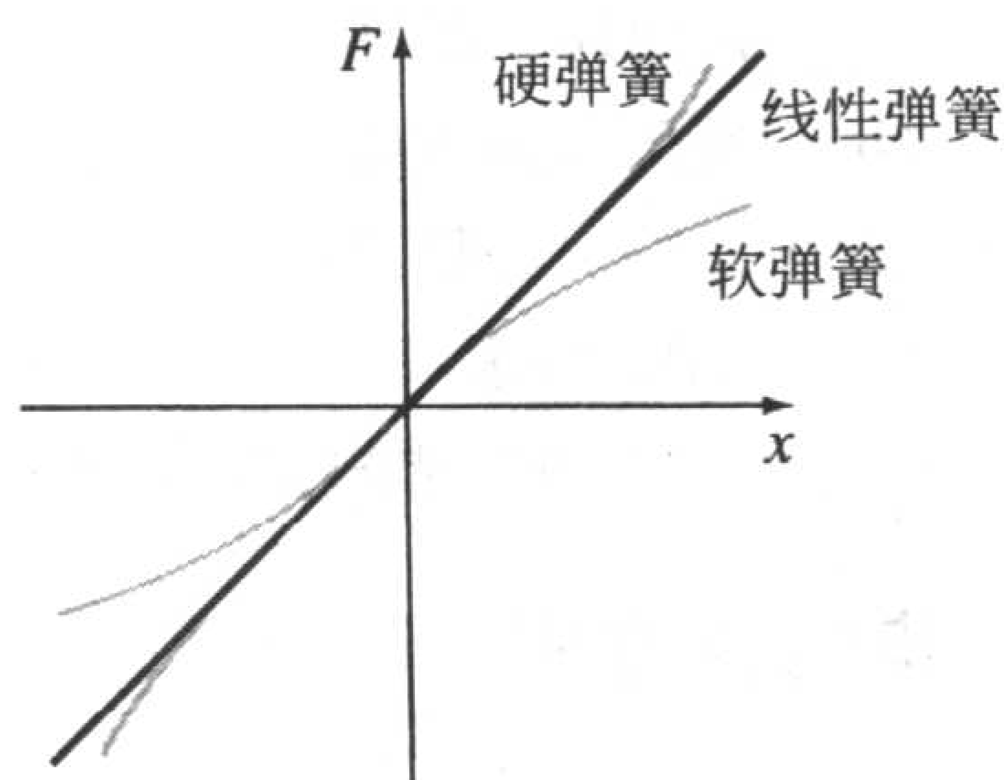


图 5.33

硬弹簧和软弹簧 我们进一步来讨论一下方程(1)，这里令回复力为 $F(x)=kx+k_1x^3$，$k>0$. 若 $k_1>0$ 我们称弹簧是硬的(hard)，若 $k_1<0$ 我们称弹簧是软的(soft). 三种回复力的图形如5.33所示. 下一个例子给出了微分方程 $md^2x/dt^2+kx+k_1x^3=0$，$m>0$，$k>0$ 在这两种情况下的特例.

例 1 硬弹簧和软弹簧的比较

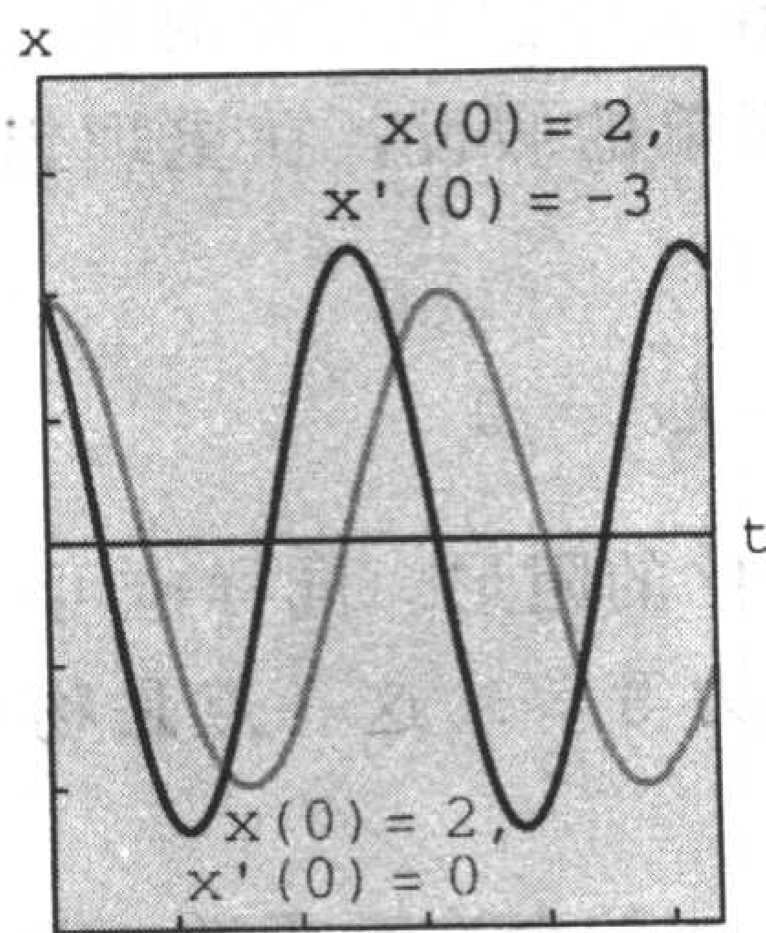
微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x+x^3=0 \tag{4}$$

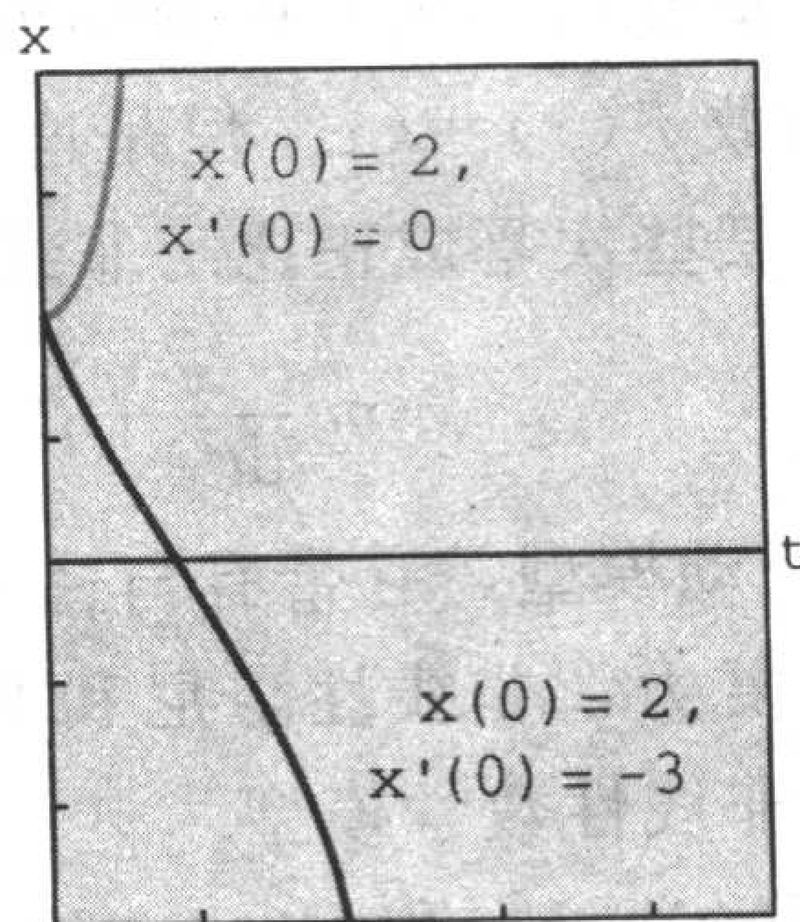
和

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x-x^3=0 \tag{5}$$

是(2)的两个特例，分别是硬弹簧和软弹簧的数学模型. 利用数值求解程序，图5.34(a)给出了(4)的两个解的图像，而图5.34(b)则给出了(5)的两个解的图像. 图中的两条曲线分别表示满足初始条件 $x(0)=2$，$x'(0)=-3$ 以及 $x(0)=2$，$x'(0)=0$ 的解. 这些解表明硬弹簧上质点的运动是振荡的，而在软弹簧上质点的运动不是振荡的. 但是我们在依据解曲线下结论的时候要小心. 这些方程的解曲线更完整的图像可以由定性分析得到，关于这部分的讨论将放在第10章带边界值问题的微分方程.



a) 硬弹簧



b) 软弹簧

图 5.34 ■

非线性钟摆 任何来回摆动的物体都可以称之为物理钟摆(physical pendulum). 简单钟摆(simple pendulum)是物理钟摆的一种情况，它由一个长为 l 的棒和一个系在棒一端质量为 m 的质点组成. 在描述垂直平面内简单钟摆运动的模型中，我们做了一个简单的假设，即棒的质量忽略不计，且没有外力施加于整个系统. 钟摆的角位移 θ 用其偏离垂直方向的角度来度量，

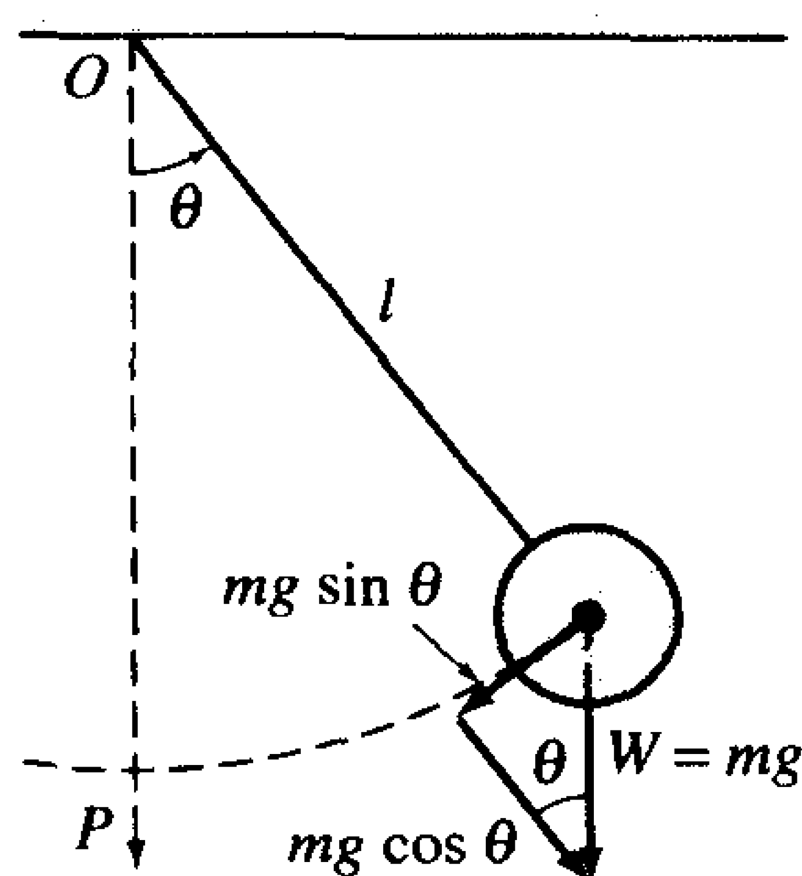


图 5.35

如图 5.35 所示，当钟摆摆到 OP 右边时角位移为正，摆到 OP 左边时角位移为负．半径为 l 的圆弧 s 所对应的圆心角为 θ，则弧长 $s=l\theta$．因此角加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.$$

由牛顿第二定律，有

$$F=ma=ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.$$

从图 5.35 中可以看到，重力 W 沿运动轨迹切线方向的分量为 $mg\sin\theta$．加上方向，这个分力可以写为 $-mg\sin\theta$，因为它是指向左边的，且 $\theta>0$，若指向右边时，$\theta<0$．切线分力的两种不同形式相等，所以可得 $ml\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2=-mg\sin\theta$，或

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0. \tag{6}$$

线性化　因为有 $\sin\theta$ 存在，所以模型(6)是非线性的．为了了解非线性高阶微分方程解的性质，我们有时用某些近似项代替方程中的非线性项．例如，$\sin\theta$ 的麦克劳林级数为

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots,$$

若用 $\sin\theta\approx\theta-\theta^3/6$ 代入方程(6)，则可得 $\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2+(g/l)\theta+(g/6l)\theta^3=0$．观察这个方程，可知它和 $m=1$，$k=g/l$，$k_1=-g/6l$ 的二阶非线性方程(2)类似．但是，若我们假设位移 θ 足够小，可以用 $\sin\theta\approx\theta$ 代入方程，则(6)式可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0. \tag{7}$$

请参考练习 5.3 的习题 22．若令 $\omega^2=g/l$，我们可以把(7)式看成 5.1 节中的微分方程(2)，它是线性弹簧/质量系统无阻尼振动的模型．换句话说，(7)式可以看成 5.2 节例 2 中讨论过的基本线性方程 $y''+\lambda y=0$．因此，我们说方程(7)是方程(6)的线性化．因为(7)式的通解为$\theta(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$，所以此线性化表明，(6)式描述的这种小范围振荡初值问题的钟摆运动是周期性的．

例 2　两个初值问题

图 5.36(a)所示的图形可以用数值求解程序绘出，它表示的是当 $\omega^2=1$ 时方程(6)的解曲线．两条曲线分别表示(6)式满足初始条件 $\theta(0)=1/2$，$\theta'(0)=1/2$ 以及 $\theta(0)=1/2$，$\theta'(0)=2$ 的解．第一条曲线表示的是一个周期解，如图 5.36(b)所示的钟摆，很明显，它的振幅 $A\leqslant1$．第二条曲线表示 θ 随着时间的增加而增加，且 θ 无界，这种情形是，钟摆在某个初始位移处开始运动，当初始速度大到一定程度以后就会超过圆心；也就是会绕着它的轴心转动，如图 5.36(c)所示．在无阻尼的情况下，每种运动的连续性都不确定．■

悬线模型　假设一个悬线在只受自身重力的情况下悬挂在两个固定点之间．如图 5.37(a)所示，这种情形可能是悬挂在两个电线杆之间的电话线．我们的目标是要建立一个数学模型，用来描述这种悬线的性态．

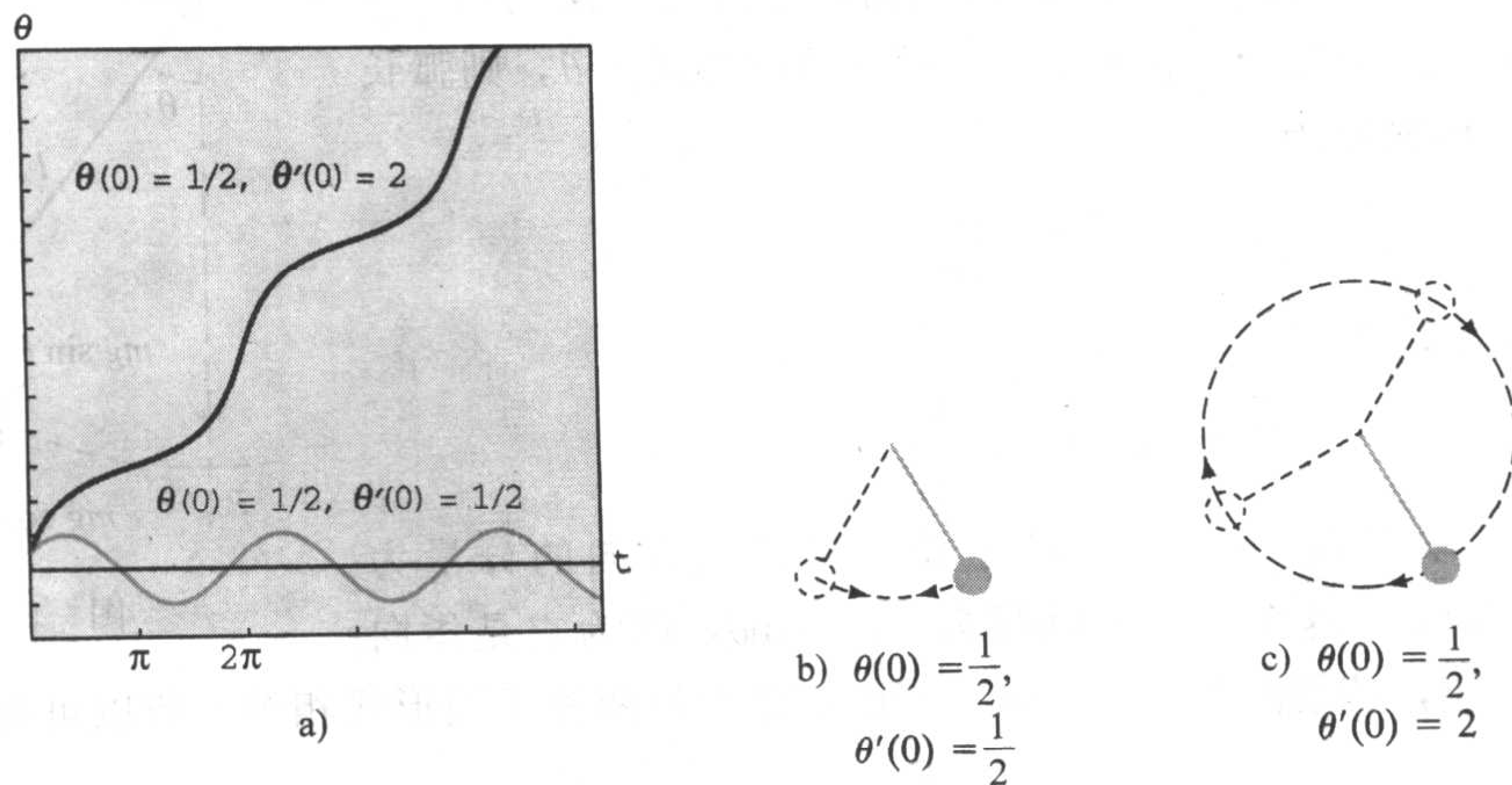


图 5.36

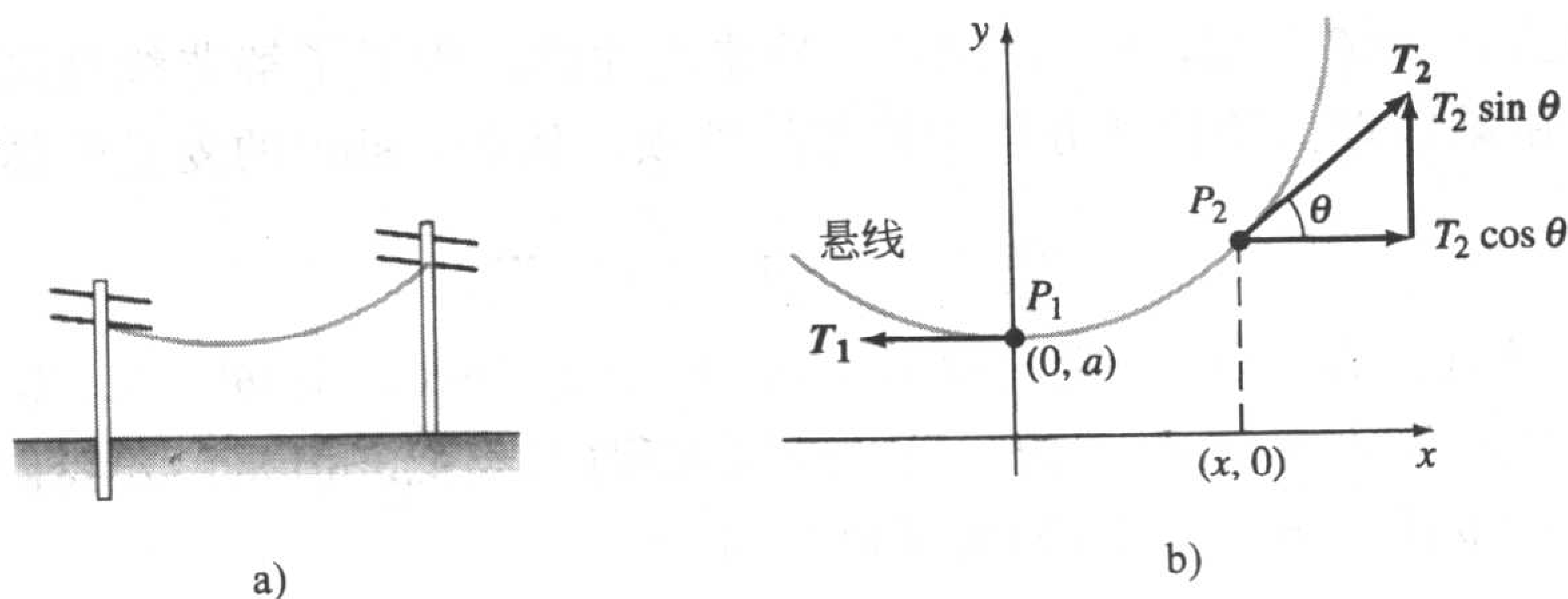


图 5.37

首先，假设图 5.37(b)中的 y 轴通过曲线的最低点 P_1，x 轴在 P_1 点下方 a 单位距离处．我们这里只检验悬线上最低点 P_1 和任一点 P_2 之间的部分．有三种力作用在悬线上：P_1P_2 段所受的重力，在 P_1 点的张力 $\boldsymbol{T}_1$ 和 P_2 点的张力 $\boldsymbol{T}_2$．若 w 是悬线的线性密度(单位为 lb/ft)，s 是 P_1P_2 段的长度，那么这一段的重量为 ws．现在把张力 $\boldsymbol{T}_2$ 分解成水平和垂直方向的分力(都是标量)$T_2\cos\theta$ 和 $T_2\sin\theta$．因为悬线是平衡的，所以有

$$|\boldsymbol{T}_1| = T_1 = T_2\cos\theta, ws = T_2\sin\theta.$$

最后一个等式移项，可得 $\tan\theta = ws/T_1$．然后有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ws}{T_1}. \tag{8}$$

因为 P_1 和 P_2 之间的弧长为

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

由微积分的基本定理，(9)的导数为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}. \tag{10}$$

对(8)求关于 x 的微分，再利用(10)式，可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w}{T_1}\frac{ds}{dx}\text{或}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w}{T_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

由图 5.37 可得的一个结论是，悬线的形状近似于抛物线. 下个例子则说明并不是这样的，悬线的曲线称为悬链线(catenary). 在解这个方程之前，可以观察到非线性二阶微分方程(11)是形如 $F(x, y', y'')=0$ 的方程，这类方程我们在 4.9 节中讨论过. 那么就可以令 $u=y'$，用降阶法解这个方程.

例 3　一个初值问题

从图 5.37(b)中 y 轴的位置可以看出，(11)中第二个方程的初始条件为 $y(0)=a$，$y'(0)=0$. 若令 $u=y'$，则这个方程可以写为 $du/dx=\frac{w}{T_1}\sqrt{1+u^2}$. 利用变量分离法，可由

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{w}{T_1}\int dx\text{ 得到 }\sinh^{-1}u=\frac{w}{T_1}x+c_1.$$

$y'(0)=0$ 与 $u(0)=0$ 等价. 因为 $\sinh^{-1}0=0$，$c_1=0$，所以有 $u=\sinh(wx/T_1)$. 然后对

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\frac{w}{T_1}x$$

两边求积分，可得

$$y=\frac{T_1}{w}\cosh\frac{w}{T_1}x+c_2.$$

若把 $y(0)=a$，$\cosh 0=1$ 代入，可得 $c_2=a-T_1/w$. 因此，悬线的形状可以用下式描述：

$$y=\frac{T_1}{w}\cosh\frac{w}{T_1}x+a-\frac{T_1}{w}.$$

■

在例 3 中，若我们令 $a=T_1/w$，则这个问题的解可以变为双曲余弦函数 $y=(T_1/w)\cosh(wx/T_1)$.

火箭的运动　在 1.3 节中，我们知道质量为 m 的质点在地表附近做自由落体运动的微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\text{ 或简化为}\frac{d^2s}{dt^2}=-g,$$

其中 s 是物体距地表的距离，竖直向上为正方向. 这里有一个基本假设，物体距地表的距离 s 与地球半径 R 相比非常小；也就是说物体与地心的距离 y 可以用 R 来近似. 另一方面，若这个距离 y 与地球半径 R 相比比较大，例如火箭或空间探测器，那我们就要同时用牛顿第二运动定律和万有引力定律来推导因变量为 y 的运动微分方程.

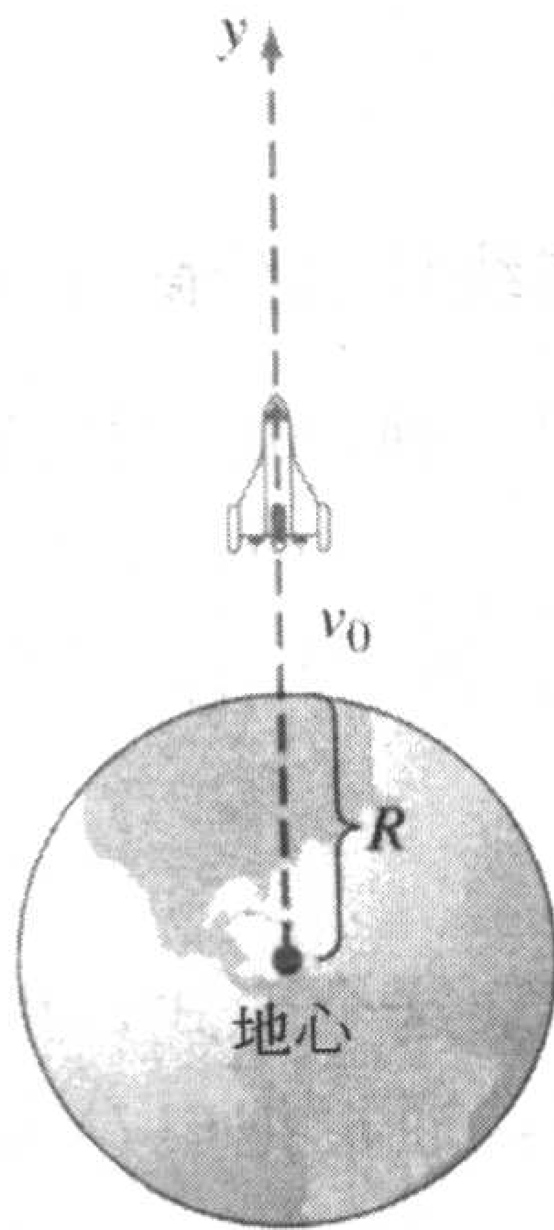


图 5.38

设火箭从地面垂直向上发射，如图 5.38 所示. 若正方向为竖直向上，忽略空气阻力，那么燃料耗尽后的运动微分方程为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-k\frac{Mm}{y^2}\text{ 或}\frac{d^2y}{dt^2}=-k\frac{M}{y^2}, \tag{12}$$

其中 k 为比例常数，y 是地心与火箭的距离，M 是地球的质量，m 是火箭

的质量. 当 $y=R$ 时，有 $kMm/R^2=mg$ 或者 $k=gR^2/M$ 成立. 因此，(12)中的后一个方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=-g\frac{R^2}{y^2}. \tag{13}$$

请参考练习 5.3 中的习题 14.

可变质量 在前面的讨论中，我们给出了火箭在其燃料耗尽后的运动方程，这个模型中将质量 m 看成是一个常量. 当然，在其加速上升阶段，火箭的总质量随着其燃料的消耗而改变. 牛顿第二运动定律描述了当一个质量为 m 的物体以速度 v 通过一个力场时，动量随时间的改变量等于作用在物体上的合外力 F：

$$F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv). \tag{14}$$

若 m 为常数，则由(14)可得一个常用的形式 $F=m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=ma$，其中 a 为加速度. 在下一个例子中，我们将使用(14)形式的牛顿第二定律给出质量 m 可变的运动模型.

例 4 以恒定不变的力向上提链条的运动

一个长为 10ft 的匀质链条松散地盘在地上. 链条的一端被大小为 5lb 的恒力垂直向上提起. 链条每英尺重 1lb. 求 t 时刻端点离地面的距离. 请参考图 1.32 和练习 1.3 的习题 19.

解 用 $x=x(t)$ 表示链条被提的一端在 t 时刻离地面的高度，$v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，正方向为竖直向上. 对于 t 时刻被提起的链条部分有如下数量关系：

重量：$W=(x\text{ft})\cdot(1\text{lb/ft})=x$，

质量：$m=W/g=x/32$，

合外力：$F=5-W=5-x$.

由(14)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{32}v\right)=5-x \text{ 或 } x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=160-32x. \tag{15}$$

因为 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，所以后一个方程可以写为

$$x\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+32x=160. \tag{16}$$

非线性二阶微分方程(16)是形如 $F(x,x',x'')=0$ 的方程，这是 4.9 节中所讨论的两种形式的后一种，可以用降阶法来求解. 为了解(16)，我们回到(15)式，并利用 $v=x'$ 和链式法则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，(15)中第二个方程可以写为

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v^2=160-32x. \tag{17}$$

观察这个形式，发现(17)不如(16)式好处理，因为它不能用第 2 章所讨论的一阶方程分类. 但是，通过把(17)写成微分形式 $M(x,v)\mathrm{d}x+N(x,v)\mathrm{d}v=0$ 可以发现，尽管方程

$$(v^2+32x-160)\mathrm{d}x+xv\mathrm{d}v=0 \tag{18}$$

不是很好解，但是它可以通过积分因子变换成一个易解的方程. 由 $(M_v-N_x)/N=1/x$，我们

可从 2.4 节(13)的积分因子为 $e^{\int dx/x}=e^{\ln x}=x$ 中得到启示，用 $\mu(x)=x$ 乘(18)式两端，所得到的方程就比较好解了.（请读者自行证明.）由 $\partial f/\partial x=xv^2+32x^2-160x$，$\partial f/\partial v=x^2v$，以及 2.4 节所述，我们可以得到

$$\frac{1}{2}x^2v^2+\frac{32}{3}x^3-80x^2=c_1. \tag{19}$$

因为我们假设开始的时候所有的链条都是在地上的，所以有 $x(0)=0$. 把这个条件代入(19)式可得 $c_1=0$. 解方程 $\frac{1}{2}x^2v^2+\frac{32}{3}x^3-80x^2=0$，其中 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t>0$，我们可以得到另外一个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{160-\frac{64}{3}x}.$$

这个方程可以用变量分离法来解. 请读者证明

$$-\frac{3}{32}\left(160-\frac{64}{3}x\right)^{1/2}=t+c_2. \tag{20}$$

由初始条件 $x(0)=0$ 可以解出 $c_2=-3\sqrt{10}/8$. 最后，对(20)式两端求平方，解出 x，可得

$$x(t)=\frac{15}{2}-\frac{15}{2}\left(1-\frac{4\sqrt{10}}{15}t\right)^2. \tag{21}$$

请参考练习 5.3 的习题 15. ■

练习 5.3

非线性弹簧

在习题 1～4 中，所给出的微分方程是无阻尼弹簧/质量模型，其中如(1)的回复力 $F(x)$ 是非线性的. 用数值求解程序绘出每个方程满足初始条件的解曲线. 如果解是周期性的，用解曲线计算出振荡的周期 T.

1. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x^3=0$，$x(0)=1$，$x'(0)=1$；$x(0)=\frac{1}{2}$，$x'(0)=-1$
2. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4x-16x^3=0$，$x(0)=1$，$x'(0)=1$；$x(0)=-2$，$x'(0)=2$
3. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2x-x^2=0$，$x(0)=1$，$x'(0)=1$；$x(0)=\frac{3}{2}$，$x'(0)=-1$
4. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+xe^{0.01x}=0$，$x(0)=1$，$x'(0)=1$；$x(0)=3$，$x'(0)=-1$
5. 在习题 3 中，假定质点从初始位置 $x(0)=1$ 处以初始速度 $x'(0)=x_1$ 开始释放. 用数值求解程序计算出质点做非周期运动时 $|x_1|$ 的最小值.
6. 在习题 3 中，假定质点从初始位置 $x(0)=x_0$ 处以初始速度 $x'(0)=1$ 开始释放. 用数值求解程序计算出运动振荡的区间 $a\leqslant x_0\leqslant b$.
7. 对习题 4 中的微分方程做线性化.
8. 考虑无阻尼非线性弹簧/质量系统的模型，由下式给出：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+8x-6x^3+x^5=0.$$

用数值求解程序讨论系统对应于不同初始条件的振荡特性：

$x(0)=1, x'(0)=1$； $x(0)=-2, x'(0)=0.5$； $x(0)=\sqrt{2}, x'(0)=1$；

$x(0)=2, x'(0)=0.5$； $x(0)=2, x'(0)=0$； $x(0)=-\sqrt{2}, x'(0)=-1$.

在习题 9 和 10 中，所给出的微分方程是阻尼非线性弹簧/质量系统的模型. 给出当 $t\to+\infty$ 时每个系统的性态. 用数值求解程序绘出每个方程满足初始条件的解曲线：

9. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x+x^3=0$，$x(0)=-3$，$x'(0)=4$；$x(0)=0$，$x'(0)=-8$

10. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x-x^3=0$，$x(0)=0$，$x'(0)=\frac{3}{2}$；$x(0)=-1$，$x'(0)=1$

11. 无阻尼周期受迫弹簧/质量系统的模型 $mx''+kx+k_1x^3=F_0\cos\omega t$ 被称为 Duffing 微分方程. 考虑初值问题 $x''+x+k_1x^3=5\cos t$，$x(0)=1$，$x'(0)=0$. 用数值求解程序考察 $k_1>0$ 时在 $k_1=0.01$ 到 $k_1=100$ 之间的系统特性. 解释所得的结论.

12. (a)求 $k_1<0$ 的值，使得习题 11 中的系统是振荡的.

(b)考虑初值问题 $x''+x+k_1x^3=\cos\frac{3}{2}t$，$x(0)=0$，$x'(0)=0$. 求 $k_1<0$ 的值，使得系统是振荡的.

非线性钟摆

13. 考虑自由阻尼非线性钟摆的模型，由下式给出

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\lambda\frac{d\theta}{dt}+\omega^2\sin\theta=0.$$

用数值求解程序考察运动分别在 $\lambda^2-\omega^2>0$ 和 $\lambda^2-\omega^2<0$ 两种情况下对应的在 5.1 节所讨论的过阻尼和无阻尼的情况. 选择合适的初值条件和 λ，ω 的值.

火箭的运动

14. (a)把 $v=dy/dt$ 代入(13)，解出用 y 表示的 v. 假设火箭在燃料燃尽时的速度为 $v=v_0$，在这一瞬间 $y\approx R$，证明积分常数 c 的近似值是 $c=-gR+\frac{1}{2}v_0^2$.

(b)用(a)中解出的 v 证明火箭的脱离速度为 $v_0=\sqrt{2gR}$. [提示：令 $y\to+\infty$，假设 $v>0$ 对所有的 t 都成立.]

(c)(b)中的结果对太阳系内的任何物体都适用. 用 $g=32\text{ft/s}^2$ 和 $R=4000\text{mi}$，证明从地球脱离的速度(近似)为 $v_0=25\ 000\text{mi/h}$.

(d)若重力加速度为 $0.165g$，$R=1080\text{mi}$，求从月球脱离的速度.

可变质量

15. (a)在例 4 中，以直观来看用 5lb 的常力可以提起多少链条?

(b)链条的初始速率是多少?

(c)用绘图工具绘出例 4 中(21)的解 $x(t)$. 解的定义区间是什么? 链条实际上被提起多少? 解释这个答案与(a)中所得到的答案有何不同.

16. 一个长 L 的匀质链条被竖直提起，其长度用英尺度量，使得低端刚好接触地面. 链条重为 2lb/ft. 上端在 $t=0$ 时刻由静止释放，链条垂直落下. 请见图 1.33. 正如我们在练习 1.3 的习题 20 中所看到的，若 $x(t)$ 表示链条在 t 时刻时落在地面上的长度，空气阻力忽略不计，正方向取垂直向下，那么

$$(L-x)\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=Lg.$$

(a)解出用 x 表示的 v，再解出用 t 表示的 x，然后用 t 表示 v.

(b)求链条完全落到地面上需要多少时间.

(c)由(a)中模型得到的链条上端接触地面时的速度是多少?

17. 一个长 8ft 的匀质链条一部分松散地缠绕在水平平台边缘的钉子上，链条余下的部分静止悬挂在平台的边缘. 假设悬垂的部分长度为 3ft，链条重 2 lb/ft. 在 $t=0$ 时刻，悬垂的部分由于受重力影响开始运动，落下平台.

(a)忽略任何阻力，并假设正方向为垂直向下. 如果 $x(t)$ 表示在 $t>0$ 时刻时平台外面悬垂部分的长度，$v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，求一个关于 v 和 x 的微分方程.

(b)如例 4 所做的，通过求积分因子，解出用 x 表示的 v.



(c)用 x 表示出时间 t，并用 CAS 求链条落下 7ft 时的时间.

18. 一个长 8ft 的匀质链条在一个水平高台上拉直，链条剩下的部分悬挂在平台外面，如图 5.39 所示. 假设悬挂在外面的部分长度为 3ft，链条重 2 lb/ft. 链条的末端在平台上被拉着，在 $t=0$ 时刻由静止释放，链条在悬挂部分的重力影响下开始滑落平台.

(a)忽略任何阻力，假设正方向向下. 如果 $x(t)$ 表示 $t>0$ 时刻链条悬挂在平台外面的长度，$v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，证明 v 关于 x 的微分方程为 $v\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=4x$.

(b)解出用 x 表示的 v，然后再解出用 t 表示的 x，最后用 t 表示出 v.

(c)计算链条剩下的部分滑离平台需要多少时间. 求出链条末端离开平台边缘时的速度.

(d)假设链条长 Lft，总重 Wlb. 如果 $t=0$ 时悬挂的部分长为 x_0 ft，那么证明链条末端离开平台边缘时的速度是 $v(L)=\sqrt{\frac{g}{L}(L^2-x_0{}^2)}$.

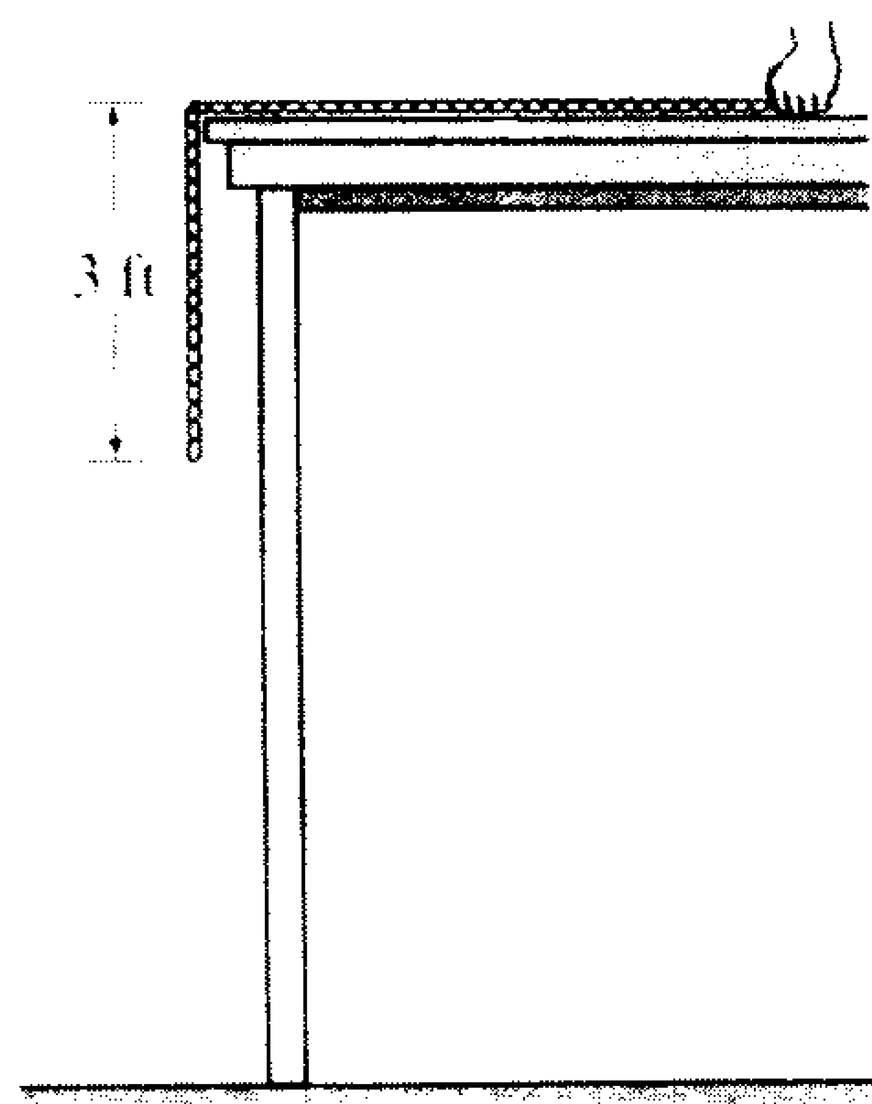


图 5.39

混合非线性模型

19. 在海军的军事演习中，一艘潜艇 S_2 追另一艘舰艇 S_1，如图 5.40 所示. 舰艇 S_1 在 $t=0$ 时刻离开点(0, 0)，沿着直线以常速率 v_1 运动(y 轴). 舰艇 S_1 始终在潜艇 S_2 的视线范围内，图中用虚线 L 表示，同时沿着曲线 C 以常速率 v_2 运动. 假设 S_2 在 $t=0$ 时刻开始在点(a, 0)，$a>0$，L 与 C 相切. 建立一个描述曲线 C 的数学模型. 求出微分方程的显式解. 方便起见，定义 $r=v_1/v_2$. 求 S_1 和 S_2 的路径在 $r<1$, $r>1$ 和 $r=1$ 的情况下是否相交. [提示：$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$，其中 s 是沿 C 的弧长.]

20. 在另外一个海军演习中，毁灭者 S_1 追逐一艘潜艇 S_2. 假设 S_1 在 x 轴上的(9, 0)点探测到 S_2 处在(0, 0)的位置，同时 S_2 也探测到 S_1. 毁灭者 S_1 的舰长假设潜艇马上开始逃离，并推测它很可能从一个新的直线路径 L 逃离，如图 5.41 所示. 当 S_1 在(3, 0)点时，它开始改变朝着原点的直线航行而改成曲线 C 的路线. 假设毁灭者的速度恒为 30mi/h，潜艇的速度恒为 15mi/h.

(a)解释为什么舰长一定要等到 S_1 到达(3, 0)点时才下令沿曲线 C 航行.

(b)用极坐标从方程 $r=f(\theta)$ 中解出曲线 C.

(c)解释为什么从开始探测到毁灭者拦截下潜艇的时间一定小于 $\frac{1}{5}(1+e^{2\pi\sqrt{3}})$.

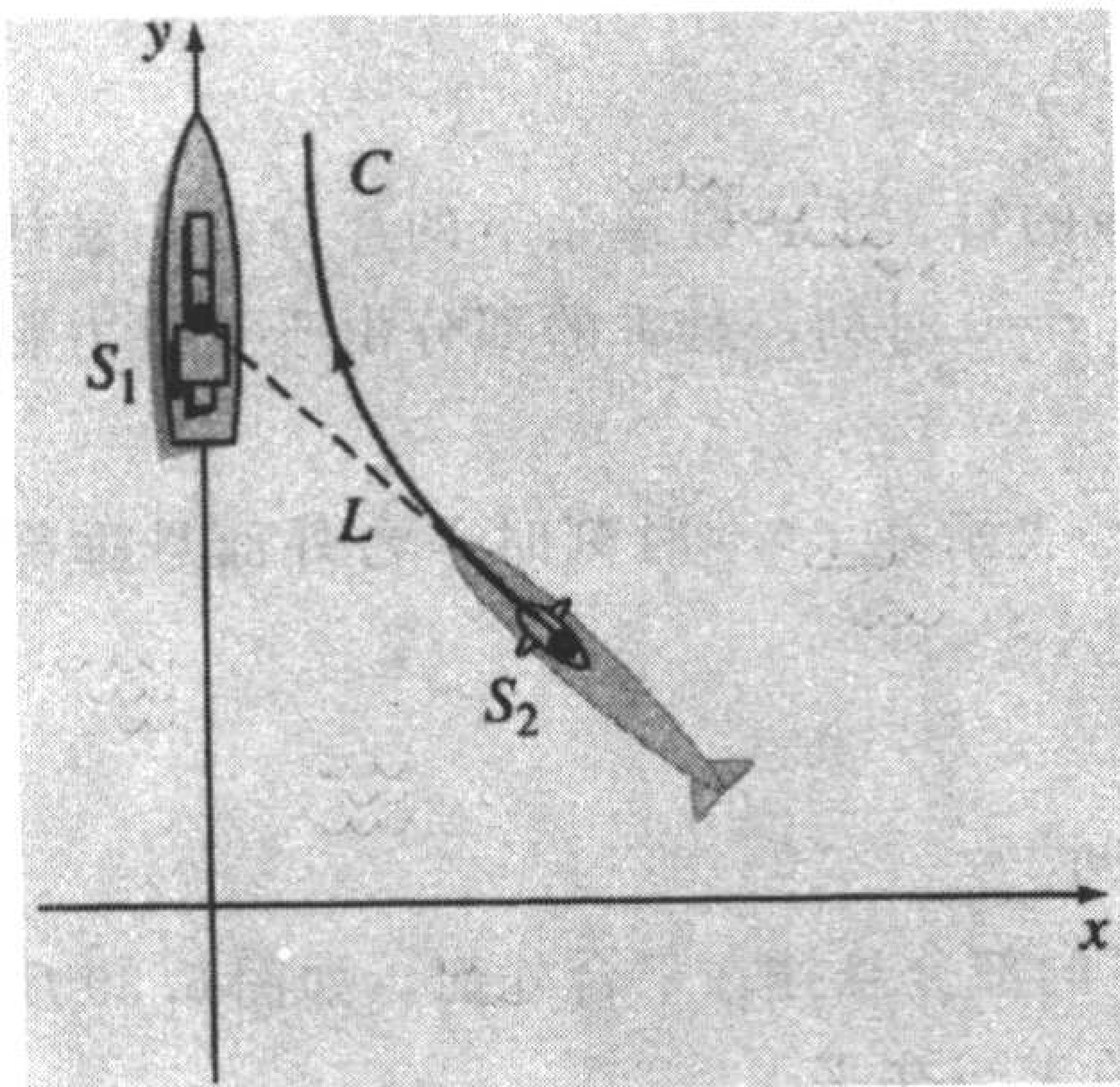


图 5.40

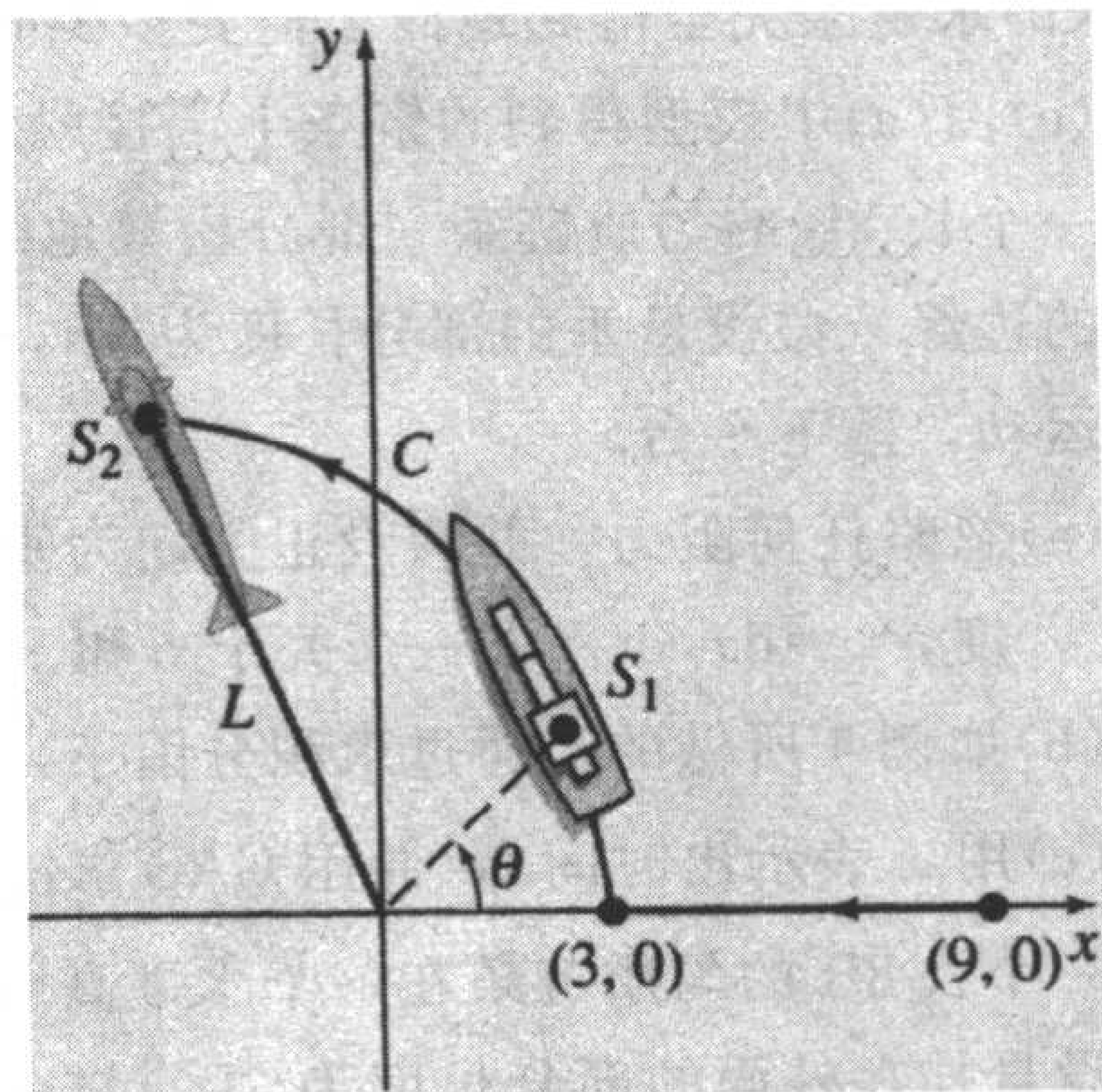


图 5.41

讨论题

21. 讨论为什么方程(3)中的阻尼项可以写成

$$\beta\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\text{来代替}\beta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

22. (a)用计算器求一个区间 $0\leqslant\theta<\theta_1$，这里 θ 的单位是弧度，可以认为 $\sin\theta\approx\theta$ 是一个很好的近似. 用绘图工具在同一坐标系下 $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ 区间上绘出 $y=x$，$y=\sin x$ 的图像. 图像和用计算器得到的结果是一致的吗?

(b)用数值求解程序绘出初值问题的解曲线:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\sin\theta=0,\theta(0)=\theta_0,\theta'(0)=0\text{ 及 }\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\theta=0,\theta(0)=\theta_0,\theta'(0)=0$$

这里 θ 取(a)中区间 $0\leqslant\theta<\theta_1$ 上的几个值. 然后，绘出 θ_0 在 $\theta_0>\theta_1$ 上取值的初值问题的解曲线.

23. (a)考虑一个非线性钟摆，它振荡的过程用(6)式定义. 用数值求解程序求出长 l 的钟摆在地球上是否比在月球上摆动得快. 用同样的初值条件，但是对这些初值条件有所选择，使得钟摆可以保持来回振荡.

(b)钟摆在(a)中的什么地方有更大的摆幅?

(c)对线性模型(7)来说，从(a)和(b)得出的结论一致吗?

计算机实验作业

24. 考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\sin\theta=0,\theta(0)=\frac{\pi}{12},\theta'(0)=-\frac{1}{3}$$

这是一个非线性钟摆的模型. 因为不能解出这个微分方程，所以我们发现这个问题没有显式解. 我们想求出时间 $t_1>0$，在此时刻图 5.35 中的钟摆从初始位置第一次到达右边位置 OP，也就是 $\theta(t)=0$ 的第一个正根. 在这个问题和下一个问题中我们将给出几种求解方法.

(a)求解线性问题 $\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2+\theta=0$，$\theta(0)=\pi/12$，$\theta'(0)=-\dfrac{1}{3}$，近似求出 t_1.

(b)用 4.9 节例 3 的方法求出非线性初值问题的泰勒级数解 $\theta(t)$ 在中心 $t=0$ 处展开的前四个非零项. 给出所有系数的精确值.

(c)用(b)中泰勒级数的前两项近似求出 t_1.

(d)用(b)中泰勒级数的前三项近似求出 t_1.

(e)用 CAS 的求根程序(或图形计算器)以及(b)中泰勒级数的前四项近似求出 t_1.

(f)在这部分中，我们将介绍用 Mathematica 中的命令来近似求解根 t_1. 这个过程可以很容易修改一下，使得 $\theta(t)=0$ 的任何根都可以用数值近似.(如果没有 Mathematica，可以使用 CAS 相应的语句.)按照这个过程，依次执行下面的命令：

```
sol=NDSolve[{y''[t]+Sin[y[t]]==0, y[0]==Pi/12, y'[0]==-1/3},
            y, {t, 0, 5}]//Flatten
solution=y[t]/. sol
Clear[y]
y[t_]: =Evaluate[solution]
y[t]
gr1=Plot[y[t], {t, 0, 5}]
root=FindRoot[y[t]==0, {t, 1}]
```

(g)修改(f)中的语句，求出 $\theta(t)=0$ 接下来的两个正根.

25. 考虑一个钟摆，从初始位移 θ_0 弧度处由静止释放. 解初始条件为 $\theta(0)=\theta_0$，$\theta'(0)=0$ 的线性模型(7)，其中 $\theta(t)=\theta_0\cos\sqrt{g/l}\,t$. 由模型得到的振荡周期是大家所熟悉的公式 $T=2\pi/\sqrt{g/l}=2\pi\sqrt{l/g}$. 有意思的是关于 T 的这个公式与初始位移 θ_0 无关. 也就是说，由线性模型所得到的钟摆从初始位移 $\theta_0=\pi/2(=90°)$ 摆动到 $-\pi/2$ 所用的时间和从 $\theta_0=\pi/360(=0.5°)$ 摆动到 $-\pi/360$ 所用的时间相等. 直观上感觉这个结果是不合理的；实际周期必须和 θ_0 有关.

如果我们假设 $g=32\text{ft/s}^2$，$l=32\text{ft}$，那么线性模型的振荡周期为 $T=2\pi\text{s}$. 把这个结果和用非线性模型当 $\theta_0=\pi/4$ 时得到的结果加以比较. 用数值求解程序可以产生硬数据，近似求出

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\sin\theta=0,\theta(0)=\frac{\pi}{4},\theta(0)=0$$

在区间 $0\leqslant t\leqslant 2$ 上的解. 正如习题 24 所示，如果用 t_1 表示钟摆第一次到达图 5.35 中 OP 位置的时间，那么非线性钟摆的周期为 $4t_1$. 这里有另外一个解方程 $\theta(t)=0$ 的方法. $t=0$ 时刻开始进行小步长的实验，随着时间的增加，直到 $t=2$. 从硬数据中可以观察到当 $\theta(t)$ 第一次从正变为负时的时间 t_1. 用 t_1 的值求出非线性钟摆周期的真实值. 计算用 $T=2\pi$ 估计的周期的相对百分比误差.

第 5 章复习题

不看教材的内容回答习题 1～8 的问题. 填空或判断对错.

1. 如果 10lb 的重物使得弹簧伸长了 2.5ft，那么 32lb 的重物可以使它伸长________ft.
2. 一个 8lb 的重物连接在弹性系数为 6.25 lb/ft 的弹簧上做简谐振动，周期为________s.
3. 一个重物连接在弹簧上的微分方程为 $x''+16x=0$. 如果在 $t=0$ 时刻，重物从平衡位置上方 1m 处由静止释放，同时具有向下 3 m/s 的初速度，那么这个振动的振幅是________m.
4. 完全共振在有阻尼的情况下不会发生.
5. 在有阻尼的情况下，连接在弹簧上的重物当 $t\to+\infty$ 时的位移总是接近于零.
6. 弹簧上重物的运动受到临界阻尼的作用，可能通过平衡位置两次.
7. 在临界阻尼的作用下，阻尼的任何增加量都会导致产生一个________系统.
8. 如果简谐振动用 $x=(\sqrt{2}/2)\sin(2t+\phi)$ 来刻划，那么当 $x(0)=-1/2$ 和 $x'(0)=1$ 时，相角 ϕ 是________.

9. 一个自由无阻尼弹簧/质量系统振荡的周期为 3s. 当一个 8lb 的重物从弹簧上移除后，系统的运动周期变为 2s. 那么刚开始在弹簧上有多少重物?
10. 一个 12lb 的重物使得弹簧伸长了 2ft. 这个重物从平衡位置下方 1ft 处释放，具有向上的初速度 4ft/s.
 (a)求描述这个简谐运动的方程.
 (b)运动的振幅、周期和频率分别是多少?
 (c)在什么时刻重物回到平衡位置下方 1ft 处?
 (d)在什么时刻重物向上通过平衡位置? 什么时候向下通过平衡位置?
 (e)重物在 $t=3\pi/16$s 时的速度是多少?
 (f)速度在什么时候为零?
11. 一个 2lb 的力使得弹簧伸长 1ft. 一端固定，一个 8lb 的重物固定在另一端. 系统平放在桌面上，它对重物施加的摩擦力等于 3/2 倍的瞬时速度. 初始时刻重物在平衡位置上方 4in 处由静止释放. 如果运动发生在水平直线也就是 x 轴上，求运动的方程.
12. 一个 32lb 的重物使得弹簧伸长了 6ft. 重物在介质中运动，介质所施加的阻力等于 β 倍的瞬时速度. 求振荡运动系统的 β 值.
13. 一个弹簧系数为 $k=2$ 的弹簧，悬挂在液体中，液体所施加的阻力等于 4 倍的瞬时速度. 如果质点 m 悬挂在弹簧上，那么求自由运动是非振荡运动时的 m 值.
14. 连接在弹簧上重物的垂直运动可以用初值问题

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0, x(0)=4, x'(0)=2.$$

 来描述. 求最大垂直位移.
15. 一个 4lb 的重物使得弹簧伸长了 18in. 一个等于 $f(t)=\cos\gamma t+\sin\gamma t$ 的周期力从 $t=0$ 时刻开始作用在系统上. 不存在阻尼力，当 γ 为多少时系统处于完全共振状态?
16. 求 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2+2\lambda\mathrm{d}x/\mathrm{d}t+\omega^2x=A$ 的一个特解，其中 A 是一个常力.
17. 一个 4lb 的重物悬挂在弹性系数为 3 lb/ft 的弹簧上. 整个系统浸在一种液体中，这种液体施加的阻力数值上等于瞬时速度. 从 $t=0$ 时刻开始，一个等于 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$的外力作用在系统上. 若重物从平衡位置下方 2ft 处由静止释放，求运动方程.
18. (a)两个弹簧串联在一起，如图 5.42 所示. 如果每个弹簧的质量可以忽略，证明有效弹簧系数 k 为 $1/k=1/k_1+1/k_2$.
 (b)一个 Wlb 的重物使得一个弹簧伸长了 1/2ft，使另外一个弹簧伸长了 1/4ft. 两个弹簧的连接如图所示，重物 W 连接在第二个弹簧上. 假设运动是自由的，不存在阻尼. 如果重物从平衡位置下方 1ft 处释放，具有向下 $\frac{2}{3}$ ft/s 的初速度，求运动方程.
 (c)证明重物的最大速度为$\frac{2}{3}\sqrt{3g+1}$.

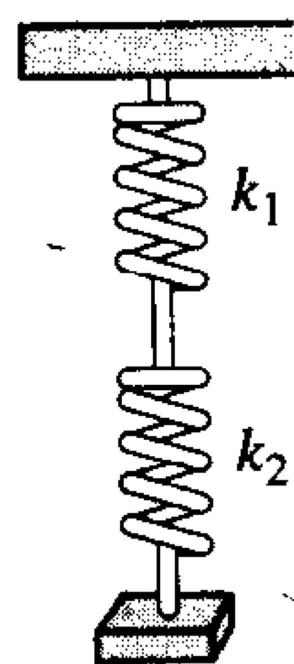


图 5.42

19. 一个串联电路的感应系数为 $L=1$h，电容量 $C=10^{-4}$f，电动势 $E(t)=100\sin 50t$V. 初始电荷 q 和电流 i 都为零.
 (a)求任何时刻电荷量的方程.
 (b)求任何时刻电流的方程.
 (c)求电容器上电量为零的时刻.
20. (a)证明 LRC 串联电路中电流 $i(t)$满足微分方程 $L\mathrm{d}^2i/\mathrm{d}t^2+R\mathrm{d}i/\mathrm{d}t+1/Ci=E'(t)$，其中 $E'(t)$表示 $E(t)$的导数.

(b)两个初始条件 $i(0)$ 和 $i'(0)$ 赋给(a)中的微分方程. 如果 $i(0)=i_0$, $q(0)=q_0$, 那么 $i'(0)$ 是多少?

21. 考虑边界值问题 $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y(2\pi)$, $y'(0)=y'(2\pi)$. 证明除了 $\lambda=0$ 外, 相应于每个特征值有两个独立的特征函数.

22. 一个珠子沿着长为 L 的无摩擦杆滑动. 这个杆在垂直平面以常角速度 ω 绕着杆中部的固定点 P 旋转, 但这个轴可以让珠子在整个杆的长度内运动. 令 $r(t)$ 表示珠子相对于这个旋转坐标系统的位置, 如图 5.43 所示. 为了应用牛顿第二运动定律, 作用在珠子上的净力应等于所有实际外力(在本例中, 外力是重力)和惯性力(地球自转偏向力、横向力和离心力)之和. 数学有点复杂, 所以我们只是给出关于 r 的微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}=m\omega^2 r-mg\sin(\omega t).$$

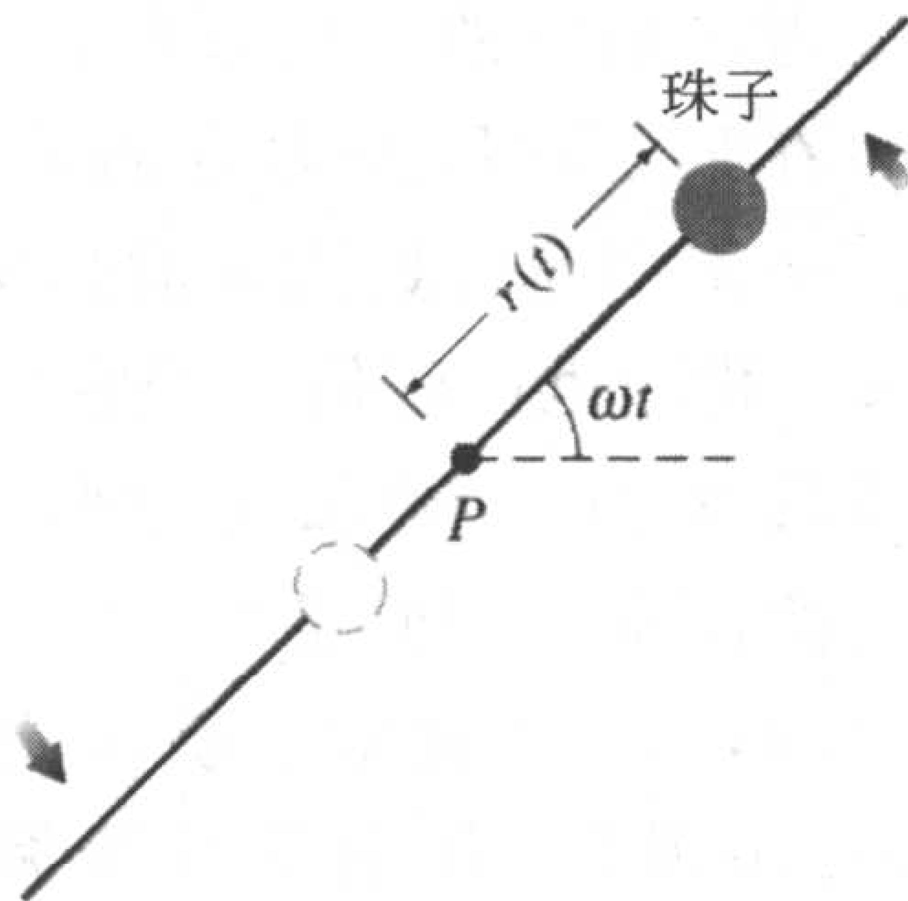


图 5.43

(a)解约束条件为 $r(0)=r_0$, $r'(0)=v_0$ 的微分方程.

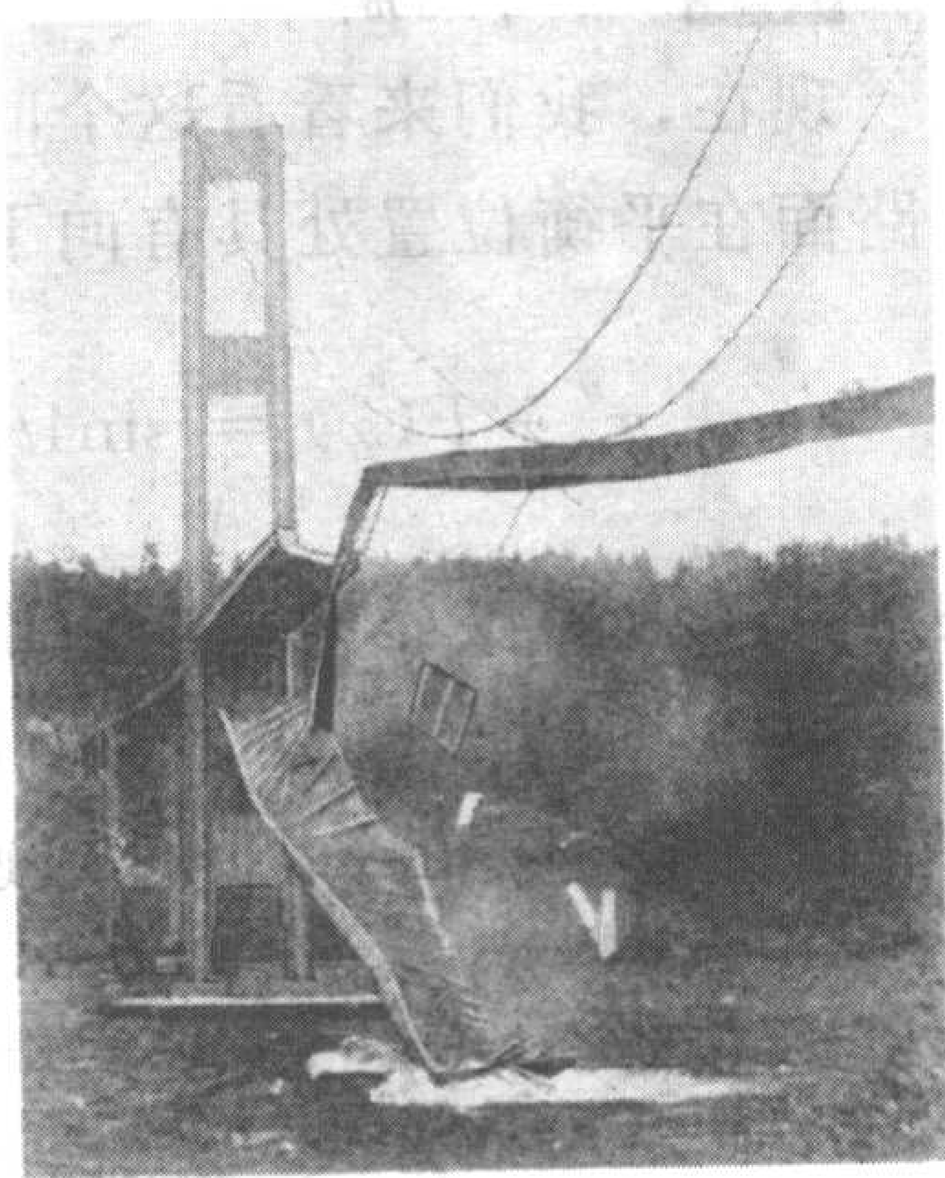
(b)求使得珠子做简谐振动的初始条件. 使得珠子做简谐振动的最小的 L 是多少?

(c)对于(b)以外的初始条件, 这个珠子最终都会飞出杆. 用(a)中的解 $r(t)$ 解释之.

(d)设 $\omega=1\mathrm{rad/s}$. 用绘图工具绘出初始条件为 $r(0)=0$, $r'(0)=v_0$ 的解 $r(t)$ 的图像, 其中 v_0 分别为 0, 10, 15, 16, 16.1, 17.

(e)设杆的长度 $L=40\mathrm{ft}$. 对(d)中的每一组初始条件, 用求根程序求解珠子停留在杆上的总时间.

项目模型: 塔科马海峡吊桥的坍塌



1940 年夏天, 塔科马海峡吊桥正式完工. 几乎就在同时, 人们注意到有时候风力会引起路基大范围的垂直振荡. 这座吊桥以振荡而闻名, 人们纷纷前来观看它, 有时还会在上面走一走. 终于, 在 1940 年 11 月 7 日的一场风暴中, 桥振荡的幅度超过了以往所看到的幅度. 不久之后, 在向下看路面时, 垂直振荡变成了扭转. 整个跨度最终被强烈的振荡给震断了, 吊桥坍塌了.

新的模型 近五十年来, 关于这个桥坍塌的原因, 一种被普遍接受的假设是由共振引起的. 请见图 1. 但是如从 5.1 节方程(31)中所看到的, 共振是一种线性现象. 此外, 还有一个共振发生的条件, 就是外力函数的频率与桥的固有频率恰好一致. 更深一步地说, 整个系统必须是绝对无阻尼的. 那么, 丝毫不奇怪共振不是桥坍塌的罪魁祸首. 如果不是共振, 那么是什么原因引起了桥的坍塌呢? 在最近的研究中, 数学家 Lazer 和 McKenna 注意到了非线性效果才是引起吊桥大幅振动的主要原因, 而不是线性共振.[⊖] 尽管这个理论包括了偏微分方程, 但是可以构造出一个可以推得出非线性常微分方程的简化模型. 这

⊖ A. C. Lazer and P. J. McKenna, Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis, *SIAM Review* 32 (1990 年 12 月): 537-578.

个模型和 Lazer 和 McKenna 的模型不完全相同，但是可以推出一个类似的微分方程. 这个例子是全新的，它用另一种方法说明了振幅是可以增加的.

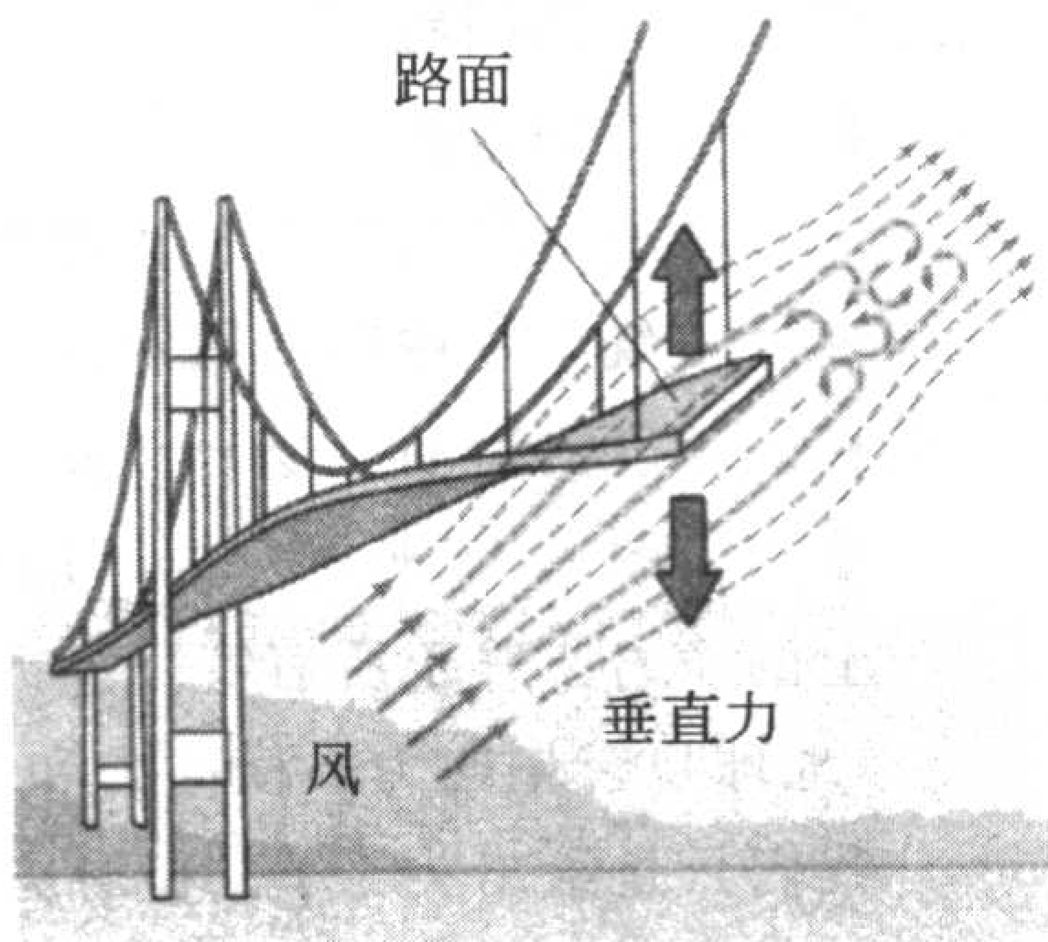


图 1

考虑吊桥的一根垂直缆绳. 我们假设它如同一根弹簧，但是在张力和压缩力方面的特征不同. 当缆绳伸长时，它如同一根虎克常数为 b 的弹簧，但是当它压缩时，虎克常数为 a. 我们也可以假设当它压缩时，缆绳对路面施加的力比它伸长时对路面施加的力小，因此有 $0<a<b$. 令连到缆绳上的路面垂直弯曲量是 $x(t)$(正方向是垂直向下)，这里 t 表示时间，$x=0$ 表示平衡位置. 当 $x\geqslant 0$ 时路面在外力(von Karman 漩涡)作用下开始振荡，缆绳具有向上的回复力，大小等于 bx，$x<0$ 时产生向下的回复力，大小等于 ax. 在无阻尼的情况下，这个受迫运动(请见 5.3 节的(1))的非线性模型为

$$mx''+F(x)=g(t), \tag{1}$$

这里 $F(x)$是分段函数

$$F(x)=\begin{cases} bx, & x\geqslant 0 \\ ax, & x<0 \end{cases},$$

$g(t)$是外力，m 是路面的质量. 注意微分方程(1)在任何 x 不改变符号的区间上都是线性的.

例 1 **(1)的解**

现在，我们来看看这个问题的解是怎样的. 设 $m=1$，$b=4$，$a=1$，$g(t)=\sin 4t$，初始时刻路面在平衡位置处具有向下的速度 $\alpha>0$. 这个初值问题为

$$x''+F(x)=\sin 4t, x(0)=0, x'(0)=\alpha, \text{其中 } F(x)=\begin{cases} 4x, & x\geqslant 0 \\ x, & x<0 \end{cases}. \tag{2}$$

注意，外力函数 g 的频率大于缆绳张力和压缩力的固有频率，因此不会有共振现象发生.

请读者证明下面求解(2)在区间$[0, 3\pi]$上的每一步.

因为具有正的向下的初速度以及正向外力，我们先解 $x\geqslant 0$ 时的(2). $x''+4x=\sin 4t$，$x(0)=0$，$x'(0)=\alpha$ 的解是

$$x(t)=\sin 2t\left[\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}\cos 2t\right]. \tag{3}$$

注意在(3)中，令 $x(t)$等于零的 t 的最小正值为 $t=\pi/2$. 在这个时刻，$x'(\pi/2)=-(\alpha+2/3)<0$. 也就是路面向上通过平衡位置. 因此对 $x<0$ 我们可以解新的初值问题 $x''+x=\sin 4t$，$x(\pi/2)=0$，$x'(\pi/2)=-(\alpha+2/3)$. 这个问题的解为

$$x(t)=\cos t\left[\left(\alpha+\frac{2}{5}\right)-\frac{4}{15}\sin t\cos 2t\right]. \tag{4}$$

然后，由(4)知令 $x(t)$等于零的下一个 t 值为 $t=3\pi/2$. 在这个时刻，$x'(3\pi/2)=\alpha+\dfrac{2}{15}>0$.

用这种方法，我们可以得出结论，路面在时间区间[0，3π/2]上完成一个周期的振动：路面从平衡位置开始具有正向初速度向下运动，然后回来具有负向速度通过平衡位置，然后再向下具有正向速度返回平衡位置．这种模式持续下去，每个周期具有 3π/2 个时间单位．我们把(2)的解在两个周期上的情况归纳如下：

$$\text{第一周期}\quad x(t)=\begin{cases}\sin 2t\left[\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}\cos 2t\right], & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \cos t\left[\left(\alpha+\frac{2}{5}\right)-\frac{4}{15}\sin t\cos 2t\right], & \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}\end{cases}\tag{5}$$

$$\text{第二周期}\quad x(t)=\begin{cases}\sin 2t\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{7}{15}\right)-\frac{1}{6}\cos 2t\right], & \frac{3\pi}{2}\leqslant t\leqslant 2\pi\\ \sin t\left[-\left(\alpha+\frac{8}{15}\right)-\frac{4}{15}\cos t\cos 2t\right], & 2\pi\leqslant t\leqslant 3\pi\end{cases}\tag{6}$$

直观上可以看出，第二个周期开始时具有的速度为 $\alpha+2/15$，第三个周期开始时速度为 $\alpha+4/15$．事实上，每一个周期开始时的速度都比前一个周期开始时速度大 2/15．因为在每一个周期中，解的振幅与每个周期开始的速度直接成正比，所以振幅随着时间的增加而不断增加． ■

必须牢记一点，这个模型是非常简化的一维模型，没有考虑真实吊桥的所有内在相互影响．最近，McKenna 修改了这个模型，从一个不同的视角，即扭振的视角来考察塔科马海峡吊桥的问题．[⊖]

对外力条件下桥的性态的研究还在继续．这些模型可能被不断地修改，一些新的观点也会从这些研究中得到提炼．然而，应该清楚的是引起塔科马海峡吊桥毁坏的巨大振动不是共振的结果．

相关练习

1. (a)用 4.3 和 4.4 节的方法求得描述路面第一个振动周期的(5)式．[提示：用三角函数中的二倍角公式.]
   (b)证明路面在第二个周期开始时的速度为 $\alpha+2/15$.
   (c)用(b)中的信息求得描述路面第二个振动周期的解(6).
   (d)用绘图工具分别绘出 $\alpha=1$ 和 $\alpha=2$ 时，$x(t)$的两个运动周期.
2. 解下面的初值问题，并绘出解在区间 $0\leqslant t\leqslant 6\pi$ 上的图形．注意第一个问题中有共振现象，但是第二个问题中没有.
   (a)$x''+x=\cos t$，$x(0)=0$，$x'(0)=0$
   (b)$x''+x=\cos 2t$，$x(0)=0$，$x'(0)=0$
3. (a)求初值问题

$$x''+F(x)=\sin 4t, x(0)=0, x'(0)=1, \text{其中 } F(x)=\begin{cases}bx, & x\geqslant 0\\ ax, & x<0\end{cases}$$

   分别当 $b=1$，$a=4$；$b=64$，$a=4$；$b=36$，$a=25$ 时的三种情况的解．注意第一种情况中 $0<a<b$ 的假设不满足.

⊖ P. J. McKenna, Large torsional oscillations in suspension bridges revisited: Fixing an old approximation, *American Mathematical Monthly* 106: (1999): 1—18.

(b)绘出(a)中解的图形．每种情况下当 t 增加时，$x(t)$是怎样的？

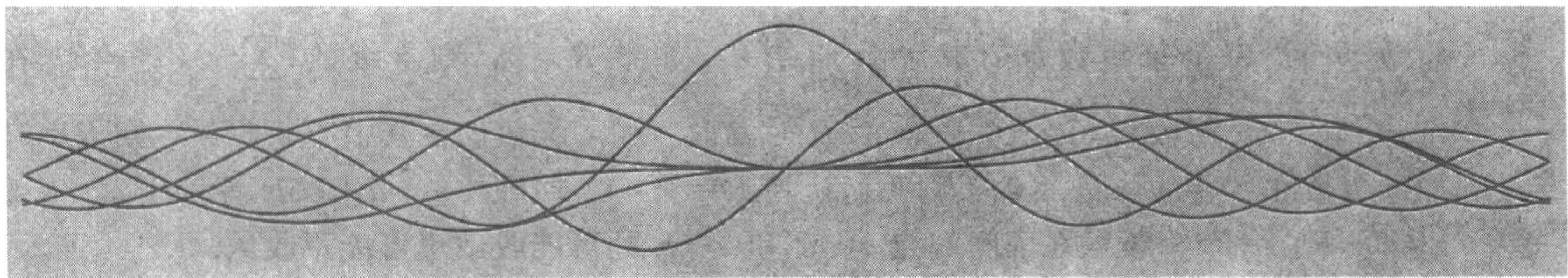
(c)若初始速度为 $x'(0)=\alpha$，$\alpha>0$，每种情况又是怎样的？读者能得出类似于前面讨论中关于解在长时间区间上性态的结论吗？

4. (a)初值问题

$$x''+\beta x'+F(x)=\sin 4t, x(0)=0, x'(0)=1, \text{其中 } F(x)=\begin{cases}4x, x\geqslant 0\\ x, x<0\end{cases}$$

中的项 $\beta x'(\beta>0)$表示阻尼．解三种情况 $\beta=0.01$，$\beta=0.1$，$\beta=0.5$ 下的初值问题．

(b)绘出(a)中解的图形．每种情况下，随着 t 的增加 $x(t)$是怎样的？



贝塞尔函数的图像；见图 6.3 和图 6.4

第 6 章 线性方程的级数解

到目前为止我们已经初步掌握了求解二阶或高阶常系数线性微分方程的方法. 唯一的例外是柯西-欧拉方程. 在实际应用中，变系数的线性方程至少和常系数线性方程一样重要. 如第 4.7 节中所提到的，即使是一个形如 $y''+xy=0$ 的简单变系数方程都没有初等形式的解. 我们可以求出 $y''+xy=0$ 的两个线性无关的解，但正如我们将要在 6.1 节和 6.3 节中看到的那样，这个方程的解要用无穷级数来定义.

6.1 平凡点的解

我们在 4.7 节中提到，大多数变系数的线性高阶常微分方程不能利用初等函数求解. 求解这类方程的方法是先假设一个无穷级数形式的解，然后做一个类似于待定系数法(4.4 节)的求解过程. 因为这些级数解常常是幂级数，所以我们先要列出一些关于幂级数的性质. 如果读者想对这一理论做更深度的复习，可以参考微积分教材.

6.1.1 幂级数回顾

- **定义** 关于 $x-a$ 的幂级数是一个形如

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

的无穷级数. 这样的级数也被称为以 a 为中心的幂级数. 例如幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ 以 $a=-1$ 为中心. 在本节中我们主要讨论关于 x 的幂级数，即以 $a=0$ 为中心的幂级数. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^n$ 是一个关于 x 的幂级数.

- **收敛** 称一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 在 x 的某个取值处是收敛的，如果其部分和 $\{S_N(x)\}$ 收敛——即，$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}c_n(x-a)^n$ 存在. 如果极限在 x 处不存在，则称级数是发散的.

- **收敛区间** 每个幂级数都有其收敛区间. 收敛区间就是所有使级数收敛的实数 x 的集合.

- **收敛半径** 每个幂级数都有其收敛半径 R. 如果 $R>0$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $|x-a|<R$ 时收敛而在 $|x-a|>R$ 时发散. 如果级数仅在其中心 a 收敛，则 $R=0$. 如果级数在所有的 x 处收敛，则我们认为 $R=+\infty$. 回顾 $|x-a|<R$ 等价于 $a-R<x<a+R$，一个幂级数在区间端点 $a-R$ 和 $a+R$ 处可能收敛也可能不收敛.
- **绝对收敛** 一个幂级数在其收敛区间内绝对收敛. 换言之，如果 x 属于收敛区间且不是区间端点，则级数的绝对值 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x-a)^n|$ 收敛.
- **比率检验** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 的收敛性可以用比率检验来判断. 假设对所有的 n 有 $c_n \neq 0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L.$$

若 $L<1$ 则级数绝对收敛，若 $L>1$ 则级数发散，而若 $L=1$ 则检验没有明确结论. 例如，对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$，由比率检验得：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{(x-3)^n}{2^n n}}\right| = |x-3| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}|x-3|;$$

当 $\frac{1}{2}|x-3|<1$ 或 $|x-3|<2$ 或 $1<x<5$ 时级数绝对收敛. 最后这个区间是收敛的开区间. 级数在 $|x-3|>2$ 时，即 $x>5$ 或 $x<1$ 时发散. 在收敛开区间的左端点 $x=1$ 处，由其他级数检验方法知常数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/n)$ 是收敛的. 而在右端点 $x=5$ 处，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ 是发散的调和级数. 因此级数的收敛区间为[1, 5)，且收敛半径为 $R=2$.
- **用幂级数定义函数** 一个幂级数定义了一个函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，其定义域即为级数的收敛区间. 如果收敛半径 $R>0$，则 f 在区间 $(a-R, a+R)$ 上是连续可微的，且可积. 此外，$f'(x)$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 可通过逐项微分或积分求得. 级数在一个端点的收敛性可能会因微分而变得发散，或通过积分而变得收敛. 如果 $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 是关于 x 的幂级数，则其前两阶导数分别为 $y'=\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ 和 $y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$. 注意到一阶导数的第一项和二阶导数的前两项为 0. 我们省略这些为 0 的项，得到

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \text{ 和 } y''=\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}. \tag{1}$$

这些结果很重要并且很快就会用到.

- **恒等性质** 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n=0, R>0$ 对任何收敛区间内的 x 都成立，则对所有的 n 有 $c_n=0$.
- **在某点解析** 函数 f 在某点 a 解析，如果其在一正的或无穷的收敛半径内可被表示为关于 $x-a$ 的幂级数. 在微积分学中可以看到诸如 e^x，$\cos x$，$\sin x$，$\ln(x-1)$的这些函数都可以被表示成泰勒级数. 例如，

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots, \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots, \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \tag{2}$$

对 $|x|<+\infty$均成立. 这些以 0 为中心的泰勒级数被称为麦克劳林级数，可以看到 e^x，$\sin x$，和 $\cos x$ 在 $x=0$ 处都是解析的.

- **幂级数的运算** 幂级数可以通过加法、乘法及除法运算进行合并. 这些运算与两个多项式的加法、乘法、除法类似，即把具有 x 相同次幂项的系数相加，利用分配律和合并同类项，以及长除法等运算进行合并. 例如，利用(2)中的级数，我们有

$$\begin{aligned}e^x\sin x&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\cdots\right)\\&=x+x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^4+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)x^5+\cdots\\&=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\cdots.\end{aligned}$$

因为幂级数 e^x 和 $\sin x$ 都在 $|x|<+\infty$内收敛，所以乘积得到的级数也在这一范围内收敛. 我们可以利用 CAS 解决幂级数的乘法或除法问题.

- **和式中标记的转换** 在本节及本章后面的内容中，化简两个或更多由求和符号(sigma) $\sum$表示的幂级数是很重要的，也就是将多个由求和符号表达的式子合并成由一个求和符号表达的式子. 如接下来的例子所展示的，将两个或更多和式合并成一个和式往往需要改变符号，即改变和式中的标记.

例 1 **两个幂级数相加**

将 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ 写成一个幂级数.

解 为了将两个级数相加，我们需要两个从相同数字开始的求和标记且两个级数中 x 的幂次数须保持“同步”；比如说一个级数从 x 的一次幂开始，我们希望另一个级数也从相同的幂次开始. 注意到在给定的问题中，第一个级数始于 x^0 而第二个级数始于 x^1. 将第一个级数的第一项提出和式，我们得到

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}=2\cdot 1c_2x^0+\underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{\text{级数始于 } x,\ n=3}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{\text{级数始于 } x,\ n=0},$$

我们看到等式右边的两个级数以 x 的相同次幂开始，即 x^1. 现在为了得到相同的和式标记，

我们对 x 的幂指数做一改变；在第一个级数中令 $k=n-2$，同时在第二个级数中令 $k=n+1$. 等式右边变为

相同

$$2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^k. \tag{3}$$

相同

考虑到和式的标记是一个“虚”变量；如果读者谨记和式标记的实际值，那么 $k=n-1$ 和 $k=n+1$ 就不会引起混乱，在两种情况下 k 都有相同的连续取值 $k=1, 2, 3, \cdots$，对于 $k=n-1$，$n=2, 3, 4, \cdots$ 而对于 $k=n+1$，$n=0, 1, 2, \cdots$. 现在我们把(3)中的级数逐项相加得：

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}+c_{k-1}]x^k. \tag{4}$$

■

如果读者对(4)式有怀疑，可以具体写出等式两边的项加以检验.

6.1.2 幂级数解

假设线性二阶微分方程

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \tag{5}$$

可以通过除以第一项的系数 $a_2(x)$ 变为标准型

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0. \tag{6}$$

我们有以下定义.

定义 6.1 平凡点和奇点

点 $x=x_0$ 称为微分方程(5)的一个平凡点(ordinary point)，如果标准型(6)中的 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 在 $x=x_0$ 处都可以展开. 一个点如果不是方程的平凡点，则称为奇点(singular point).

每一个 x 的有限值都是微分方程 $y''+(e^x)y'+(\sin x)y=0$ 的平凡点. 特别地，$x=0$ 是一个平凡点，因为正如我们已经在(2)中看到的，e^x 和 $\sin x$ 在这一点都是可展开的. 定义 6.1 的第二句话说明，如果(6)中的 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 至少有一个在 $x=x_0$ 处不可展开，则 $x=x_0$ 为一个奇点. 注意 $x=0$ 是微分方程 $y''+(e^x)y'+(\ln x)y=0$ 的一个奇点，因为 $Q(x)=\ln x$ 在 $x=0$ 处不连续，所以其无法表示成 x 的幂级数.

多项式系数 下面我们主要考虑当(5)有多项式系数时的情况. 多项式在 x 取任意值时可以展开，且有理函数除了其分母取 0 时之外都可以展开. 这样如果 $a_2(x)$、$a_1(x)$ 和 $a_0(x)$ 是没有公因子的多项式，则有理函数 $P(x)=a_1(x)/a_2(x)$ 和 $Q(x)=a_0(x)/a_2(x)$ 除了在 $a_2(x)=0$ 时之外都是可展开的. 所以若有 $a_2(x_0)\neq 0$ 则 $x=x_0$ 是一个平凡点，而若有 $a_2(x_0)=0$ 则 $x=x_0$ 是一个奇点. 例如，方程 $(x^2-1)y''+2xy'+6y=0$ 唯一的奇点是 $x^2-1=0$ 的解 $x=\pm 1$. x 的所有其他有限值[⊖]为平凡点. 检验柯西-欧拉方程 $ax^2y''+bxy'+cy=0$，$x=0$ 为其奇点. 奇点不一定是实数. 方程 $(x^2+1)y''+xy'-y=0$ 的奇点是 $x^2+1=0$ 的解，即 $x=\pm i$. x 的其他

⊖ 我们在这里约定，平凡点和奇点都是有限点. 实际上一个常微分方程可能会有取无限值的奇点.

所有实值和复值都是平凡点.

我们不加证明地给出下面这个判断方程是否存在幂级数解的定理.

定理 6.1 **幂级数解的存在性**

如果 $x=x_0$ 是微分方程(5)的一个平凡点，那么我们总可以求出两个线性相关且以 x_0 为中心的幂级数解，即 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$. 级数解至少在某区间 $|x-x_0|<R$ 上收敛. 这里 R 是 x_0 到与其最近的奇点的距离.

形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 的解称为关于平凡点 x_0 的解(solution about the ordinary point x_0). 定理 6.1 中的距离 R 是收敛半径的最小值. 例如，复数 $1\pm 2\mathrm{i}$ 是方程 $(x^2-2x+5)y''+xy'-y=0$ 的奇点，但因为 $x=0$ 是方程的一个平凡点，根据定理 6.1 我们可以求出两个以 0 为中心的幂级数解. 即解的形式为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，进一步，不通过实际求解我们也可知每一级数至少在 $|x|<\sqrt{5}$ 上收敛，这里 $R=\sqrt{5}$ 是复平面内 0 到 $1+2\mathrm{i}$ 或 $1-2\mathrm{i}$ 的距离. 然而微分方程有一个适用于 x 的更大范围的解；实际上这个解在 $(-\infty,+\infty)$ 上都成立，因为这两个解中有一个是多项式.

注 在后面的例子和练习 6.1 中，为简单起见，我们只求关于平凡点 $x=0$ 的幂级数解. 如果需要求一个常微分方程在平凡点 $x_0\neq 0$ 上的幂级数解，我们可以对方程做简单的变量代换 $t=x-x_0$(这使 $x=x_0$ 变为 $t=0$)，求出新方程形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n$ 的解，然后再用 $t=x-x_0$ 回代.

求一个齐次线性二阶常微分方程的幂级数解的方法称为“待定级数系数法”，因为这一过程与我们在 4.4 节中所做的非常类似. 简言之，我们的思想是：将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 代入微分方程，如我们在例 1 中所做的那样合并级数，然后列出方程右边所有的系数以确定 c_n. 但是因为方程右边等于 0，最后一步根据前面提到的恒等性质，x 的所有系数都应等于 0. 这并不是说所有系数等于 0；这没有任何意义，毕竟定理 6.1 保证了我们可求得两个解. 例 2 叙述了如何通过一个假设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ 得到两组系数，这样我们就得到两个不同的幂级数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，它们都是关于平凡点 $x=0$ 的幂级数. 微分方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，实际上，可以证明 $C_1=c_0$ 及 $C_2=c_1$.

例 2 **幂级数解**

求解 $y''+xy=0$.

解 因为方程没有取有限值的奇点，所以定理 6.1 保证了两个以 0 为中心的幂级数解存在，且在 $|x|<+\infty$ 上收敛. 将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 和二阶导数 $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$ (请参考(1)式)代入微分方程得

$$y''+xy=\sum_{n=2}^{\infty}c_n n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\sum_{n=2}^{\infty}c_n n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}. \tag{7}$$

在例 1 中我们已经通过转换和式标记对方程(7)右边的两个级数相加. 由(4)给出的结果得

$$y''+xy=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)(k+2)c_{k+2}+c_{k-1}]x^k=0. \tag{8}$$

此时我们使用恒等性质. 因为(8)恒等于 0，所以需要 x 的所有次幂的系数都等于 0，即 $2c_2=0$ (其为 x^0 的系数)，及

$$(k+1)(k+2)c_{k+2}+c_{k-1}=0, k=1,2,3,\cdots. \tag{9}$$

现在很容易由 $2c_2=0$ 得 $c_2=0$. 而(9)中的表达式称为一个递归关系(recurrence relation). 我们可以通过选择系数集合中一个合适的非零子集来确定 c_k. 因为对所有 k 有 $(k+1)(k+2)\neq 0$，我们可以在(9)中利用 c_{k-1} 表示出 c_{k+2}：

$$c_{k+2}=\frac{c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, k=1,2,3,\cdots. \tag{10}$$

在(10)中取 k 为连续的整数，则我们可以连续得到假设解中的系数：

$$k=1, c_3=-\frac{c_0}{2\cdot 3},$$

$$k=2, c_4=-\frac{c_1}{3\cdot 4},$$

$$k=3, c_5=-\frac{c_2}{4\cdot 5}=0, \qquad \leftarrow c_2\text{ 等于零}$$

$$k=4, c_6=-\frac{c_3}{5\cdot 6}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}c_0,$$

$$k=5, c_7=-\frac{c_4}{6\cdot 7}=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}c_1,$$

$$k=6, c_8=-\frac{c_5}{7\cdot 8}=0, \qquad \leftarrow c_5\text{ 等于零}$$

$$k=7, c_9=-\frac{c_6}{8\cdot 9}=-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}c_0,$$

$$k=8, c_{10}=-\frac{c_7}{9\cdot 10}=-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}c_1,$$

$$k=9, c_{11}=-\frac{c_8}{10\cdot 11}=0, \qquad \leftarrow c_8\text{ 等于零}$$

等等. 现将上面得到的系数代入前面的假设

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7+c_8x^8+c_9x^9+c_{10}x^{10}+c_{11}x^{11}+\cdots,$$

我们得到

$$y=c_0+c_1x+0-\frac{c_0}{2\cdot 3}x^3-\frac{c_1}{3\cdot 4}x^4+0+\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6$$

$$+\frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+0-\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9-\frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^{10}+0+\cdots.$$

在合并了含有 c_0 和 c_1 的项后，我们得到 $y=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$，其中

$$y_1(x)=1-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9+\cdots$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot 3\cdots(3k-1)(3k)}x^{3k},$$

$$y_2(x)=x-\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^{10}+\cdots$$

$$=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\cdot 4\cdots(3k)(3k+1)}x^{3k+1}.$$

因为在递归关系中使用(10)时 c_0 和 c_1 一直未被确定，所以我们可以任意选择其值. 正如我们在这个例子之前提到的一样，线性组合 $y=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$ 实际上代表了微分方程的通解. 根据定理 6.1，我们可知每个级数解都在 $|x|<+\infty$ 上收敛，这一事实也可以通过比率检验证明. ■

例 2 中的微分方程称为气体方程(Airy's equation)，它被应用于光或声波在地球表面的衍射、空气动力学，以及一个细直柱状物体在其自重影响下的弯曲. 其他形式的气体方程还有 $y''-xy=0$ 和 $y''+\alpha^2xy=0$. 请参考练习 6.3 中习题 36 对后一个方程的应用.

例 3　幂级数解

求解 $(x^2+1)y''+xy'-y=0$.

解　如我们在 6.1.2 节中看到的，给定的微分方程有奇点 $x=\pm i$，且方程有以 0 为中心，至少在 $|x|<1$ 上收敛的幂级数解，这里 1 是复平面内 0 到 i 或 $-i$ 的距离. 假设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 和其前两阶导数(请参考(1)式)有

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$=2c_2x^0-c_0x^0+6c_3x+c_1x-c_1x+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n}_{k=n}$$

$$+\underbrace{\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}}_{k=n-2}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}nc_nx^n}_{k=n}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n}_{k=n}$$

$$=2c_2-c_0+6c_3x+\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}+kc_k-c_k]x^k$$

$$=2c_2-c_0+6c_3x+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k-1)c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k=0.$$

由这个恒等式我们得 $2c_2-c_0=0$，$6c_3=0$，及

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} = 0.$$

所以

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0,$$

$$c_3 = 0,$$

$$c_{k+2} = \frac{1-k}{k+2}c_k, k = 2,3,4,\cdots.$$

将 $k=2$，3，4，…代入最后一个公式得

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2\cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0,$$

$$c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0, \quad \leftarrow c_3 \text{ 等于零}$$

$$c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0,$$

$$c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0, \quad \leftarrow c_5 \text{ 等于零}$$

$$c_8 = -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0,$$

$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0, \quad \leftarrow c_7 \text{ 等于零}$$

$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0,$$

等等. 所以

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + c_9 x^9 + c_{10} x^{10} + \cdots \\ &= c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} - \cdots\right] + c_1 x \\ &= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x). \end{aligned}$$

方程的解为多项式 $y_2(x)=x$ 和幂级数

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}, \ |x| < 1.$$ ■

例 4 三项递归关系

对于微分方程

$$y'' - (1+x)y = 0,$$

如果求其幂级数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，我们会得到 $c_2 = \frac{1}{2}c_0$ 及三项递归关系

$$c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, k = 1,2,3,\cdots.$$

这一公式说明系数 c_3，c_4，c_5，…都可以用 c_1 和 c_0 表示出. 继续下去，则计算变得有些麻烦. 为简单起见，我们可以先令 $c_0 \neq 0$，$c_1 = 0$；这使得一个解的系数可以完全由 c_0 表示出：

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0,$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}c_0,$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}c_0,$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{4 \cdot 5}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{30}c_0,$$

等等. 接下来，若选择 $c_0=0$，$c_1\neq0$，用 c_1 表示的其他解的系数为：

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0 = 0,$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}c_1,$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}c_1,$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{120}c_1,$$

等等. 最后，我们得到方程的通解 $y=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$，其中

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots,$$

以及

$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots.$$

每个级数都在 x 的所有有限值处收敛. ■

非多项式系数 下面一个例子给出了当方程的系数不是多项式时，如何求出在平凡点$x_0=0$处的幂级数解的方法. 在这个例子中，我们将看到两个幂级数乘法的应用.

例 5 非多项式系数的常微分方程

求解 $y''+(\cos x)y=0$.

解 我们看到 $x=0$ 是方程的一个平凡点，因为我们已经知道 $\cos x$ 在该点是可以展开的. 利用(2)中给出的 $\cos x$ 的麦克劳林级数，并根据(1)中通常用到的假设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，可得

$$\begin{aligned} y''+(\cos x)y &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2} + \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \\ &= 2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+\cdots+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots) \\ &= 2c_2+c_0+(6c_3+c_1)x+\left(12c_4+c_2-\frac{1}{2}c_0\right)x^2+\left(20c_5+c_3-\frac{1}{2}c_1\right)x^3+\cdots=0. \end{aligned}$$

由上式可得

$$2c_2+c_0=0,6c_3+c_1=0,12c_4+c_2-\frac{1}{2}c_0=0,20c_5+c_3-\frac{1}{2}c_1=0,$$

等等. 所以有 $c_2=-\frac{1}{2}c_0$，$c_3=-\frac{1}{6}c_1$，$c_4=\frac{1}{12}c_0$，$c_5=\frac{1}{30}c_1$，…通过合并同类项，我们得到通解 $y=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$，其中

$$y_1(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4-\cdots,$$

$$y_2(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{30}x^5-\cdots.$$

因为这个微分方程没有有限奇点，所以两个级数都在 $|x|<+\infty$ 上收敛. ■

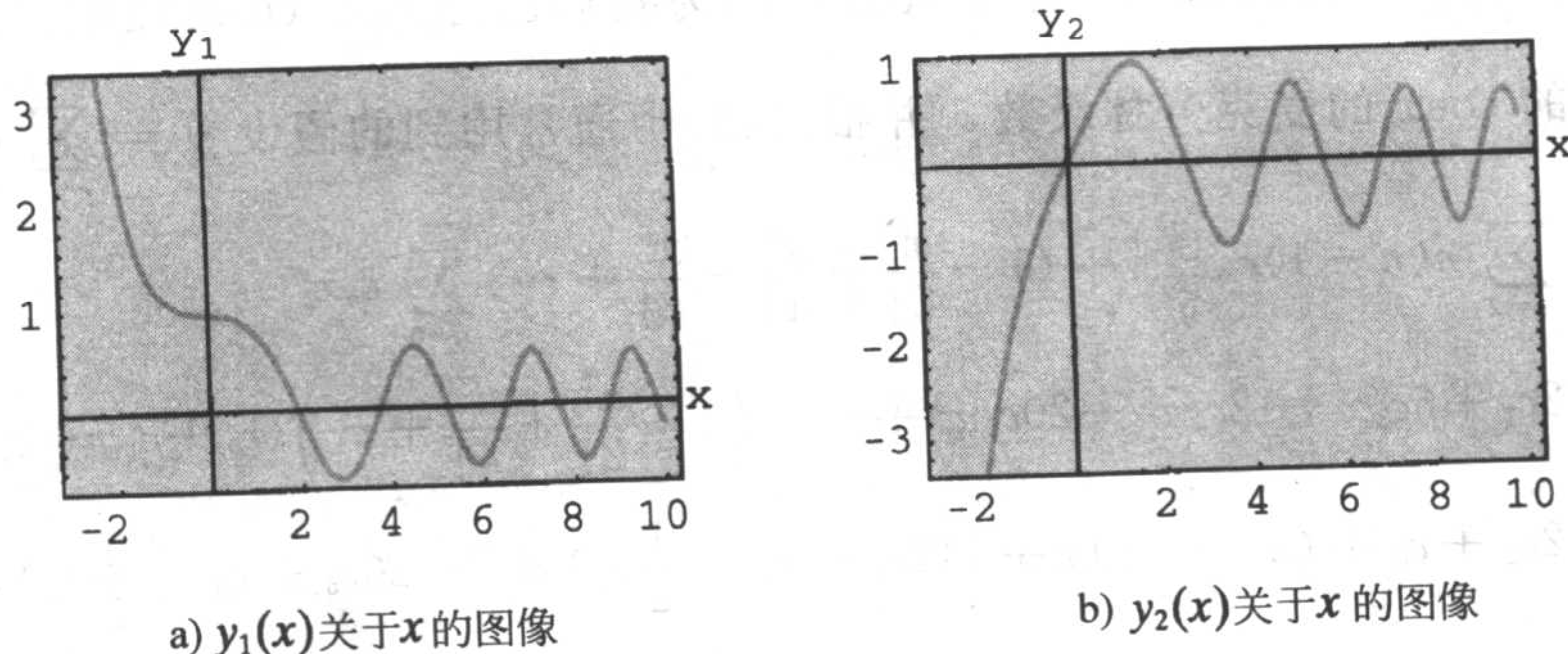
解曲线 我们可以通过几种方法获得幂级数解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的近似图像. 通常我们采用级数的部分和进行绘图，换言之，就是绘出多项式 $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}c_nx^n$ 的图像. 当 N 值很大时，$S_N(x)$ 给出了 $y(x)$ 在平凡点 $x=0$ 附近的性质. 我们也可以用在 4.9 节中所做的那样获得近似的数值解曲线. 例如，如果仔细观察例 2 中气体方程的级数解，读者会发现 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 依次是初值问题

$$y''+xy=0, y(0)=1, y'(0)=0,$$
$$y''+xy=0, y(0)=0, y'(0)=1 \tag{11}$$

的解. 特殊的初值条件从 $y=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$ 中“挑选”出了解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，而解在形式上都应符合我们的基本假设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 且满足 $y(0)=c_0$ 和 $y'(0)=c_1$. 现在在数值求解程序中利用方程组,将 $y'=u$ 代入 $y''+xy=0$ 得 $y''=u'=-xy$，这样一个等价于气体方程的由两个一阶方程组成的方程组为

$$y'=u,$$
$$u'=-xy. \tag{12}$$

(11)中的初值条件对应到方程组(12)中可写成 $y(0)=1$，$u(0)=0$ 和 $y(0)=0$，$u(0)=1$. 图 6.1 中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的图像可通过数值求解程序获得. 通过数值求解程序绘出的振荡性与 5.1 节中形如 $mx''+ktx=0$ 的气体方程一致. 在这一模型中弹簧的弹性系数 $K(t)=kt$ 随时间的增加而变大.



a) $y_1(x)$ 关于 x 的图像　　b) $y_2(x)$ 关于 x 的图像

图 6.1 气体方程的解

注 在后面的问题中，不要期望在任何情况下都可以用和式来表示方程的解. 尽管我们可以通过利用递归关系或例 4 那样的乘法求得级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ 尽可能多的项，但推理出系数 c_n 的通项往往是不可能的. 我们可以如在例 4 和例 5 中那样，只写出级数的前几项.

练习 6.1

6.1.1 幂级数回顾

在习题 1～4 中求出给定幂级数的收敛半径和收敛区间.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(100)^n}{n!}(x+7)^n$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{10^k}(x-5)^k$

4. $\sum_{k=0}^{\infty}k!(x-1)^k$

在习题 5 和 6 中给定的函数在 $x=0$ 处是可以展开的. 求出幂级数的前四项. 可以利用前面学习的级数乘法徒手计算或利用 CAS 计算.

5. $\sin x\cos x$

6. $e^{-x}\cos x$

在习题 7 和 8 中，给定的函数在 $x=0$ 处是可以展开的. 求出幂级数的前四项. 可以利用前面学习的长除法徒手计算或利用 CAS 计算. 给出收敛的开区间.

7. $\frac{1}{\cos x}$

8. $\frac{1-x}{2+x}$

在习题 9 和 10 中将给定的表达式改写成一个单独的幂级数.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}2nc_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}6c_n x^{n+1}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^n$

在习题 11 和 12 中用代入法直接证明给定的幂级数是微分方程的特解.

11. $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, (x+1)y''+y'=0$

12. $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}, xy''+y'+xy=0$

6.1.2 幂级数解法

在习题 13～24 中求出给定微分方程关于平凡点 $x=0$ 的两个幂级数解.

13. $y''-xy=0$

14. $y''+x^2y=0$

15. $y''-2xy+y=0$

16. $y''-xy'+2y=0$

17. $y''+x^2y'+xy=0$

18. $y''+2xy'+2y=0$

19. $(x-1)y''+y'=0$

20. $(x+2)y''+xy'-y=0$

21. $y''-(x+1)y'-y=0$

22. $(x^2+1)y''-6y=0$

23. $(x^2+2)y''+3xy'-y=0$

24. $(x^2-1)y''+xy'-y=0$

在习题 25～28 中利用幂级数方法求解给定的初值问题.

25. $(x-1)y''-xy'+y=0$，$y(0)=-2$，$y'(0)=6$

26. $(x+1)y''-(2-x)y'+y=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=-1$

27. $y''-2xy'+8y=0$，$y(0)=3$，$y'(0)=0$

28. $(x^2+1)y''+2xy'=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$

在习题 29 和 30 中使用例 5 中的求解过程求出给定微分方程在平凡点 $x=0$ 处的两个幂级数解.

29. $y''+(\sin x)y=0$

30. $y''+e^x y'-y=0$

讨论题

31. 讨论如何仅利用幂级数方法求解诸如 $y''-xy=1$ 和 $y''-4xy'-4y=e^x$ 的非齐次方程. 通过求解这两个方程叙述求解思想.

32. $x=0$ 是微分方程 $xy''+(\sin x)y=0$ 的平凡点还是奇点？利用适当的数学方法证明所得的结论.
33. 在习题 12 中给出的特解在 $x=0$ 处是可以展开的，尽管 $x=0$ 是方程 $xy''+y'+xy=0$ 的一个奇点. 然而我们知道这个方程有另一个在该点不可展开的解. 构造一个线性二阶微分方程，使 $x=0$ 为其奇点，而方程的两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可以展开. 不要把问题考虑得太复杂.
34. 我们在由图 6.1 给出的图像中忽略了这样一个问题. 如果将气体方程写成 $y''=-xy$，且当 $x>0$ 且 $y>0$ 或 $x>0$ 且 $y<0$ 时，我们对所得的解曲线可以做怎样的解释？

计算机实验作业

35. (a)求出方程 $y''+xy'+y=0$ 的两个用和式符号表示的幂级数解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$.
    (b)利用 CAS 绘出 $y_1(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 的图像. 取 $N=2, 3, 5, 6, 8, 10$. 对 $y_2(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 重复上述过程.
    (c)利用数值求解程序求出解曲线并与(b)中得到的图像进行比较. 取初值条件为 $y_1(0)=1$，$y_1'(0)=0$ 和 $y_2(0)=0$，$y_2'(0)=1$.
    (d)重新考虑(a)中的 $y_1(x)$. 用初等函数表示这一级数. 然后利用 4.2 节中的(5)求出方程的另一个解. 证明第二个解与幂级数 $y_2(x)$ 相同.
36. (a)在例 5 中求出解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 一个以上的非零项.
    (b)求出初值问题 $y''+(\cos x)y=0, y(0)=1, y'(0)=1$ 的级数解 $y(x)$.
    (c)利用 CAS 绘出(b)中解 $y(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 的图像. 取 $N=2, 3, 4, 5, 6, 7$.
    (d)利用数值求解程序求出(b)中初值问题的解曲线并与(c)中得到的图像进行比较.

6.2 奇点的解

微分方程 $y''+xy=0$ 与 $xy''+y=0$ 的相似之处在于它们都是有变系数的简单线性二阶方程. 这是它们仅有的共同点. 在前一节中我们看到，因为 $x=0$ 是第一个方程的平凡点，所以肯定能求出以该平凡点为中心的两个线性无关的幂级数解. 反之，因为 $x=0$ 是第二个常微分方程的奇点，所以求出关于该奇点的两个无穷级数解会比较困难. 请参考例 4 和例 5.

规则奇点和不规则奇点 线性微分方程

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \tag{1}$$

的奇点 $x=x_0$ 可以进一步被划分为规则的或不规则的. 这一划分仍然依赖于标准型

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

中的函数 P 和 Q.

定义 6.2 规则奇点和不规则奇点

微分方程(1)的一个奇点称为规则奇点(regular singular point)，如果函数 $p(x)=(x-x_0)P(x)$ 和 $q(x)=(x-x_0)^2Q(x)$ 在 $x=x_0$ 处都可以展开. 不是规则的奇点称为方程的不规则奇点(irregular singular point).

定义 6.2 中的第二句指出，若函数 $p(x)=(x-x_0)P(x)$ 和 $q(x)=(x-x_0)^2Q(x)$ 至少有一个在 $x=x_0$ 处不可展开，则 $x=x_0$ 就为不规则奇点.

多项式系数 如 6.1 节，我们主要考虑线性方程(1)中的系数 $a_2(x)$、$a_1(x)$ 及 $a_0(x)$ 为没有公因子的多项式的情况. 我们已经看到如果 $a_2(x_0)=0$ 则 $x=x_0$ 是(1)的一个奇点，因为标准型(2)中的实函数 $P(x)=a_1(x)/a_2(x)$ 和 $Q(x)=a_0(x)/a_2(x)$ 至少有一个在该点不收敛. 但因为 $a_2(x)$ 是

一个多项式而 $x=x_0$ 是其一个零点，则根据代数学中的因子定理，$x-x_0$ 是 $a_2(x)$ 的一个因子．这意味着在 $a_1(x)/a_2(x)$ 和 $a_0(x)/a_2(x)$ 化为最简形式后，仍然会保留 $x-x_0$ 这个因子，这一因子会以正整数次幂的形式出现在一个或两个分母中．现假设 $x=x_0$ 是(1)的一个奇点，但两个由乘积定义的函数 $p(x)=(x-x_0)P(x)$ 和 $q(x)=(x-x_0)^2Q(x)$ 在 $x=x_0$ 处都可以展开．我们得到这样的结论，通过给 $P(x)$ 乘以 $x-x_0$ 和给 $Q(x)$ 乘以 $(x-x_0)^2$ 使得(通过约分) $x-x_0$ 不再出现在分母当中．现在我们可以通过检验分母而迅速判断 $x=x_0$ 是否为规则的：如果 $x-x_0$ 最多以一次幂出现在 $P(x)$ 的分母中且最多以二次幂出现在 $Q(x)$ 的分母中，则 $x=x_0$ 是一个规则奇点．此外，如果 $x=x_0$ 是一个规则奇点并且在(2)式上乘以 $(x-x_0)^2$，则原方程变为

$$(x-x_0)^2y''+(x-x_0)p(x)y'+q(x)y=0, \tag{3}$$

其中 p 和 q 在 $x=x_0$ 处可以展开．

例 1　奇点的分类

易知 $x=2$ 和 $x=-2$ 是

$$(x^2-4)^2y''+3(x-2)y'+5y=0$$

的奇点．在方程两端除以 $(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2$ 并将系数化简，可得

$$P(x)=\frac{3}{(x-2)(x+2)^2} \text{ 和 } Q(x)=\frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

现在我们在每个奇点处检验 $P(x)$ 和 $Q(x)$．

为使 $x=2$ 为一个规则奇点，因子 $x-2$ 最多可以以一次幂的形式出现在 $P(x)$ 的分母中且最多可以以二次幂的形式出现在 $Q(x)$ 的分母中．对 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的分母检验证明了这些条件都可满足，所以 $x=2$ 是一个规则奇点．另外，我们也可以通过注意到有理函数

$$p(x)=(x-2)P(x)=\frac{3}{(x+2)^2} \text{ 和 } q(x)=(x-2)^2Q(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$$

在 $x=2$ 处都可以展开从而得到相同的结论．

因为 $x-(-2)=x+2$ 以二次幂的形式出现在 $P(x)$ 的分母中，所以可以得出结论，$x=-2$ 是方程的一个不规则奇点．我们也可以通过

$$p(x)=(x+2)P(x)=\frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

在 $x=-2$ 处不可以展开得到相同的结论．■

在例 1 中，注意到因为 $x=2$ 是一个规则奇点，则原方程可被写为

$$(x-2)^2y''+(x-2)\underbrace{\frac{3}{(x+2)^2}}_{\text{在 } x=2 \text{ 处 } p(x) \text{ 可以展开}}y'+\underbrace{\frac{5}{(x+2)^2}}_{\text{在 } x=2 \text{ 处 } q(x) \text{ 可以展开}}y=0.$$

在另一个例子中，通过检验方程 $x^3y''-2xy'+8y=0$ 的函数 $P(x)=-2/x^2$ 和 $Q(x)=8/x^3$ 的分母，我们可以看到 $x=0$ 是方程的不规则奇点．另一方面，$x=0$ 是方程 $xy''-2xy'+8y=0$ 的规则奇点，因为 $x-0$ 和 $(x-0)^2$ 并没有出现在函数 $P(x)=-2$ 和 $Q(x)=8/x$ 的分母中．对于一个奇点 $x=x_0$ 来说，$P(x)$ 和 $Q(x)$ 的分母中分别包含任意 $x-x_0$ 的小于一次的非负次幂(即 0 次)和任意 $x-x_0$ 的小于二次的非负次幂(即 0 次或 1 次)，这意味着 $x=x_0$ 是一个规则奇点．奇

点可以是一个复数. 读者可以证明 $x=3i$ 和 $x=-3i$ 是 $(x^2+9)y''-3xy'+(1-x)y=0$ 的两个规则奇点.

任意二阶柯西-欧拉方程 $ax^2y''+bxy'+cy=0$, a,b,c 为实数,有规则奇点 $x=0$. 读者可以证明柯西-欧拉方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的两个解为 $y_1=x^2$ 和 $y_2=x^2\ln x$. 如果我们想求关于规则奇点 $x=0$ 的幂级数解(即 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$),则应该只能求出多项式解 $y_1=x^2$. 我们无需为无法得到第二个解而感到奇怪,因为 $\ln x$(相应地 $y_2=x^2\ln x$) 在 $x=0$ 处不可展开,即 y_2 没有以 $x=0$ 为中心的泰勒展开式.

弗罗贝尼乌斯方法 为求出微分方程(1)关于规则奇点的解,我们应用以下由(弗罗贝尼乌斯)给出的定理.

定理 6.2 弗罗贝尼乌斯定理

如果 $x=x_0$ 是微分方程(1)的规则奇点,则至少存在一个如下形式的解

$$y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}, \tag{4}$$

其中 r 是一个待定的常数. 这个级数至少在区间 $0<x-x_0<R$ 上收敛.

注意定理 6.2 中第一句的"至少"这个词. 与定理 6.1 相反,定理 6.2 并不能保证可以求出两个形如(4)的级数解. 求关于规则奇点 $x=x_0$ 的级数解的*弗罗贝尼乌斯方法*(method of Frobenius)类似于前一节中的"待定级数系数法",我们将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ 代入给定微分方程并利用递归关系确定未知系数 c_n. 然而在确定系数之前,我们还有另外一个任务,就是必须先求出未知指标 r. 如果求得的 r 不是非负整数,则相应的解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ 不是幂级数.

如我们在求关于平凡点的解的讨论中那样,为简单起见,我们总是假设 $x=0$ 是规则奇点.

例 2 两个级数解

因为 $x=0$ 是微分方程

$$3xy''+y'-y=0 \tag{5}$$

的一个规则奇点,我们试求其形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 的解. 现有

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \text{ 及 } y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2},$$

所以

$$\begin{aligned}3xy''+y'-y&=3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\end{aligned}$$

$$= x^r\Big[r(3r-2)c_0x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_nx^{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n}_{k=n}\Big]$$

$$= x^r[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k]x^k] = 0,$$

这意味着

$$r(3r-2)c_0 = 0,$$

$$(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k = 0, k = 0,1,2,\cdots.$$

因为如果令 $c_0=0$，我们将得不到有意义的结果，所以必须有

$$r(3r-2) = 0, \tag{6}$$

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, k = 0,1,2,\cdots. \tag{7}$$

当把满足二次方程(6)的两个 r 值 $r_1=2/3$ 和 $r_2=0$ 代入(7)之后，得到两个不同的递归关系

$$r_1 = \frac{2}{3}, c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k+5)(k+1)}, k = 0,1,2,\cdots, \tag{8}$$

$$r_2 = 0, c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}, k = 0,1,2,\cdots. \tag{9}$$

由(8)得

$$c_1 = \frac{c_0}{5\cdot 1}$$

$$c_2 = \frac{c_1}{8\cdot 2} = \frac{c_0}{2!\ 5\cdot 8}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{11\cdot 3} = \frac{c_0}{3!\ 5\cdot 8\cdot 11}$$

$$c_4 = \frac{c_3}{14\cdot 4} = \frac{c_0}{4!\ 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{c_0}{n!\ 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}.$$

由(9)得

$$c_1 = \frac{c_0}{1\cdot 1}$$

$$c_2 = \frac{c_1}{2\cdot 4} = \frac{c_0}{2!\ 1\cdot 4}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3\cdot 7} = \frac{c_0}{3!\ 1\cdot 4\cdot 7}$$

$$c_4 = \frac{c_3}{4\cdot 10} = \frac{c_0}{4!\ 1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{c_0}{n!\ 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}.$$

这里我们遇到了一个在求关于平凡点的解时没有发生过的情况；两组系数看似不同，但每组系数中都含有 c_0. 如果我们忽略这一点，则级数解为

$$y_1(x) = x^{2/3}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}x^n\right], \tag{10}$$

$$y_2(x) = x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}x^n\right]. \tag{11}$$

由比率检验知(10)和(11)在 x 取有限值时，即 $|x|<+\infty$时都收敛. 同时，由这两个解的形式可以看出没有哪个解是另一个解的常数倍，所以 $y_1(x)$和 $y_2(x)$在整个 x 轴上都是线性无关

的. 由叠加原理知，$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是(5)的另一个解. 在任一不包含原点的区间上，如$(0,+\infty)$，这个线性组合代表了微分方程的通解. ■

指标方程 方程(6)称为问题的*指标方程*(indicial equation)，且 $r_1=2/3$ 和 $r_2=0$ 称为奇点 $x=0$ 的*指标根*(indicial root)或*指数*(exponent). 一般地，在将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 代入给定的微分方程并化简后，通过使 x 的最低次幂的总系数等于 0 可以得到关于 r 的二次指标方程. 我们解出 r 的两个值并将其代入如(7)的递归关系中. 定理 6.2 保证了至少能求得一个形如假设的级数解.

在将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 代入微分方程之前就获得指标方程也是可能的. 如果 $x=0$ 是(1)的规则奇点，则根据定义 6.2，$p(x)=xP(x)$和 $q(x)=x^2Q(x)$，其中 P 和 Q 由标准型(2)定义，它们都可以在 $x=0$ 处展开；即有幂级数

$$p(x)=xP(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \text{ 和 } q(x)=x^2Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots \tag{12}$$

在一个正的收敛半径内有意义. 给(2)式两端乘以 x^2，我们得到形如(3)式的形式

$$x^2y''+x[xP(x)]y'+[x^2Q(x)]y=0. \tag{13}$$

将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 和(12)中的两个级数代入(13)并进行级数乘法运算后，我们求出了一般形式的指标方程

$$r(r-1)+a_0r+b_0=0, \tag{14}$$

其中 a_0和 b_0可由(12)式定义. 请参考练习 6.2 中的习题 13 和 14.

例 3 **两个级数解**

求解 $2xy''+(1+x)y'+y=0$.

解 将 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 代入得

$$\begin{aligned}2xy''+(1+x)y'+y&=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_nx^{n+r}\\&=x^r\Big[r(2r-1)c_0x^{-1}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_nx^{n-1}}_{k=n-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_nx^{n}}_{k=n}\Big]\\&=x^r\Big[r(2r-1)c_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+(k+r+1)c_k]x^k\Big],\end{aligned}$$

这意味着

$$r(2r-1)=0, \tag{15}$$

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+(k+r+1)c_k=0, \tag{16}$$

$k=0, 1, 2, \cdots$. 由(15)我们可得指标根为 $r_1=1/2$ 和 $r_2=0$.

对于 $r=1/2$，我们给(16)式两端同时除以 $k+3/2$ 得到

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{2(k+1)}, k=0,1,2,\cdots, \tag{17}$$

而对于 $r_2=0$，(16)式变为

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{2k+1}, k=0,1,2,\cdots. \tag{18}$$

由(17)得	由(18)得
$c_1=\frac{-c_0}{2\cdot 1}$	$c_1=\frac{-c_0}{1}$
$c_2=\frac{-c_1}{2\cdot 2}=\frac{c_0}{2^2\cdot 2!}$	$c_2=\frac{-c_1}{3}=\frac{c_0}{1\cdot 3}$
$c_3=\frac{-c_2}{2\cdot 3}=\frac{-c_0}{2^3\cdot 3!}$	$c_3=\frac{-c_2}{5}=\frac{-c_0}{1\cdot 3\cdot 5}$
$c_4=\frac{-c_3}{2\cdot 4}=\frac{c_0}{2^4\cdot 4!}$	$c_4=\frac{-c_3}{7}=\frac{c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$
$\vdots$	$\vdots$
$c_n=\frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}$.	$c_n=\frac{(-1)^n c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}$.

这样对于指标根 $r_1=1/2$ 可得解

$$y_1(x)=x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{n+1/2},$$

这里我们再次略去了 c_0. 级数在 $x\geqslant 0$ 处收敛；因为有 $x^{1/2}$，所以级数不能定义在 x 为负的区间上. 对于 $r_2=0$，第二个解为

$$y_2(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}x^n, |x|<+\infty.$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上，通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. ■

例 4 只有一个级数解的情况

求解 $xy''+y=0$.

解 根据 $xP(x)=0$，$x^2Q(x)=x$，0 和 x 在 $x=0$ 处的幂级数就是它们自己，所以我们有结论 $a_0=0$ 且 $b_0=0$. 由(14)得到指标方程为 $r(r-1)=0$. 读者可以证明由 $r_1=1$ 和 $r_2=0$ 对应的两个递归关系得到的是两组完全相同的系数. 也就是说，在这种情况下用弗罗贝尼乌斯方法只得到唯一的级数解

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^{n+1}=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{144}x^4+\cdots.$$ ■

三种情形 为讨论方便，我们再次假设 $x=0$ 是(1)的规则奇点且奇点的指标根 r_1 和 r_2 为实数，r_1 表示较大的那个根. 在应用弗罗贝尼乌斯方法时，我们常常根据指标根 r_1 和 r_2 的性质区

分为三种情形.

情形Ⅰ 如果 r_1 与 r_2 不同但其差值不是一个整数，则方程(1)存在两个形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 的线性无关的解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$. 例 2 和例 3 都属于这种情况.

在下一种情况中，我们看到当指标根 r_1-r_2 的差为一正整数时，第二个解将包含一个对数.

情形Ⅱ 如果 $r_1-r_2=N$，这里 N 为一正整数，则方程(1)存在两个形如

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r_1},c_0\neq 0, \tag{19}$$

$$y_2(x)=Cy_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_2},b_0\neq 0 \tag{20}$$

的线性无关的解. 其中 C 是一个可为 0 的常数.

当 r_1-r_2 为正整数时，我们不一定能求出两个形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 的解. 这一点我们无法预先知道，但可以在求出指标根并仔细分析定义系数 c_n 的递归关系后得出结论. 有些时候我们可以得到两个仅与 x 的幂次有关的解，即 $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r_1}$ ((19) 式) 和 $y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_2}$ ($C=0$ 时的(20)式). 请参考练习 6.2 的习题 31. 另一方面，在例 4 中我们有 $r_1-r_2=1$，为一整数，利用弗罗贝尼乌斯方法就无法得到第二个级数解. 在这种情况下，方程(20)，$C\neq 0$，给出了第二个解的形式. 求出含有对数项的第二个解的方法是利用

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx \tag{21}$$

也是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的一个解这一事实. 其中 $y_1(x)$ 是已知解(请参考第 4.2 节中的(5)). 我们将在例 5 中说明如何使用这一公式.

最后一种情况，当指标根相等时，第二个解总是包含一个对数. 这种情况与柯西-欧拉方程的辅助方程具有相同根的情况类似.

情形Ⅲ 如果 $r_1=r_2$，则方程(1)总存在两个形如

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r_1},c_0\neq 0, \tag{22}$$

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^{n+r_2} \tag{23}$$

的线性无关的解. (23)中的解 $y_2(x)$ 也可以利用(21)求得.

例 5 利用 CAS 回顾例 4

求方程 $xy''+y=0$ 的通解.

解 由例 4 中给出的已知解

$$y_1(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{144}x^4+\cdots,$$

我们可以利用公式(21)构造第二个解 $y_2(x)$. 那些有足够时间、精力和耐心的人可以通过长除

法以及积分等方法手工求解. 但在 CAS 的帮助下这一工作会变得相对容易些. 我们给出结果:

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int 0dx}}{[y_1(x)]^2}dx=y_1(x)\int\frac{dx}{\left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{144}x^4+\cdots\right]^2}$$

$$=y_1(x)\int\frac{dx}{\left[x^2-x^3+\frac{5}{12}x^4-\frac{7}{12}x^5+\cdots\right]} \qquad \leftarrow \text{平方后}$$

$$=y_1(x)\int\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{7}{12}+\frac{19}{72}x+\cdots\right]dx \qquad \leftarrow \text{长除后}$$

$$=y_1(x)\left[-\frac{1}{x}+\ln x+\frac{7}{12}x+\frac{19}{144}x^2+\cdots\right] \qquad \leftarrow \text{积分后}$$

或

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+y_1(x)\left[-\frac{1}{x}+\frac{7}{12}x+\frac{19}{144}x^2+\cdots\right].$$

在区间$(0,+\infty)$上, 通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. ■

注 (i) 线性二阶微分方程的不同形式((1)、(2)及(3))被用来进行各种理论上的讨论. 但在实际应用中, 如果真的要利用弗罗贝尼乌斯方法求解微分方程, 我们建议利用(1)所给的微分方程形式.

(ii) 当指标根的差 r_1-r_2 为正整数时($r_1>r_2$), 有时可以先用较小的指标根 r_2 在递归关系中进行叠代. 请参考练习 6.2 中的习题 31 和 32.

(iii) 因为 r 是二次方程的根, 有可能为复数, 但是我们不考虑这种情况.

(iv) 如果 $x=0$ 是不规则奇点, 我们可能无法求出任何形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 的解.

练习 6.2

在习题 1~10 中确定给定微分方程的奇点. 对每个奇点是否规则进行分类.

1. $x^3y''+4x^2y'+3y=0$
2. $x(x+3)^2y''-y=0$
3. $(x^2-9)^2y''+(x+3)y'+2y=0$
4. $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{(x-1)^3}y=0$
5. $(x^3+4x)y''-2xy'+6y=0$
6. $x^2(x-5)^2y''+4xy'+(x^2-25)y=0$
7. $(x^2+x-6)y''+(x+3)y'+(x-2)y=0$
8. $x(x^2+1)^2y''+y=0$
9. $x^3(x^2-25)(x-2)^2y''+3x(x-2)y'+7(x+5)y=0$
10. $(x^3-2x^2+3x)^2y''+x(x-3)^2y'-(x+1)y=0$

在习题 11 和 12 中将给定的微分方程在每个规则奇点处写成(3)的形式. 定义函数 $p(x)$和 $q(x)$.

11. $(x^2-1)y''+5(x+1)y'+(x^2-x)y=0$
12. $xy''+(x+3)y'+7x^2y=0$

在习题 13 和 14 中, $x=0$ 是给定微分方程的规则奇点. 利用(14)中给出的指标方程的一般形式求出奇点的指标根. 在不求解方程的情况下, 讨论用弗罗贝尼乌斯方法可以得到级数解的个数.

13. $x^2y''+\left(\frac{5}{3}x+x^2\right)y'-\frac{1}{3}y=0$
14. $xy''+y'+10y=0$

在习题 15~24 中, $x=0$ 是给定微分方程的规则奇点. 证明奇点的指标根的差值不是整数. 利用弗罗贝尼乌斯方法求出方程关于 $x=0$ 的两个线性无关的级数解. 给出方程在区间$(0,+\infty)$上的通解.

15. $2xy''-y'+2y=0$
16. $2xy''+5y'+xy=0$
17. $4xy''+\frac{1}{2}y'+y=0$
18. $2x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$

19. $3xy''+(2-x)y'-y=0$

20. $x^2y''-\left(x-\frac{2}{9}\right)y=0$

21. $2xy''-(3+2x)y'+y=0$

22. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{4}{9}\right)y=0$

23. $9x^2y''+9x^2y'+2y=0$

24. $2x^2y''+3xy'+(2x-1)y=0$

在习题 25～30 中，$x=0$ 是给定微分方程的规则奇点．证明奇点的指标根的差值为整数．利用弗罗贝尼乌斯方法至少求出一个关于 $x=0$ 的级数解．利用 CAS 和(21)求出第二个解．给出方程在区间$(0,+\infty)$上的通解．

25. $xy''+2y'-xy=0$

26. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$

27. $xy''-xy'+y=0$

28. $y''+\frac{3}{x}y'-2y=0$

29. $xy''+(1-x)y'-y=0$

30. $xy''+y'+y=0$

在习题 31 和 32 中，$x=0$ 是给定微分方程的规则奇点．证明奇点的指标根的差值为整数．对较大的根 r_1 应用由弗罗贝尼乌斯方法找到的递归关系．可以求出几个解？然后对较小的根 r_2 应用递归关系．这次可以求出几个解？

31. $xy''+(x-6)y'-3y=0$

32. $x(x-1)y''+3y'-2y=0$

33. (a)$x=0$ 是微分方程 $x^4y''+\lambda y=0$ 的不规则奇点．证明通过代换 $t=1/x$ 可得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2}{t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\lambda y=0,$$

其中 $t=0$ 是规则奇点．

(b)利用这一节中的方法求出(a)中第二个方程关于奇点 $t=0$ 的两个级数解．

(c)用初等函数表示出原方程的每个级数解．

34. 在 5.2 节的例 3 中，我们看到当一个恒定垂直压力，或载荷 P 施加于细长匀质柱体的横截面时，偏斜量 $y(x)$满足边界值问题

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+Py=0,y(0)=0,y(L)=0. \tag{24}$$

只有当压力达到临界载荷 P_n时，柱体才会发生弯曲或偏移．

(a)现假设长度为 L 且其横截面为圆的柱体，但其为图 6.2(a)所示的锥形．如果柱体，即一个被截短的圆锥，有一条如图 6.2(b)给出的剖面图所示的母线 $y=cx$，横截面关于垂直于 xy 平面的轴的转动惯量为 $I=\frac{1}{4}\pi r^4$，这里 $r=y$ 且 $y=cx$．这样我们有 $I(x)=I_0(x/b)^4$，其中 $I_0=I(b)=\frac{1}{4}\pi(cb)^4$．将 $I(x)$代入微分方程(24)，我们看到在这种情况下偏移可由边界值问题

$$x^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\lambda y=0,y(a)=0,y(b)=0,$$

描述，这里 $\lambda=Pb^4/EI_0$．利用习题 33 的结果求出该锥形柱体的临界载荷 P_n．利用适当的恒等式将弯曲方式 $y_n(x)$表成一个单个函数的形式．

(b)当 $b=11$ 且 $a=1$ 时利用绘图工具绘出相应于欧拉载荷 P_1 的弯曲方式 $y_1(x)$．

讨论题

35. 讨论如何定义线性三阶微分方程

$$a_3(x)y'''+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

的规则奇点．

36. 微分方程 $x^3y''+y=0$ 和 $x^2y''+(3x-1)y'+y=0$ 都有不规则奇点 $x=0$．讨论用弗罗贝尼乌斯方法能

否得到每个微分方程关于 $x=0$ 的一个级数解. 讨论并解释所得的结论.

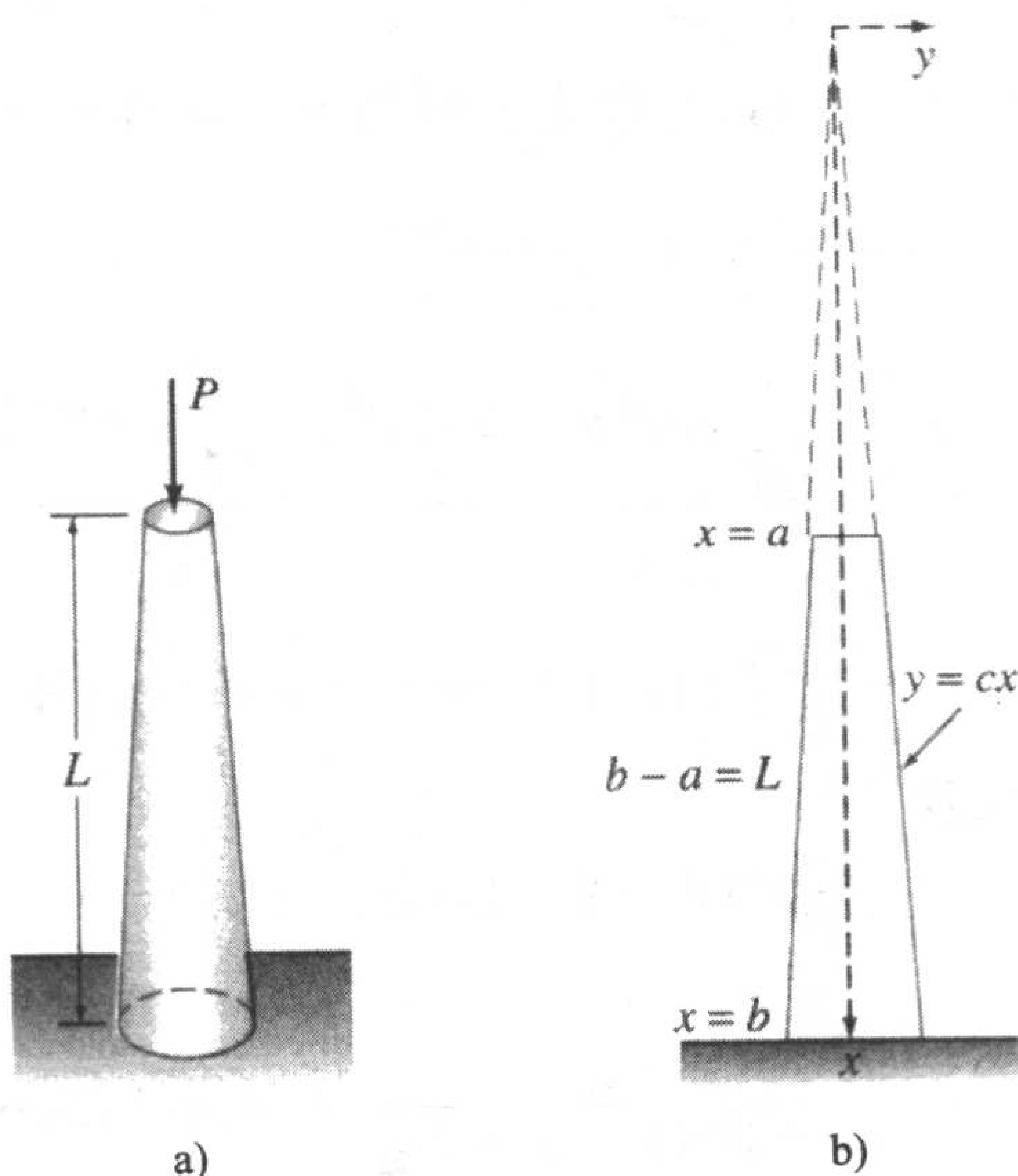


图 6.2

37. 我们已经看到 $x=0$ 是柯西-欧拉方程 $ax^2y''+bxy'+xy=0$ 的规则奇点. 柯西-欧拉方程的指标方程(14)与其辅助方程有关系吗? 请讨论之.

6.3 两个特殊的方程

下面两个微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0 \tag{1}$$

和

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{2}$$

经常出现在应用数学、物理及工程方面的前沿研究中. 它们分别被称为贝塞尔方程(Bessel's equation)和勒让德方程(Legendre's equation). 在求解(1)时我们假设 $v\geqslant 0$, 而在(2)中我们只考虑 n 为非负整数的情况. 因为要求每个方程关于 $x=0$ 的级数解, 所以我们观察到原点是贝塞尔方程的规则奇点, 而是勒让德方程的不规则奇点.

贝塞尔方程的解 因为 $x=0$ 是贝塞尔方程的规则奇点, 所以可知它至少存在一个形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ 的解. 将上式代入(1)得

$$\begin{aligned}
&x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\\
&=c_0(r^2-r+r-v^2)x^r+x^r\sum_{n=1}^{\infty}c_n[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-v^2]x^n+x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}
\end{aligned}$$

$$=c_0(r^2-v^2)x^r+x^r\sum_{n=1}^{\infty}c_n[(n+r)^2-v^2]x^n+x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}. \qquad (3)$$

由(3)我们可得指标方程为 $r^2-v^2=0$，所以指标根为 $r_1=v$ 和 $r_2=-v$. 当 $r_1=v$ 时，(3)变为

$$x^v\sum_{n=1}^{\infty}c_nn(n+2v)x^n+x^v\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}$$

$$=x^v[(1+2v)c_1x+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}c_nn(n+2v)x^n}_{k=n-2}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}}_{k=n}]$$

$$=x^v[(1+2v)c_1x+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+2+2v)c_{k+2}+c_k]x^{k+2}]=0.$$

然后我们得 $(1+2v)c_1=0$，以及

$$(k+2)(k+2+2v)c_{k+2}+c_k=0$$

或

$$c_{k+2}=\frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2v)},k=0,1,2,\cdots. \qquad (4)$$

在(4)中如果选择 $c_1=0$，则 $c_3=c_5=c_7=\cdots=0$，所以我们再令 $k+2=2n$，$n=1$，2，3，…后，对于 $k=0$，2，4，…，有

$$c_{2n}=-\frac{c_{2n-2}}{2^2n(n+v)}. \qquad (5)$$

因此

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2\cdot1\cdot(1+v)}$$

$$c_4=-\frac{c_2}{2^2\cdot2\cdot(2+v)}=\frac{c_0}{2^4\cdot1\cdot2(1+v)(2+v)}$$

$$c_6=-\frac{c_4}{2^2\cdot3(3+v)}=-\frac{c_0}{2^6\cdot1\cdot2\cdot3(1+v)(2+v)(3+v)}$$

$$\vdots$$

$$c_{2n}=\frac{(-1)^nc_0}{2^{2n}n!(1+v)(2+v)\cdots(n+v)},n=1,2,3,\cdots. \qquad (6)$$

而标准的方法是选择 c_0 为一个特殊值，即

$$c_0=\frac{1}{2^v\Gamma(1+v)},$$

其中 $\Gamma(1+v)$ 为伽马函数. 请参考附录 A. 因为这个函数有很好的性质 $\Gamma(1+\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha)$，我们可以将(6)式分母中的乘积化简成一项. 例如，

$$\Gamma(1+v+1)=(1+v)\Gamma(1+v)$$

$$\Gamma(1+v+2)=(2+v)\Gamma(2+v)=(2+v)(1+v)\Gamma(1+v).$$

这样我们可以将(6)写成

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+v}n!(1+v)(2+v)\cdots(n+v)\Gamma(1+v)}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+v}n!\Gamma(1+v+n)},$$

$n=0, 1, 2, \cdots$.

第一类贝塞尔函数 利用刚才得到的系数 c_{2n} 和 $r=v$，(1)的级数解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n+v}$. 这个解常用 $J_v(x)$ 来表示：

$$J_v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}. \tag{7}$$

如果 $v\geqslant 0$，则级数至少在区间 $[0, +\infty)$ 上收敛. 另外，对于第二个指标 $r_2=-v$，类似地有

$$J_{-v}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}. \tag{8}$$

函数 $J_v(x)$ 和 $J_{-v}(x)$ 分别称为关于 v 和 $-v$ 的第一类贝塞尔函数(Bessel function of the first kind). (8)式依赖于 v 的值，它可能包含 x 的负数次幂且在 $(0, +\infty)$ 上收敛.[⊖]

现在我们必须提出在写(1)的通解时要注意一些问题. 当 $v=0$ 时，很明显(7)和(8)是相同的. 如果 $v>0$ 且 $r_1-r_2=v-(-v)=2v$ 不是正整数，则根据 6.2 节中的情形Ⅰ，有 $J_v(x)$ 和 $J_{-v}(x)$ 是(1)在 $(0, +\infty)$ 上线性无关解，且这个区间上的通解为 $y=c_1J_v(x)+c_2J_{-v}(x)$. 另外我们由 6.2 节的情形Ⅱ可知，如果 $r_1-r_2=2v$ 是正整数，(1)的第二个级数解可能存在. 我们把第二种情况再分成两种可能. 当 $v=m=$ 正整数时，由(8)定义的 $J_m(x)$ 与 $J_{-m}(x)$ 不是线性无关解. 可以证明 J_{-m} 是 J_m 的常数倍(请参考贝塞尔函数的性质(ⅰ)). 此外，当 v 是某奇正整数的一半时，$r_1-r_2=2v$ 为正整数. 可以证明在后一种情况下 $J_v(x)$ 和 $J_{-v}(x)$ 是线性无关的. 也就是说，(1)在 $(0, +\infty)$ 上的通解为

$$y=c_1J_v(x)+c_2J_{-v}(x), v\neq \text{整数}. \tag{9}$$

$y=J_0(x)$ 和 $y=J_1(x)$ 的图像在图 6.3 中给出.

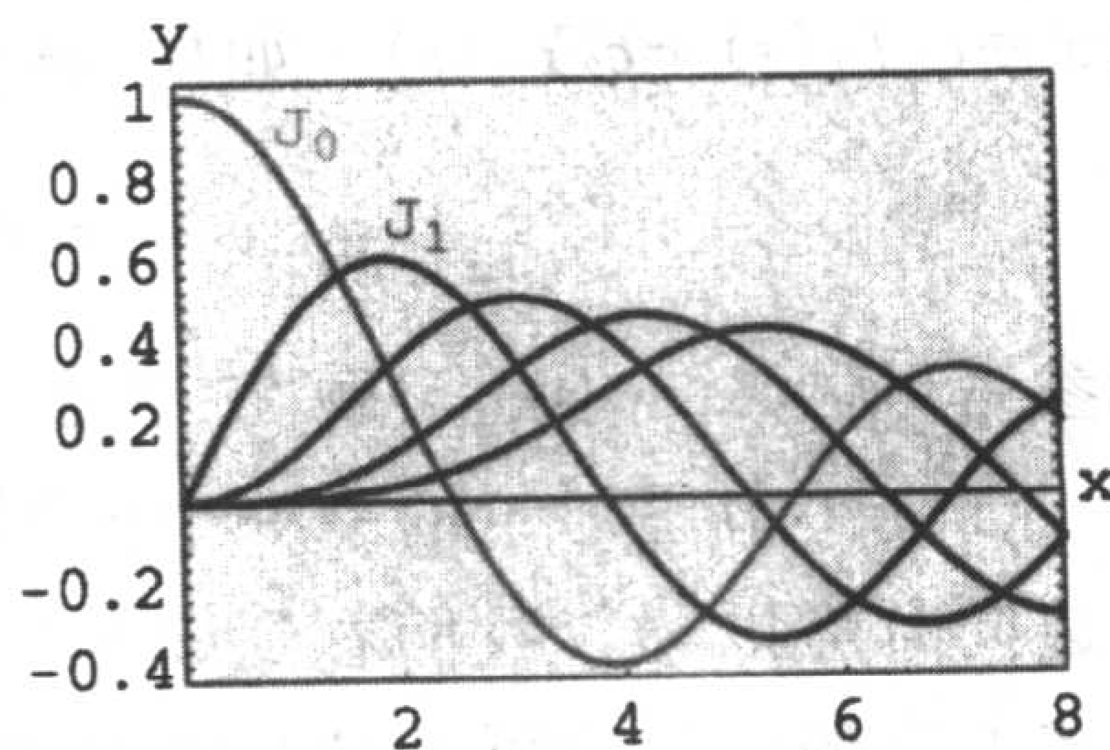


图 6.3 第一类贝塞尔函数 ($n=0, 1, 2, 3, 4$)

例 1 **通解：v 不是整数的情况**

通过确定 $v^2=\frac{1}{4}$ 及 $v=\frac{1}{2}$，我们可由(9)式得到方程 $x^2y''+xy'+(x^2-1/4)y=0$ 在 $(0, +\infty)$ 上的通解为 $y=c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x)$. ■

第二类贝塞尔函数 如果 $v\neq$ 整数，则由线性组合

$$Y_v(x)=\frac{\cos v\pi J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \tag{10}$$

定义的函数和函数 $J_v(x)$ 为(1)的线性无关解. 所以(1)的通解的另一种形式为 $y=c_1J_v(x)+c_2Y_v(x)$，这里 $v\neq$ 整数. 随着 $v\to m$，m 为一整数，(10)为不定型 0/0. 由洛必达法则可以证明 $\lim_{v\to m}Y_v(x)$ 存在. 进一步，函数

$$Y_m(x)=\lim_{v\to m}Y_v(x)$$

和 $J_m(x)$ 是 $x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$ 的线性无关解. 所以对于 v 的任何值，(1)在 $(0, +\infty)$ 上的通解都可以写成

⊖ 当我们用 $|x|$ 代替 x 时，由(7)和(8)给出的级数在 $0<|x|<+\infty$ 上收敛.

$$y = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x). \tag{11}$$

$Y_v(x)$称为关于 v 的第二类贝塞尔函数(Bessel function of the second kind). 图 6.4 给出了 $Y_0(x)$和 $Y_1(x)$的图像.

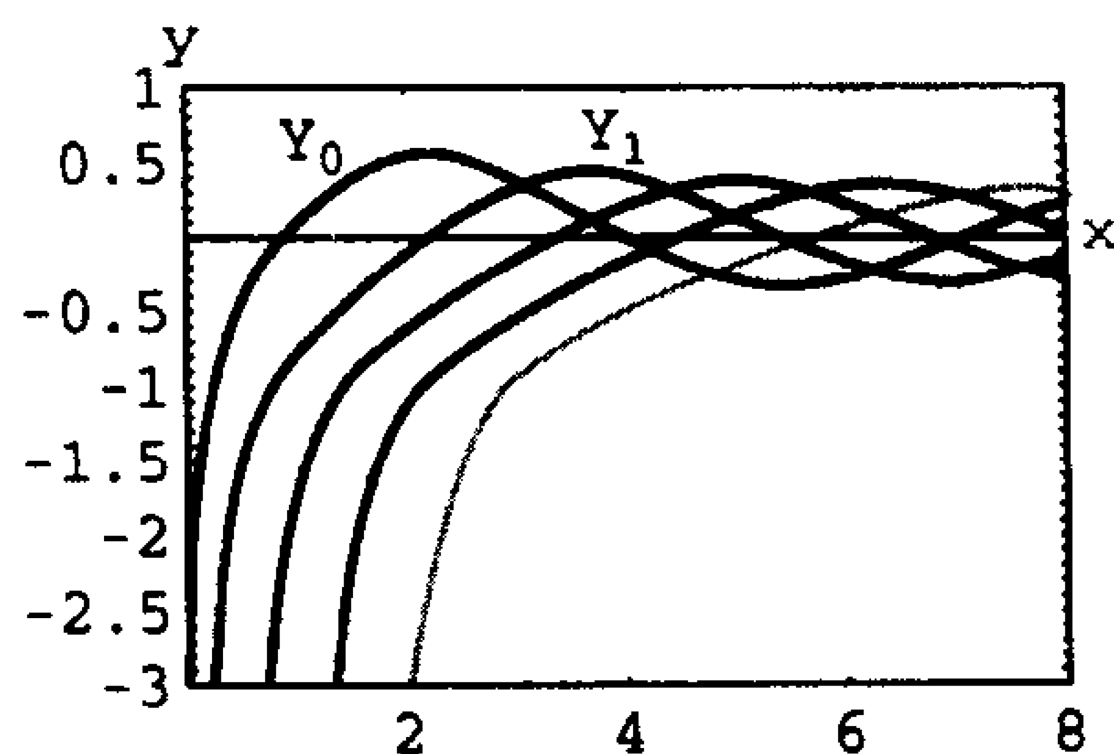


图 6.4 第二类贝塞尔函数 (n=0, 1, 2, 3, 4)

例 2 通解：v 为整数

通过确定 $v^2=9$ 及 $v=3$，我们可由(11)式得到方程 $x^2y''+xy'+(x^2-9)y=0$ 在$(0, +\infty)$上的通解为 $y=c_1J_3(x)+c_2Y_3(x)$. ■

有时候我们可以通过变量代换将一个给定的微分方程转换成方程(1). 然后利用贝塞尔函数表示出原方程的通解. 例 3 说明了如何使用这一技巧.

例 3 回顾硬化弹簧

回顾 5.1 节，我们看到一个物体在硬化弹簧上做自由无阻尼运动的数学模型可由 $mx''+ke^{-\alpha t}x=0$，$\alpha>0$ 给出. 现在我们要求这个方程的通解. 通过变量代换 $s=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}$ 将硬化弹簧的微分方程转化为

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2}+s\frac{dx}{ds}+s^2x=0.$$

后面这个方程可以看作是 $v=0$ 时的(1)式，且其中的 x 和 s 分别代替了 y 和 x. 新方程的通解为$x=c_1J_0(s)+c_2Y_0(s)$. 如果我们回代 s，则可得 $mx''+ke^{-\alpha t}x=0$ 的通解为

$$x(t)=c_1J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right)+c_2Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right).$$

请参考练习 6.3 中的习题 25 和 35. ■

在 5.1 节里讨论的另一个模型中，弹簧特性随时间变化的方程为：$mx''+ktx=0$. 在方程两边同时除以 m，我们看到该方程是一个气体方程，$y''+\alpha^2xy=0$. 请参考第 6.1 节中的例 2. 气体方程的通解也可由贝塞尔函数表示. 请参考练习 6.3 中的习题 26、27 和 36.

参数贝塞尔方程 用 λx 替换(1)中的 x 并利用链式法则，我们得到贝塞尔方程的另一种形式，即参数贝塞尔方程(parametric Bessel equation)：

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-v^2)y=0. \tag{12}$$

(12)的通解为

$$y=c_1J_v(\lambda x)+c_2Y_v(\lambda x). \tag{13}$$

性质 下面我们列出 $m(m=0, 1, 2, \cdots)$阶贝塞尔函数一些有用的性质：

i) $J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$

ii) $J_m(-x)=(-1)^mJ_m(x)$

iii) $J_m(0)=\begin{cases}0, & m>0\\ 1, & m=0\end{cases}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+}Y_m(x)=-\infty$

注意性质(ⅱ)指出，如果 m 为偶数则 $J_m(x)$ 为偶函数，如果 m 为奇数则 $J_m(x)$ 为奇函数. 图 6.4中 $Y_0(x)$和 $Y_1(x)$的图像描述了性质(ⅳ)：$Y_m(x)$在原点是无界的. 这一性质在(10)中并不明显. 不过可以通过(10)或 6.2 节中的

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left[\gamma+\ln\frac{x}{2}\right]-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

在 $x>0$ 时的情况进行证明，$\gamma=0.577\,215\,66\cdots$是欧拉常数(Euler's constant). 由于对数项的存在，$Y_0(x)$在 $x=0$ 处不连续.

数值 在部分 x 处的 $J_0(x)$、$J_1(x)$、$Y_0(x)$及 $Y_1(x)$的一些函数值在表 6.1 中给出. $J_0(x)$、$J_1(x)$、$Y_0(x)$及 $Y_1(x)$的前 5 个非负零点在表 6.2 中给出.

表 6.1 J_0、J_1、Y_0及 Y_1的数值

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	1.000 0	0.000 0	—	—
1	0.765 2	0.440 1	0.088 3	−0.781 2
2	0.223 9	0.576 7	0.510 4	−0.107 0
3	−0.260 1	0.339 1	0.376 9	0.324 7
4	−0.397 1	−0.066 0	−0.016 9	0.397 9
5	−0.177 6	−0.327 6	−0.308 5	0.147 9
6	0.150 6	−0.276 7	−0.288 2	−0.175 0
7	0.300 1	−0.004 7	−0.025 9	−0.302 7
8	0.171 7	0.234 6	0.223 5	−0.158 1
9	−0.090 3	0.245 3	0.249 9	0.104 3
10	−0.245 9	0.043 5	0.055 7	0.249 0
11	−0.171 2	−0.176 8	−0.168 8	0.163 7
12	0.047 7	−0.223 4	−0.225 2	−0.057 1
13	0.206 9	−0.070 3	−0.078 2	−0.210 1
14	0.171 1	0.133 4	0.127 2	−0.166 6
15	−0.014 2	0.205 1	0.205 5	0.021 1

表 6.2 J_0、J_1、Y_0及 Y_1的零点

$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
2.404 8	0.000 0	0.893 6	2.197 1
5.520 1	3.831 7	3.957 7	5.429 7
8.653 7	7.015 6	7.086 1	8.596 0
11.791 5	10.173 5	10.222 3	11.749 2
14.930 9	13.323 7	13.361 1	14.897 4

微分递归关系 不同阶的贝塞尔函数的递归公式在理论和实践中都是重要的. 在下一个例子中我们将推导微分递归关系(differential recurrence relation).

例 4 利用级数定义推导

推导公式 $xJ'_v(x)=vJ_v(x)-xJ_{v+1}(x)$.

解 根据(7)我们有

$$\begin{aligned}
xJ'_v(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+v)}{n!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \\
&= v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \\
&= vJ_v(x)+x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v-1}}_{k=n-1} \\
&= vJ_v(x)-x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2+v+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v+1}=vJ_v(x)-xJ_{v+1}(x).
\end{aligned}$$
■

例 4 中的结果可写成另一种形式. 用 x 去除 $xJ'_v(x)-vJ_v(x)=-xJ_{v+1}(x)$两端，得

$$J'_v(x)-\frac{v}{x}J_v(x)=-J_{v+1}(x).$$

这个表达式可以看成是关于 $J_v(x)$的线性一阶微分方程. 在方程两边同乘积分因子 x^{-v}得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-v}J_v(x)]=-x^{-v}J_{v+1}(x). \tag{14}$$

类似地，可以证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{v}J_v(x)]=x^{v}J_{v-1}(x). \tag{15}$$

请参考练习 6.3 中的习题 19. (14)和(15)中的微分递归关系对于第二类贝塞尔函数 $Y_v(x)$也是适用的. 观察到当 $v=0$ 时由(14)可得

$$J'_0(x)=-J_1(x) \text{ 和 } Y'_0(x)=-Y_1(x). \tag{16}$$

这些结果的应用在练习 6.3 中的习题 35 给出.

球面贝塞尔函数 当 v 是某奇数的一半时，即，$\pm1/2$，$\pm3/2$，$\pm5/2$，…，第一类贝塞尔函数可由初等函数 $\sin x$、$\cos x$ 及 x 的幂来表示. 这类贝塞尔函数称为球面贝塞尔函数(Spherical Bessel function).

例 5 $v=1/2$ 时的球面贝塞尔函数

求 $J_{1/2}(x)$的另一种表达式.

解 当 $v=1/2$ 时，我们由(7)得

$$J_{1/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}.$$

现由前面提到的性质 $\Gamma(1+\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha)$和 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，可得

$$n=0:\ \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$n=1:\ \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}=\frac{3!}{2^3}\sqrt{\pi},$$

$$n=2:\ \Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3\cdot 4\cdot 2}\sqrt{\pi}=\frac{5!}{2^5 2!}\sqrt{\pi},$$

$$n=3:\ \Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7\cdot 5!}{2^6 2!}\sqrt{\pi}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2^6\cdot 6\cdot 2!}\sqrt{\pi}=\frac{7!}{2^7 3!}\sqrt{\pi}.$$

一般地，

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.$$

所以

$$J_{1/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\dfrac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

因为最后这个级数是 $\sin x$ 的麦克劳林级数，所以有

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$ ■

求解勒让德方程 因为 $x=0$ 是方程的平凡点，我们将幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ 代入，转换和式标记并合并级数后得

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=[n(n+1)c_0+2c_2]+[(n-1)(n+2)c_1+6c_3]x$$
$$+\sum_{j=2}^{\infty}[(j+2)(j+1)c_{j+2}+(n-j)(n+j+1)c_j]x^j=0,$$

这意味着

$$n(n+1)c_0+2c_2=0$$
$$(n-1)(n+2)c_1+6c_3=0$$
$$(j+2)(j+1)c_{j+2}+(n-j)(n+j+1)c_j=0$$

或

$$c_2=-\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$
$$c_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$
$$c_{j+2}=-\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j,\ j=2,3,4,\cdots. \tag{17}$$

如果我们分别令 $j=2$，3，4，…，则由递归关系(17)得

$$c_4=-\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}c_2=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0$$
$$c_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}c_3=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$
$$c_6=-\frac{(n-4)(n+5)}{6\cdot 5}c_4=-\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0$$
$$c_7=-\frac{(n-5)(n+6)}{7\cdot 6}c_5$$

$$=-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1$$

等等. 这样我们至少在 $|x|<1$ 上得到两个线性无关的幂级数解:

$$y_1(x)=c_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6+\cdots\right]$$

$$y_2(x)=c_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7+\cdots\right]. \tag{18}$$

注意如果 n 为偶数,则第一个级数有限,而 $y_2(x)$为无穷级数. 例如,如果 $n=4$,则

$$y_1(x)=c_0\left[1-\frac{4\cdot5}{2!}x^2+\frac{2\cdot4\cdot5\cdot7}{4!}x^4\right]=c_0\left[1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right].$$

类似地,当 n 为奇数时,级数 $y_2(x)$终止于 x^n;即当 n 为非负整数时,我们得到勒让德方程的一个 n 次多项式解.

因为常数乘以勒让德方程的解仍是方程的解,所以我们仍要根据 n 是奇或偶的正整数选择 c_0或 c_1的具体值. 对于 $n=0$ 我们选择 $c_0=1$,对于 $n=2,4,6,\cdots$,有

$$c_0=(-1)^{n/2}\frac{1\cdot3\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdots n};$$

而对于 $n=1$ 我们选择 $c_1=1$,对于 $n=3,5,7,\cdots$,有

$$c_1=(-1)^{(n-1)/2}\frac{1\cdot3\cdots n}{2\cdot4\cdots(n-1)}.$$

例如,当 $n=4$ 时我们有

$$y_1(x)=(-1)^{4/2}\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left[1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right]=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

勒让德多项式 以上 n 次多项式解称为勒让德多项式(Legendre polynomial),且用 $P_n(x)$来表示. 由 $y_1(x)$和 $y_2(x)$的级数和前面对 c_0与 c_1的选择,我们可求出前几个勒让德多项式为

$$\begin{aligned} &P_0(x)=1 && P_1(x)=x \\ &P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) && P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ &P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) && P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x). \end{aligned} \tag{19}$$

记住,$P_0(x)$,$P_1(x)$,$P_2(x)$,$P_3(x)$,…依次是微分方程

$$\begin{aligned} n=0:&\ (1-x^2)y''-2xy'=0 \\ n=1:&\ (1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \\ n=2:&\ (1-x^2)y''-2xy'+6y=0 \\ n=3:&\ (1-x^2)y''-2xy'+12y=0 \\ &\ \vdots \end{aligned} \tag{20}$$

的特解.

(19)中的六个勒让德多项式在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的图像由图 6.5 给出.

性质 读者可以用(19)中的勒让德多项式证明以下性质.

(i) $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

(ii) $P_n(1)=1$ (iii) $P_n(-1)=(-1)^n$

(iv) $P_n(0)=0$, n 是奇数 (v) $P'_n(0)=0$, n 是偶数

性质(i)指出, $P_n(x)$ 的奇偶性取决于 n 是奇数还是偶数, 如图 6.5 所示.

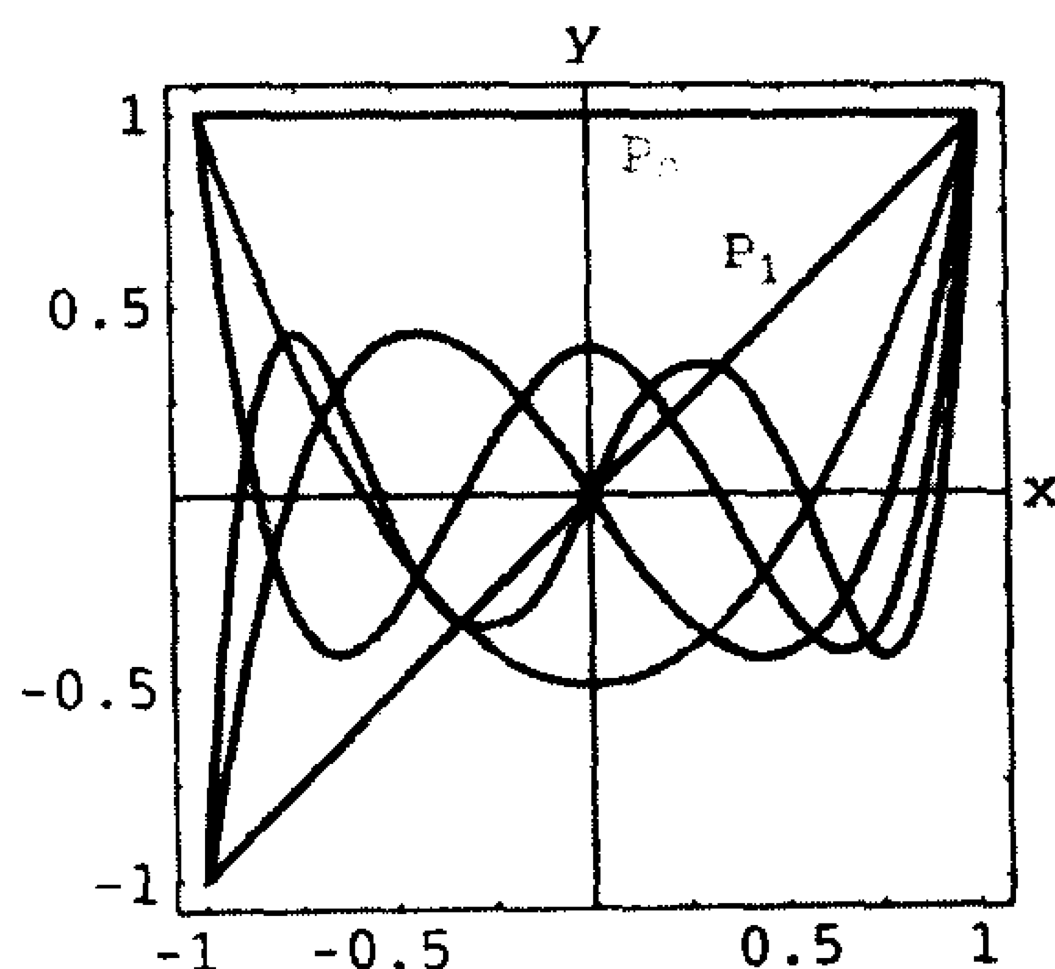


图 6.5 勒让德多项式 ($n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

递归关系 在一些实际应用中, 微分方程不同次数的勒让德多项式的递归关系是重要的. 我们不加证明地给出三项递归关系

$$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0, \tag{21}$$

其适用于 $k=1, 2, 3, \cdots$ 的情况. 在(19)中我们列出了前六个勒让德多项式. 如果我们想求出 $P_6(x)$, 那么可以利用 $k=5$ 时的(21)式求之. 这个关系可以用已知的 $P_4(x)$ 和 $P_5(x)$ 表示出 $P_6(x)$. 请参考练习 6.3 中的习题 30.

另一个公式虽然不是递归关系, 但可以通过微分生成勒让德多项式. 这些多项式的罗得里格斯公式(Rodrigues' formula)为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, n=0,1,2,\cdots. \tag{22}$$

请参考练习 6.3 中的习题 40.

练习 6.3

在习题 1～8 中求出给定微分方程在 $(0, +\infty)$ 上的通解.

1. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$
2. $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$
3. $4x^2y''+4xy'+(4x^2-25)y=0$
4. $16x^2y''+16xy'+(16x^2-1)y=0$
5. $xy''+y'+xy=0$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy']+\left(x-\frac{4}{x}\right)y=0$
7. $x^2y''+xy'+(9x^2-4)y=0$
8. $x^2y''+xy'+\left(36x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$
9. 利用变量变换 $y=x^{-1/2}v(x)$ 求微分方程
$$x^2y''+2xy'+\lambda^2x^2y=0, \quad x>0.$$
的通解.
10. 证明 $y=x^nJ_n(x)$ 是微分方程
$$xy''+(1-2n)y'+xy=0, \quad x>0.$$
的一个特解.
11. 证明 $y=x^{-n}J_n(x)$ 是微分方程

$$xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0, \quad x > 0.$$

的一个特解.

12. 证明 $y = \sqrt{x}J_v(\lambda x)$，$\lambda > 0$ 是微分方程

$$x^2 y'' + \left(\lambda^2 x^2 - v^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0.$$

的一个特解.

在习题 13～18 中利用习题 10、11 和 12 的结果求出给定微分方程在(0，$+\infty$)上的一个特解.

13. $y''+y=0$

14. $xy''-y'+xy=0$

15. $xy''+3y'+xy=0$

16. $4x^2y''+(16x^2+1)y=0$

17. $x^2y''+(x^2-2)y=0$

18. $xy''-5y'+xy=0$

19. (a)利用例 4 的推导过程，证明 $xJ'_v(x)=-vJ_v(x)+xJ_{v-1}(x)$. [提示：利用 $2n+v=2(n+v)-v$.]

(b)利用(a)中的结论推导(15).

20. 利用习题 19(a)中得到的公式推导递归关系 $2vJ_v(x)=xJ_{v+1}(x)+xJ_{v-1}(x)$.

在习题 21 和 22 中利用(14)或(15)推出给定的结果.

21. $\int_0^x rJ_0(r)\mathrm{d}r = xJ_1(x)$

22. $J'_0(x)=J_{-1}(x)=-J_1(x)$

23. 利用例 5 的推导过程，用 $\cos x$ 和 x 的幂表示出 $J_{-1/2}(x)$.

24. (a)利用习题 23、习题 20 中的递归关系，及例 5 中的结果，用 $\sin x$、$\cos x$ 和 x 的幂表示出 $J_{3/2}(x)$、$J_{-3/2}(x)$和 $J_{5/2}(x)$.



(b)利用绘图工具绘出 $J_{1/2}(x)$、$J_{-1/2}(x)$、$J_{3/2}(x)$、$J_{-3/2}(x)$和 $J_{5/2}(x)$的图像.

25. 利用变量代换 $s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}$ 将硬化弹簧的微分方程 $mx''+ke^{-\alpha t}x=0$，$\alpha>0$，变为

$$s^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} + s\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + s^2x = 0.$$

26. 当 w 为贝塞尔方程 $t^2w''+tw'+(t^2-1/9)w=0$，$t>0$ 的解时，证明 $y=x^{1/2}w\left(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2}\right)$是气体微分方程 $y''+\alpha^2xy=0$，$x>0$ 的解. $\left[\text{提示：在进行微分、代换和化简后，令 } t=\frac{2}{3}\alpha x^{3/2}.\right]$

27. 利用习题 26 的结果，用贝塞尔函数表示出气体方程在 $x>0$ 时的通解.

28. 可以证明通过变量代换，微分方程 $xy''+\lambda y=0$ 在区间(0，$+\infty$)上的通解为

$$y = c_1\sqrt{x}J_1(2\sqrt{\lambda x}) + c_2\sqrt{x}Y_1(2\sqrt{\lambda x}).$$

在 $\lambda=1$ 的情况下，通过直接代入证明 $y=\sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$ 是方程的一个特解.

29. (a)利用勒让德方程的显式解 $y_1(x)$与 $y_2(x)$以及对 c_0和 c_1的适当选择求出勒让德多项式 $P_6(x)$和 $P_7(x)$.

(b)写出以 $P_6(x)$和 $P_7(x)$为特解的微分方程.

30. 利用递归关系(21)及 $P_0(x)=1$ 和 $P_1(x)=x$ 生成后面的六个勒让德多项式.

31. 证明微分方程

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} + \cos\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} + n(n+1)(\sin\theta)y = 0$$

可以通过代换 $x=\cos\theta$ 转换为勒让德方程.

讨论题

32. 在该题中我们忽略图 6.3 给出的图像. 利用代换 $y=u/\sqrt{x}$ 说明贝塞尔方程(1)有另一种形式

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(1-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)u=0.$$

这与习题 12 中的微分方程的形式一致．对于确定的 v 值，讨论如何通过这个方程辨别(1)的解在 $x\to+\infty$ 时的性质．

33. 讨论如何利用 $J_0'(x)=-J_1(x)$(习题 22)和微积分学中的罗尔定理说明 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 的零点是交替出现的，即在 $J_0(x)$ 任两个连续的零点之间存在 $J_1(x)$ 的一个零点．请参考图 6.3 和表 6.2.

34. 当 $v=n$，n 为非负整数时，第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$ 可由定积分 $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t-nt)\mathrm{d}t$ 表示．当 n 为非负整数时，如何从这个积分得出对所有的 x 有 $|J_n(x)|\leqslant 1$？请讨论之．

计算机实验作业

35. (a)利用例 3 中给出的通解求解初值问题

$$4x''+e^{-0.1t}x=0, x(0)=1, x'(0)=-\frac{1}{2}.$$

并利用 $J_0'(x)=-J_1(x)$ 和 $Y_0'(x)=-Y_1(x)$，根据表 6.1 或 CAS 确定其系数．

(b)利用 CAS 在区间 $0\leqslant t\leqslant 200$ 上绘出(a)中得到的解的图像．

36. (a)利用习题 27 中得到的通解求解初值问题

$$4x''+tx=0, x(0.1)=1, x'(0.1)=-\frac{1}{2}.$$

利用 CAS 确定其系数．

(b)利用 CAS 在区间 $0\leqslant t\leqslant 200$ 上绘出(a)中得到的解的图像．

37. 一根匀质细柱，垂直于地面并有一端嵌入地面．如果其长度远远超过一确定的临界值，那么它将在自重的影响下发生偏移或弯曲．证明在点 $P(x)$ 处相对于垂直方向的偏移角 $\theta(x)$ 是边界值问题

$$EI\frac{d^2\theta}{dx^2}+\delta g(L-x)\theta=0, \theta(0)=0, \theta'(L)=0,$$

的解，其中 E 是杨氏模量，I 是横截面的转动惯量，δ 是线密度常数，x 是柱体上的点距地面的距离，如图 6.6. 只有在边界值问题有非平凡解时柱体才会弯曲．

(a)首先进行变量代换 $t=L-x$，并叙述得到的边界值问题．然后利用习题 27 的结果，用贝塞尔函数表示出微分方程的通解．

(b)如果一根实心铁棒半径 $r=0.05\text{in}$，$\delta g=0.28A\text{lb/in}$，$E=2.6\times10^7\ \text{lb/in}^2$，$A=\pi r^2$，且 $I=\frac{1}{4}\pi r^4$，利用 CAS 求出临界长度 L.

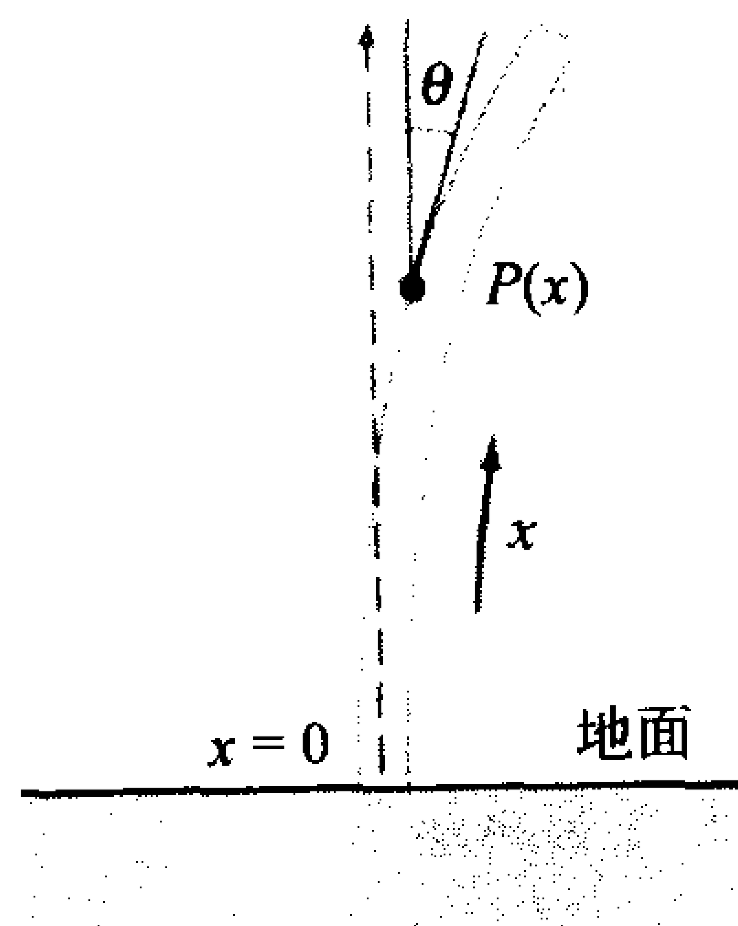


图 6.6

38. 在 5.2 节的例 3 中我们看到，当一个垂直的常压力或载荷 P 施加于一匀质细柱的横截面时，偏移量 $y(x)$ 满足边界值问题

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0, y(0)=0, y(L)=0.$$

(a)如果弯曲的倔强因子 EI 与 x 成正比，那么 $EI(x)=kx$，这里 k 为正比例常数．如果 $EI(L)=kL=M$ 是倔强因子的最大值，那么 $k=M/L$ 且 $EI(x)=Mx/L$. 利用习题 28 中的信息求出

$$M\frac{x}{L}\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0, y(0)=0, y(L)=0$$

的解．假设已知 $\sqrt{x}Y_1(2\sqrt{\lambda x})$ 在 $x=0$ 时不为 0.

(b)利用表 6.2 求出柱体的欧拉载荷 P_1.

(c)利用 CAS 绘出相应于欧拉载荷 P_1 的第一弯曲方式 $y_1(x)$ 的图像. 为简单起见假设 $c_1=1$ 且 $L=1$.

39. 利用表 6.2 或 CAS 求出 $J_0(x)$ 两个连续零点之间的差值. 对 $J_1(x)$ 做同样的工作. 利用表格或 CAS, 对 $J_2(x)$ 重复同样的过程. 试用公式阐述所得推断. 讨论这个数据和习题 32 有何联系.

40. 在本题中我们忽略了(19)式给出的勒让德多项式列表及图 6.5 给出的图像.

(a)利用罗得里格斯公式(22)生成勒让德多项式 $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_7(x)$. 利用 CAS 进行微分和化简.

(b)利用 CAS 绘出 $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_7(x)$ 在区间$[-1, 1]$上的图像.

(c)利用 CAS 中的求根过程找出 $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_7(x)$ 的零点. 如果勒让德多项式是 CAS 中的内置函数, 那么求出更高次勒让德多项式的零点. 推测如何求得任意勒让德多项式 $P_n(x)$ 的零点, 并检验这个推测是否正确.

第 6 章复习题

1. 假设已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-4)^k$ 在 $x=-2$ 处收敛, 在 $x=13$ 处发散. 讨论级数在 $x=-7$, 0, 7, 10, 11 处是否收敛. 可能的答案有收敛、不收敛和不一定.

2. 利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的麦克劳林级数以及长除法求出函数 $f(x)=\sin x/\cos x$ 的幂级数展开式的前三个非零项.

在习题 3 和 4 中不解方程, 给出以 0 为中心的幂级数解收敛半径 R 的最小值.

3. $(x^2-2x+10)y''+y=0$

4. $(1-\sin x)y''+xy=0$

在习题 5 和 6 中构造具有给定性质的线性二阶微分方程.

5. $x=1$ 为规则奇点且 $x=0$ 为不规则奇点.

6. $x=1$ 和 $x=-3$ 为规则奇点.

在习题 7～12 中利用适当的关于 $x=0$ 的无穷级数方法求出给定微分方程的两个解.

7. $2xy''+y'+y=0$

8. $y''-xy'-y=0$

9. $(x-1)y''+3y=0$

10. $y''-x^2y'+xy=0$

11. $xy''-(x+2)y'+2y=0$

12. $(\cos x)y''+y=0$

在习题 13 和 14 中求解给定的初值问题.

13. $y''+xy'+2y=0$. $y(0)=3$, $y'(0)=-2$

14. $(x+2)y''+3y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

在习题 15 和 16 中检验 $x=0$ 是给定微分方程的平凡点、奇点, 还是不规则奇点. [提示: 回顾 $\cos x$ 和 e^x 的麦克劳林级数.]

15. $xy''+(1-\cos x)y'+x^2y=0$

16. $(e^x-1-x)y''+xy=0$

17. 注意到 $x=0$ 是微分方程 $y''+x^2y'+2xy=5-2x+10x^3$ 的平凡点. 利用假设 $y=\sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$ 求出由三个以 $x=0$ 为中心的幂级数组成的通解 $y=y_c+y_p$.

18. 一阶微分方程 $dy/dx=x^2+y^2$ 不能利用初等函数求解. 不过其解可由贝塞尔函数表示.

(a)证明通过代换 $y=-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ 可以将方程变为 $u''+x^2u=0$.

(b)当 w 是贝塞尔方程 $x^2w''+xw'+(x^2-1/16)w=0$ 的解时, 证明 $u=x^{1/2}w\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ 是 $u''+x^2u=0$

的解.

(c)利用 6.3 节中的(14)和(15)的如下形式

$$J'_v(x)=\frac{v}{x}J_v(x)-J_{v+1}(x) \text{ 和 } J'_v(x)=-\frac{v}{x}J_v(x)+J_{v-1}(x)$$

证明 $dy/dx=x^2+y^2$ 的单参数解族为

$$y=x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-cJ_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

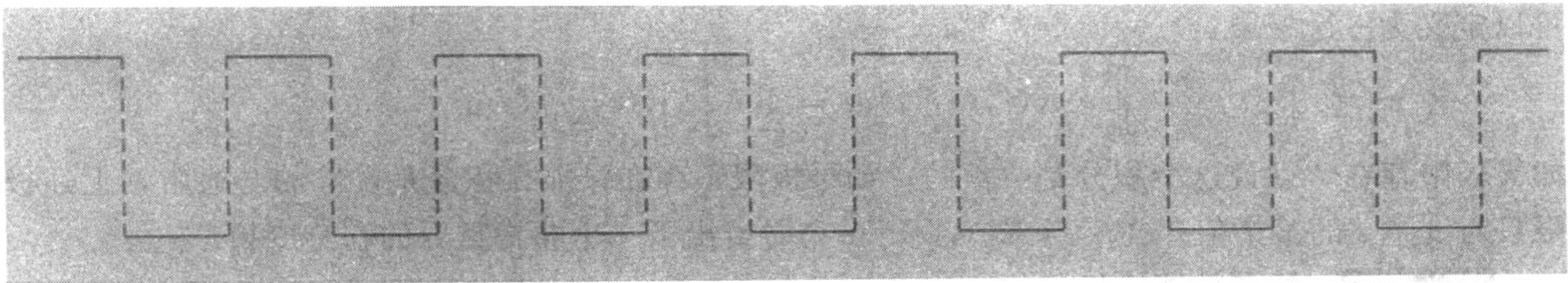
19. 我们知道当 $n=1$ 时，$y_1(x)=x$ 是勒让德微分方程 $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ 的解. 证明在区间 $-1<x<1$ 上的另一个线性无关解为

$$y_2(x)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1.$$

20. (a) 利用二项式级数证明

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

(b) 利用(a)中结果证明 $P_n(1)=1$ 和 $P_n(-1)=(-1)^n$.



方形函数；见图 7.36

第 7 章　拉普拉斯变换

在物理系统的线性数学模型中，例如弹簧/质量系统和串联电路，微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=f(t)\text{ 或 }L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

的右边(也就是输入函数)是一种施迫函数，表示外力 $f(t)$或外部电压 $E(t)$. 在 5.1 节中，我们考虑了 f 和 E 是连续函数的情形. 但是，离散的施迫函数也是很常见的. 例如，对电路作用的外部电压可以是分段连续的，也可以是周期性的. 在这种情况下若用第 4 章介绍的方法解电路的微分方程是非常困难的. 本章介绍的拉普拉斯变换是简化求解这类方程的有力工具，正如 7.4 节所介绍的.

7.1　拉普拉斯变换的定义

在初等积分中，读者已经知道了微分和积分是一种变换，即这些运算把一个函数变为另外一个函数. 例如，对于函数 $f(x)=x^2$，用微分和积分运算依次将其变为线性函数和一族三次方的多项式函数：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2=2x$ 及 $\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+c$. 此外，这两种变换都有线性性质(linearity property)，即函数线性组合的变换是变换的线性组合. 对常数 α 和 β，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

及

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

成立，假设导数和积分都存在. 在本节中，我们将学习一种特殊的积分变换，称为拉普拉斯变换(Laplace transform). 除了线性性质外，拉普拉斯变换还有很多有意思的性质，这些性质使得它在解线性初值问题的时候非常有用.

积分变换　若 $f(x,y)$是一个双变量函数，那么 f 关于一个变量的有限积分是另外一个变量的函数. 例如，把 y 看成是常数，则有$\int_1^2 2xy^2\,\mathrm{d}x=3y^2$. 类似地，我们定义形如$\int_a^b K(s,t)f(t)\mathrm{d}t$ 的积分为把变量 t 的函数 f 变换为变量 s 的函数 F. 这里我们专门讨论积分变换(integral transform)，它的定义区间为无界区间$[0，+\infty)$. 若 $f(t)$在 $t\geqslant 0$ 时有定义，则无限积分 $\int_0^{+\infty}K(s,t)f(t)\mathrm{d}t$

可以定义为一个极限：

$$\int_0^{+\infty} K(s,t)f(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

如果极限存在，就说这个积分是收敛的；如果极限不存在，那么积分是发散的．通常，上述极限只对变量 s 的某个值存在．当 $K(s, t)=\mathrm{e}^{-st}$时给出了一个非常重要的积分变换．

定义 7.1　拉普拉斯变换

令 f 是一个定义在 $t\geqslant 0$ 上的函数，则积分

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

称为 f 的拉普拉斯变换(Laplace transform)，这里假设积分是收敛的．

当积分(2)收敛时，这个积分是 s 的函数．在通常的讨论中，我们用小写字母表示要变换的函数，用相应的大写字母表示拉普拉斯变换，例如

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s),\quad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s),\quad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

例 1　定理 7.1 的应用

求$\mathscr{L}\{1\}$.

解　由(2)知，

$$\mathscr{L}\{1\}=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}(1)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s}\bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}$$

设 $s>0$．也就是当 $s>0$ 时，指数$-sb$ 是负的，并且当 $b\to+\infty$时，$\mathrm{e}^{-sb}\to 0$．当 $s<0$ 时积分是发散的．■

用极限符号表示显得有些繁琐，因此我们用 $\Big|_0^{+\infty}$ 表示 $\lim\limits_{b\to+\infty}(\,)\Big|_0^b$．例如，

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}(1)\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, s>0.$$

在极限的上界处，我们知道当 $t\to+\infty$且 $s>0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-st}\to 0$．

例 2　定义 7.1 的应用

求$\mathscr{L}\{t\}$.

解　由定义 7.1 可得$\mathscr{L}\{t\}=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}t\,\mathrm{d}t$．再由分部积分法，并由 $\lim\limits_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-st}=0$，$s>0$ 和例 1 的结果我们可得

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{-t\mathrm{e}^{-st}}{s}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$ ■

例 3　定义 7.1 的运用

求$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-3t}\}$.

解　由定义 7.1，可得

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-3t}\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s+3)t}\mathrm{d}t$$

$$= \left.\frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\right|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{s+3}, s > -3.$$

这个结果可由当 $s+3>0$ 或 $s>-3$ 时，$\lim_{t\to+\infty} e^{-(s+3)t} = 0$ 得到. ■

例 4　定义 7.1 的运用

求 $\mathscr{L}\{\sin 2t\}$.

解　由定义 7.1 以及分部积分法可得

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin 2t\mathrm{d}t = \left.\frac{-e^{-st}\sin 2t}{s}\right|_0^{+\infty} + \frac{2}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos 2t\mathrm{d}t, \quad s > 0$$

$\lim_{t\to x} e^{-st}\cos 2t = 0,\quad s > 0$　　　　sin2t 的拉普拉斯变换

↓　　　　　　　　　　　　↓

$$= \frac{2}{s}\left[\left.\frac{-e^{-st}\cos 2t}{s}\right|_0^{+\infty} - \frac{2}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin 2t\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathscr{L}\{\sin 2t\}.$$

此处，等式两边都有 $\mathscr{L}\{\sin 2t\}$. 可以解这个等式，得到

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \quad s > 0.$$ ■

$\mathscr{L}$是一个线性变换　对函数的线性组合，我们有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\mathrm{d}t = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\mathrm{d}t + \beta\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)\mathrm{d}t.$$

对 $s>c$ 这两个积分均收敛. 因此，有

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{3}$$

因为有(3)的性质，所以$\mathscr{L}$被称为是线性变换(linear transform). 例如，由例 1、例 2，有

$$\mathscr{L}\{1+5t\} = \mathscr{L}\{1\} + 5\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2},$$

再由例 3、例 4，有

$$\mathscr{L}\{4e^{-3t} - 10\sin 2t\} = 4\mathscr{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}.$$

我们用下一个定理来把前述例子的结论一般化. 从此处开始，我们不对 s 加任何限制；只要 s 能够充分保证拉普拉斯变换的积分是收敛的就可以.

定理 7.1　一些基本函数的变换

(a) $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

(b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$，　$n=1, 2, 3, \cdots$　　(c) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

(d) $\mathscr{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2}$ (e) $\mathscr{L}\{\cos kt\}=\frac{s}{s^2+k^2}$

(f) $\mathscr{L}\{\sinh kt\}=\frac{k}{s^2-k^2}$ (g) $\mathscr{L}\{\cosh kt\}=\frac{s}{s^2-k^2}$

$\mathscr{L}\{f(t)\}$存在的充分条件 定义拉普拉斯变换的积分不一定收敛. 例如，$\mathscr{L}\{1/t\}$和$\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$都不存在. $\mathscr{L}\{f(t)\}$存在的充分条件是 f 在$[0, +\infty)$上分段连续并且在 $t>T$ 时是指数阶的. 函数 f 在$[0, +\infty)$上是分段连续的(piecewise continuous)，若在任何区间 $0\leqslant a\leqslant t\leqslant b$ 上的 t_k，$k=1, 2, \cdots, n(t_{k-1}<t_k)$，使得 f 有有限个不连续点，但在 $t_{k-1}<t<t_k$上是连续的. 请参考图 7.1. 指数阶(exponential order)的概念如下.

定义 7.2 指数阶

函数 f 称为是 c 阶指数的(exponential order c)，若存在常数 c，$M>0$，$T>0$，使得 $|f(t)|\leqslant Me^{ct}$ 对于所有的 $t>T$ 均成立.

如果 f 是增函数，那么条件 $|f(t)|\leqslant Me^{ct}$，$t>T$ 表示 f 在$(T, +\infty)$上的图形上升速度不会超过指数函数 Me^{ct}，其中 c 为正常数. 请参考图 7.2. 函数 $f(t)=t$，$f(t)=e^{-t}$，$f(t)=2\cos t$ 的指数阶均为 $c=1$，$t>0$，因为分别有

$$|t|\leqslant e^t,\ |e^{-t}|\leqslant e^t,\ |2\cos t|\leqslant 2e^t.$$

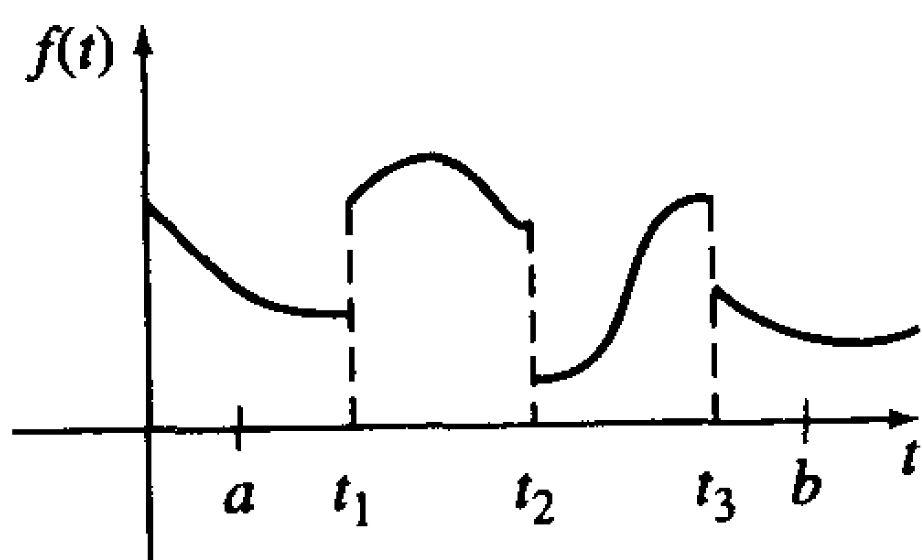


图 7.1

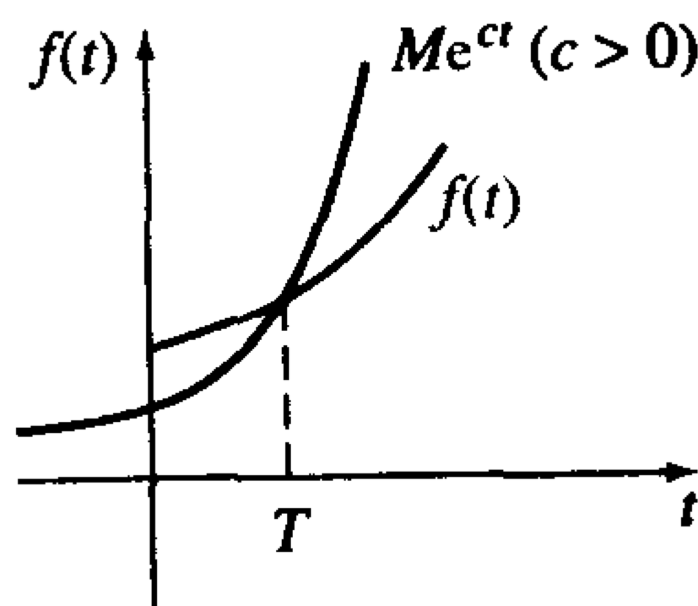
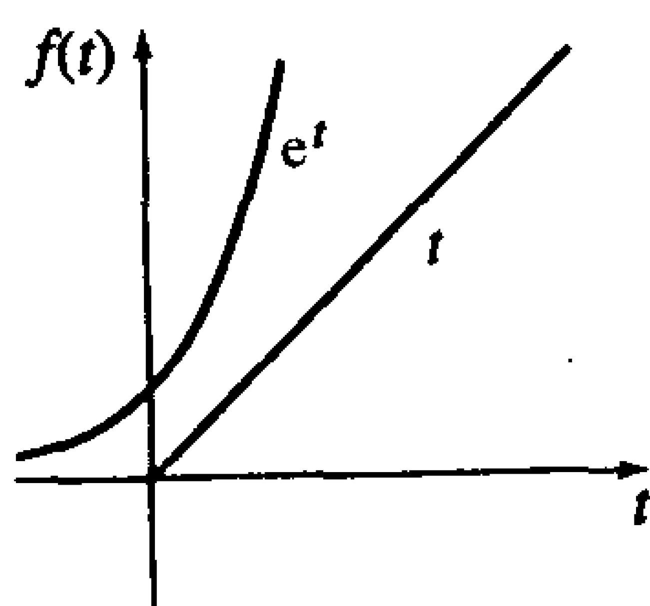
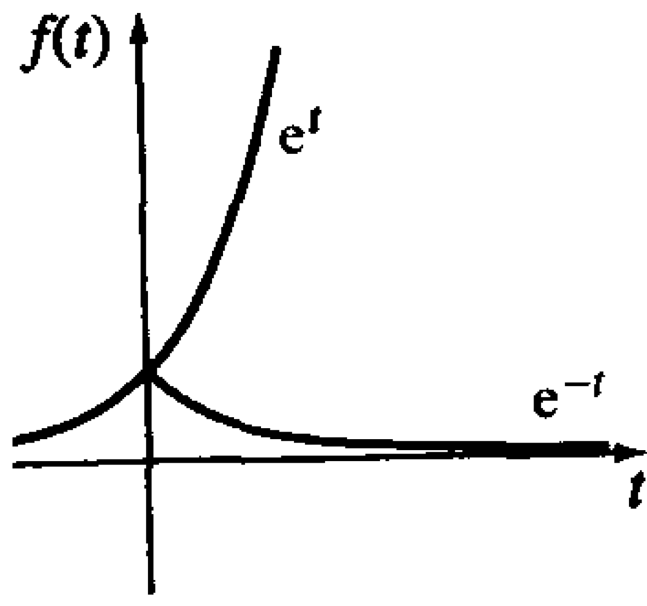


图 7.2

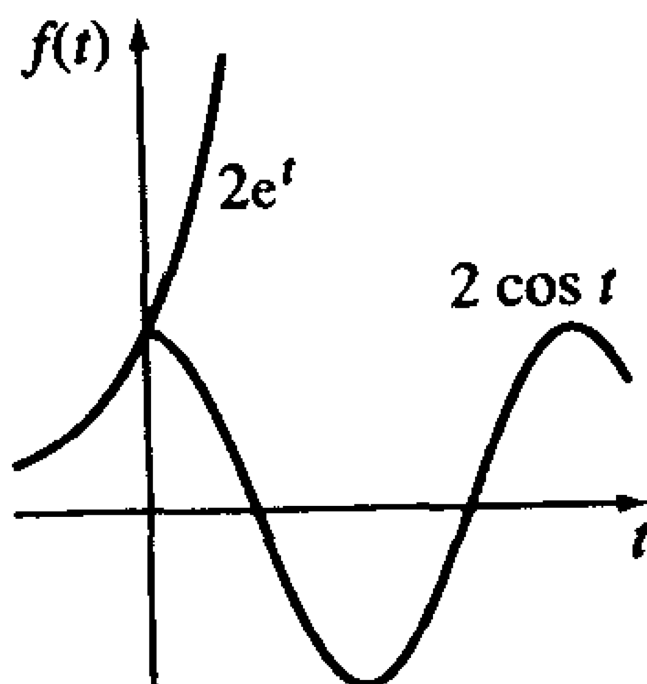
图 7.3 给出了这些图形在$[0, +\infty)$上的比较.



a)



b)



c)

图 7.3

形如 $f(t)=e^{t^2}$ 的函数不是指数阶的，因为如图 7.4 所示，它的图形增长比 e 的任何正数幂函数都快，$t>c>0$.

t 的正整数幂函数总是指数阶的，因为 $c>0$ 时，对于 $t>T$ 有

$$|t^n| \leqslant Me^{ct} \text{ 或 } \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leqslant M, \quad t > T$$

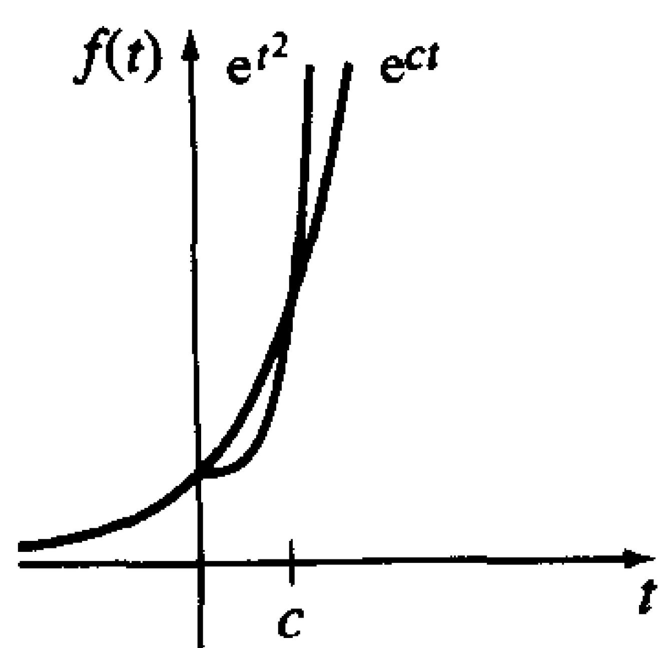


图 7.4

等价于 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n/e^{ct}$ 有限，$n=1, 2, 3, \cdots$. 这个结果可以用 n 次洛必达法则得到.

定理 7.2 **存在性的充分条件**

若 $f(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是分段连续的，并且在 $t>T$ 时是 c 阶指数的，则 $\mathscr{L}\{f(t)\}$ 对所有的 $s>c$ 均存在.

证 $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = I_1 + I_2.$

积分 I_1 是存在的，因为它可以写成在多个区间上的积分的和，在这些区间上 $e^{-st}f(t)$ 是连续的. 对 $s>c$，有

$$|I_2| \leqslant \int_T^{+\infty} |e^{-st}f(t)|dt \leqslant M\int_T^{+\infty} e^{-st}e^{ct}dt$$

$$= M\int_T^{+\infty} e^{-(s-c)t}dt = -M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\bigg|_T^{+\infty} = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}.$$

因为 $\int_T^{+\infty} Me^{-(s-c)t}dt$ 是收敛的，所以通过广义积分的比较检验法可知积分 $\int_T^{+\infty} |e^{-st}f(t)|dt$ 也是收敛的. 这说明当 $s>c$ 时，I_2 是存在的. I_1 和 I_2 的存在性说明当 $s>c$ 时 $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ 是存在的. ■

例 5 **分段函数的变换**

求 $\mathscr{L}\{f(t)\}$，其中 $f(t) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant t < 3 \\ 2, t \geqslant 3 \end{cases}$.

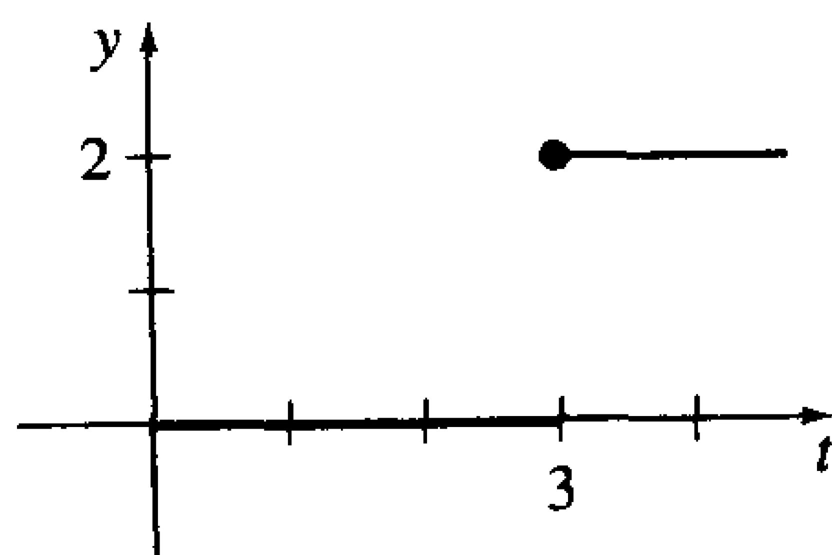


图 7.5

解 这个分段连续函数如图 7.5. 因为 f 是分两段定义的，所以 $\mathscr{L}\{f(t)\}$ 表示为两个积分的和：

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^3 e^{-st}(0)dt + \int_3^{+\infty} e^{-st}(2)dt$$

$$= -\frac{2e^{-st}}{s}\bigg|_3^{+\infty}$$

$$= \frac{2e^{-3s}}{s}, \quad s > 0.$$ ■

注 在本章中，我们的讨论主要是围绕着分段连续函数和指数阶函数进行的. 但是，我们要注意这些条件是拉普拉斯变换存在的充分条件而不是必要条件. 函数 $f(t)=t^{-1/2}$ 不是区间 $[0, +\infty)$ 上分段连续函数，但是其拉普拉斯变换也存在. 请参考练习 7.1 的习题 40.

练习 7.1

在习题 1～18 中，利用定义 7.1 求 $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<1\\ 1, & t\geqslant 1\end{cases}$

2. $f(t)=\begin{cases}4, & 0\leqslant t<2\\ 0, & t\geqslant 2\end{cases}$

3. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1\\ 1, & t\geqslant 1\end{cases}$

4. $f(t)=\begin{cases}2t+1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$

5. $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t<\pi\\ 0, & t\geqslant \pi\end{cases}$

6. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\pi/2\\ \cos t, & t\geqslant \pi/2\end{cases}$

7.

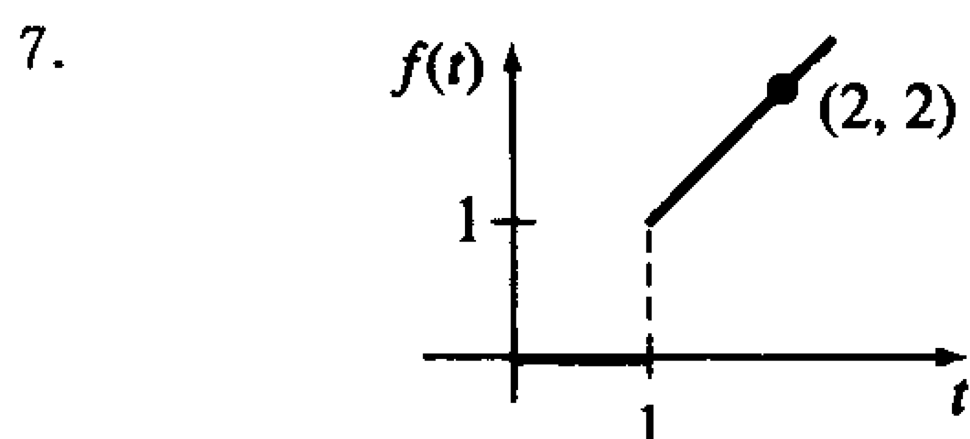


图 7.6

8.

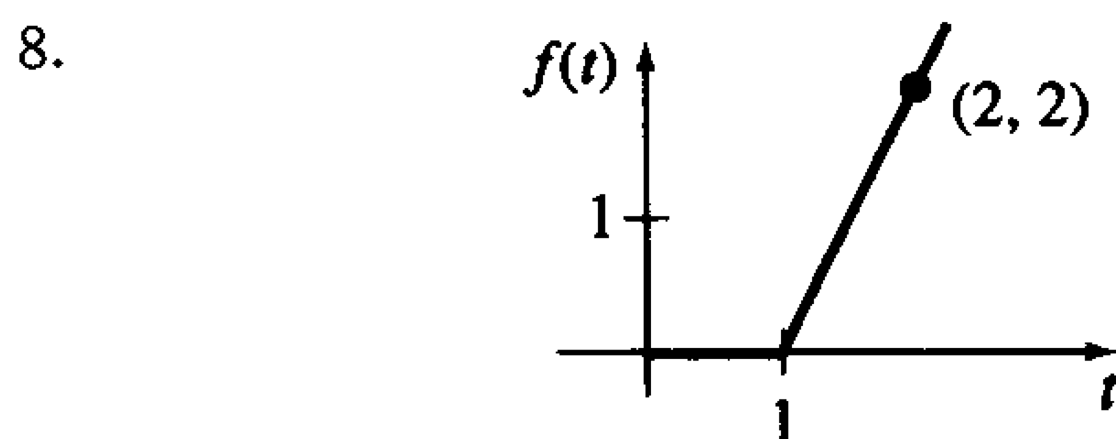


图 7.7

9.

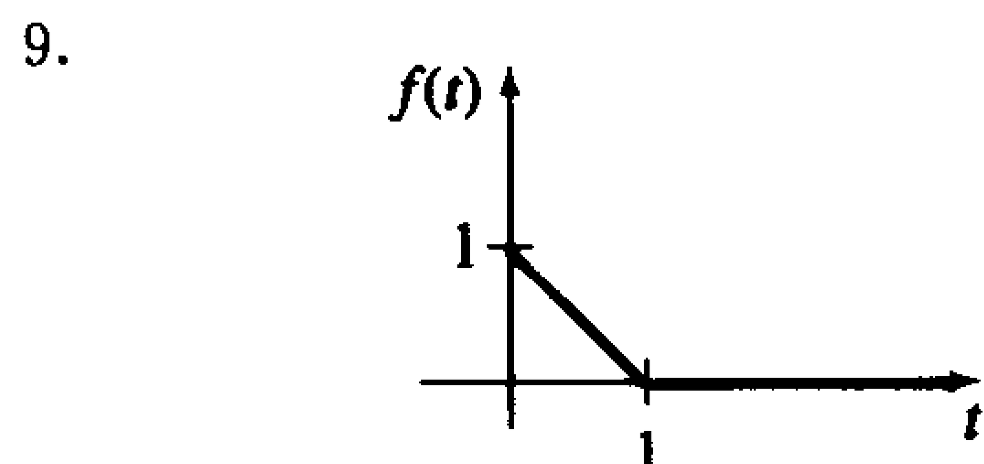


图 7.8

10.

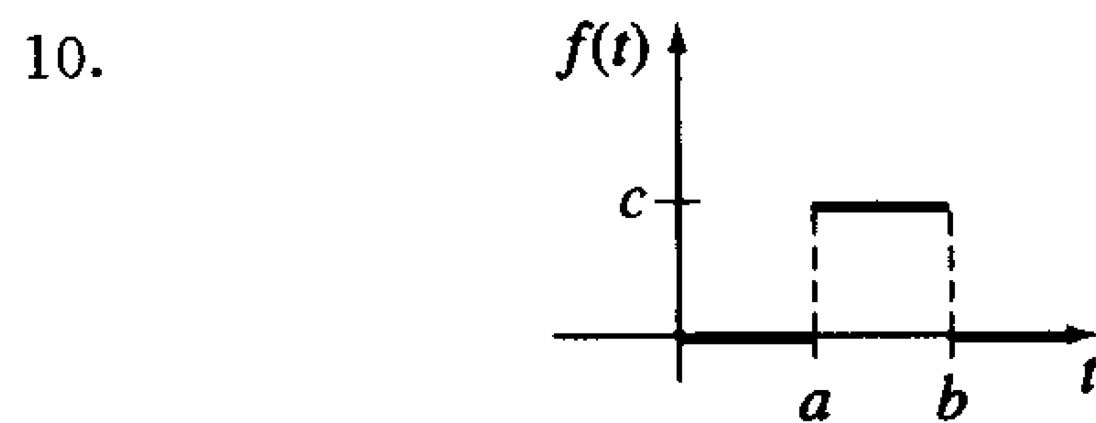


图 7.9

11. $f(t)=e^{t+7}$

12. $f(t)=e^{-2t-5}$

13. $f(t)=te^{4t}$

14. $f(t)=t^2e^{-2t}$

15. $f(t)=e^{-t}\sin t$

16. $f(t)=e^{t}\cos t$

17. $f(t)=t\cos t$

18. $f(t)=t\sin t$

在习题 19～36 中，利用定理 7.1 求$\mathscr{L}\{f(t)\}$.

19. $f(t)=2t^4$

20. $f(t)=t^5$

21. $f(t)=4t-10$

22. $f(t)=7t+3$

23. $f(t)=t^2+6t-3$

24. $f(t)=-4t^2+16t+9$

25. $f(t)=(t+1)^3$

26. $f(t)=(2t-1)^3$

27. $f(t)=1+e^{4t}$

28. $f(t)=t^2-e^{-9t}+5$

29. $f(t)=(1+e^{2t})^2$

30. $f(t)=(e^{t}-e^{-t})^2$

31. $f(t)=4t^2-5\sin 3t$

32. $f(t)=\cos 5t+\sin 2t$

33. $f(t)=\sinh kt$

34. $f(t)=\cosh kt$

35. $f(t)=e^{t}\sinh t$

36. $f(t)=e^{-t}\cosh t$

在习题 37 和 38 中，用合适的三角函数恒等式求$\mathscr{L}\{f(t)\}$.

37. $f(t)=\sin 2t\cos 2t$

38. $f(t)=\cos^2 t$

39. 在 6.3 节中，我们在贝塞尔方程的解中使用了伽马函数. 这个函数的一个定义是无穷积分 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \alpha>0$.

(a)证明 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

(b)证明 $\mathscr{L}\{t^{\alpha}\}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\alpha>-1.$

40. 用 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 及习题 39 求解下列变换：

(a) $f(t)=t^{-1/2}$ (b) $f(t)=t^{1/2}$ (c) $f(t)=t^{3/2}$.

讨论题

41. 尽管定理 7.1(b)的证明需要数学推导，但是这个结果可以简单得证. 证明 $\mathscr{L}\{t^{n}\}=\dfrac{n}{s}\mathscr{L}\{t^{n-1}\}$. 当令 n 取连续值 1，2，3，…时看看会有什么情况发生.

42. 构造一个指数阶函数 $F(t)$，但 $f(t)=F'(t)$不是指数阶的. 构造一个非指数阶函数 f 使其拉普拉斯变换存在.

43. 假设$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$，$s>c_1$，$\mathscr{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$，$s>c_2$. 什么时候有$\mathscr{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=F_1(s)+F_2(s)$成立？

44. 图 7.4 表明函数 $f(t)=e^{t^2}$ 不是指数阶的，但没有严格证明. 若有 $t^2>\ln M+ct$，$M>0$，t 充分大，如何证明对任何 c 都有 $e^{t^2}>Me^{ct}$？讨论之.

45. 利用定理 7.1 的(c)证明 $\mathscr{L}\{e^{(a+ib)t}\}=\dfrac{s-a+ib}{(s-a)^2+b^2}$，其中 a 和 b 是实数，$i^2=-1$. 讨论如何使用欧拉公式推导结果

$$\mathscr{L}\{e^{at}\cos bt\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \text{ 和 } \mathscr{L}\{e^{at}\sin bt\}=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

46. 在什么条件下，线性函数 $f(x)=mx+b$，$m\neq0$ 是线性变换？

7.2 逆变换与导数变换

在本节中我们将说明如何使用拉普拉斯变换解微分方程. 开始我们需要介绍一些导数 dy/dt，d^2y/dt^2…的拉普拉斯变换及其逆变换的概念. 我们先讲拉普拉斯变换 $F(s)$的逆变换. 这个思想是：若 $F(s)=(-2s+6)/(s^2+4)$是拉普拉斯变换，求一个函数 $f(t)$，使得$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$. 请参考例 2.

逆变换 若 $F(s)$表示函数 $f(t)$的拉普拉斯变换，即$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$，我们就说 $f(t)$是 $F(s)$的*逆拉普拉斯变换*(inverse Laplace transform)，记 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. 例如，7.1 节中的例 1、例 2 和例 3 的逆变换分别为

$$1=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\},t=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\},e^{-3t}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}.$$

类似于定理 7.1，一些常用函数的逆变换如下所示.

定理 7.3 一些逆变换

(a) $1=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$

(b) $t^n=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}$， $n=1，2，3，\cdots$ (c) $e^{at}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}$

(d) $\sin kt=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\}$ (e) $\cos kt=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\}$

(f) $\sinh kt=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$ (g) $\cosh kt=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$

求逆变换时，有时会发现 s 的函数并不和表中的拉普拉斯变换 $F(s)$ 的形式完全一致．这种情况可能需要令 s 的函数乘上或除以一个适当的常数．

例1 **应用定理7.3**

求(a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$，(b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$.

解 (a)为了和定理7.3中的(b)的形式保持一致，由观察知 $n+1=5$，即 $n=4$，则乘以并同时除以4!，可得：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}=\frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}=\frac{1}{24}t^4.$$

(b)为了和定理7.3中的(d)的形式保持一致，由观察知 $k^2=7$，因此 $k=\sqrt{7}$，我们乘以并同时除以 $\sqrt{7}$ 可得：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}=\frac{1}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\}=\frac{1}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t.$$ ■

L^{-1}是线性变换 逆拉普拉斯变换也是线性变换，也就是对于常数 α、β，有

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}+\beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}, \tag{1}$$

其中 F 和 G 是某个函数 f 和 g 的变换．和7.1节中的(2)式一样，(1)式可以推广到任意有限个拉普拉斯变换的线性组合．

例2 **逐项分解与线性性质**

求 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$.

解 我们先把这个 s 的函数写成两个分式和的表达形式，再由(1)式可得：

逐项分解↓ 线性性及固定的常数↓

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4}+\frac{6}{s^2+4}\right\}=-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{6}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \tag{2}$$

$$=-2\cos 2t+3\sin 2t.$$ ← 在定理7.3的(e)和(d)中，令 $k=2$ ■

部分分式 部分分式在求拉普拉斯逆变换中起着重要的作用．如2.2节中所述，在计算机系统上用简单的命令可以快速实现有理分式的分解．一些CAS(computer algebra systems)有专门处理拉普拉斯变换及其逆变换的软件包．但是当不能使用这些软件的时候，我们就要学习一些基本的代数变换，用来处理拉普拉斯变换 $F(s)$ 的分母含有不同线性因子、重复线性因子以及没有实数因子的多项式的情形．尽管我们在本章会逐步展开对这些问题的讨论，但是读者最好还是先参考一下微积分中的有关内容，以便对这部分内容有一个完整的了解．

下一个例子说明了在 $F(s)$ 的分母含有不同线性因子时，如何进行部分分式分解．

例3 **部分分式：不同的线性因子**

求 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

解 这里存在唯一的实常数 A、B、C，使得

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4}$$
$$=\frac{A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

因为等式两边的分母是相同的，所以其分子也必须相同：

$$s^2+6s+9=A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2). \tag{3}$$

比较等式两边 s 相同次幂的系数，可由(3)式得到含有三个方程的方程组，三个未知数为 A、B、C. 但是，这里有一个简单的方法可以求出这些未知数. 若令(3)中的 $s=1$，$s=2$，$s=-4$，则分别可得：[1]

$$16=A(-1)(5),\quad 25=B(1)(6),\quad 1=C(-5)(-6),$$

所以有 $A=-16/5$，$B=25/6$，$C=1/30$. 因此部分分式分解为

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}=-\frac{16/5}{s-1}+\frac{25/6}{s-2}+\frac{1/30}{s+4}, \tag{4}$$

因此，由 $\mathscr{L}^{-1}$ 的线性性及定理 7.3 的(c)可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}=-\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{25}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$
$$=-\frac{16}{5}e^{t}+\frac{25}{6}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-4t}. \tag{5}$$

■

变换导数 正如本章引言部分所指出的，我们的目标是用拉普拉斯变换解微分方程. 为此，我们需要先计算 $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ 和 $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$. 例如，若当 $t\geqslant 0$ 时，f' 是连续的，则由分部积分得

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f'(t)dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$$
$$=-f(0)+s\,\mathscr{L}\{f(t)\}$$

或

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0). \tag{6}$$

这里假设当 $t\to+\infty$ 时有 $e^{-st}f(t)\to 0$. 类似地，由(6)可得，

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f''(t)dt=e^{-st}f'(t)\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-st}f'(t)dt$$
$$=-f'(0)+s\,\mathscr{L}\{f'(t)\}$$
$$=s[sF(s)-f(0)]-f'(0) \qquad \leftarrow \text{由(6)式得}$$

或

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0). \tag{7}$$

用此方法可以得到

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\}=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0). \tag{8}$$

由(6)、(7)、(8)可得函数 f 的导数的拉普拉斯变换的递归性质. 下一个定理给出了 f 的 n 阶导数的拉普拉斯变换. 这里略去证明.

---

[1] 1，2，−4 都是使得分母 $(s-1)(s-2)(s+4)$ 为零的数.

定理 7.4 **导数变换**

若 f，f'，…，$f^{(n-1)}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是连续的，且具有指数阶，同时若 $f^{(n)}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是分段连续的，则

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

其中 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$.

解线性常微分方程 由定理 7.4 所给的一般结果可知，$\mathscr{L}\{\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}t^n\}$ 和 $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$ 以及 $y(t)$ 在 $t=0$ 处的 $n-1$ 阶导数有关. 这个性质使得我们可以用拉普拉斯变换来解常系数线性微分方程的初值问题. 考虑这样一个微分方程，它是 y，y'，y''，…，$y^{(n)}$ 的线性组合：

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

其中 a_i，$i=0$，1，…，n，及 y_0，y_1，y_2，…，y_{n-1} 均是常数. 由于线性性，这个线性组合的拉普拉斯变换是拉普拉斯变换的线性组合：

$$a_n \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right\} + a_{n-1} \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0 \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \tag{9}$$

根据定理 7.4，(9)可以写成

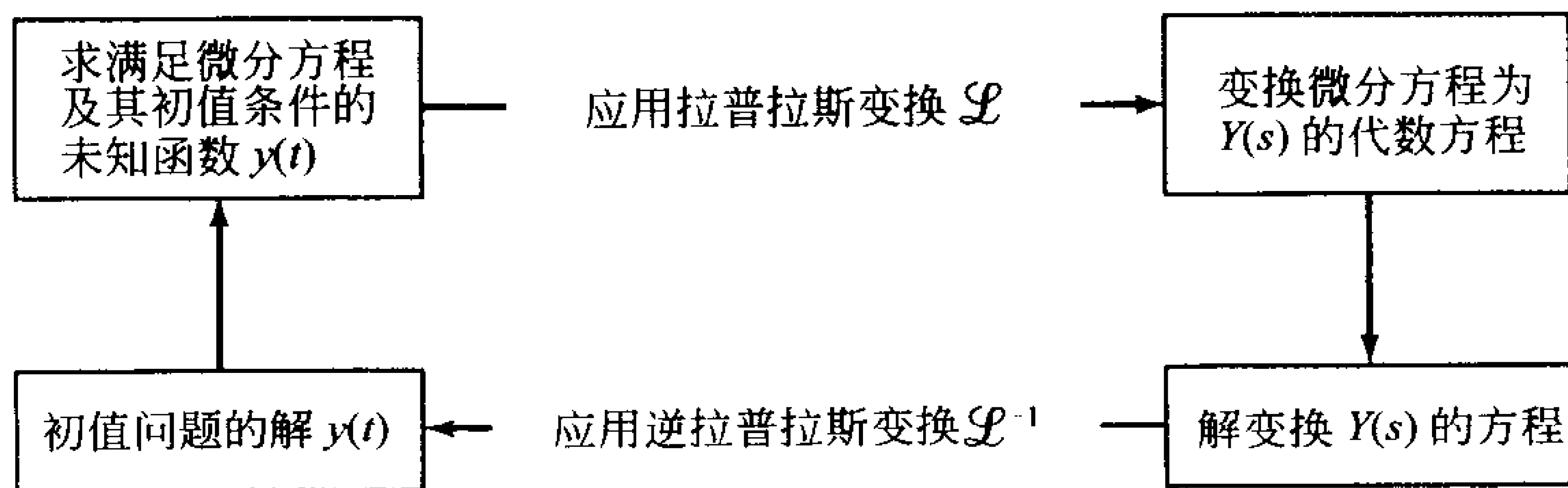
$$\begin{aligned} &a_n[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)] \\ &+ a_{n-1}[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s), \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\mathscr{L}\{y(t)\}=Y(s)$，$\mathscr{L}\{g(t)\}=G(s)$. 换言之，常系数线性微分方程的拉普拉斯变换是 $Y(s)$ 的代数方程. 如果解一般变换后的 $Y(s)$ 方程(10)，则可得 $P(s)Y(s)=Q(s)+G(s)$，并记

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}, \tag{11}$$

其中 $P(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$，$Q(s)$ 是 s 的多项式，它的次数小于或等于 $n-1$，是由系数 a_i，$i=1$，…，n 和初始条件 y_0，y_1，…，y_{n-1} 的积组成的，$G(s)$ 是 $g(t)$ 的拉普拉斯变换.⊖我们把(11)写成两个分式之和，然后可以进一步把这两个分式分解. 最后，可得原初值问题的解 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$，其中逆变换是逐项进行的.

这个过程如下所示.



下个例子说明了如何用上述方法来解微分方程，同时也给出了当 $Y(s)$ 的分母含有无实根二次多项式时部分分式分解的情形.

⊖ 多项式 $P(s)$ 和 4.3 节中(12)的 n 次辅助方程相同.

例 4 部分分式：无实根的二次多项式

用拉普拉斯变换解初值问题

$$\frac{dy}{dt}+3y=13\sin 2t, y(0)=6.$$

解 首先对微分方程逐项进行变换：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+3\mathscr{L}\{y\}=13\mathscr{L}\{\sin 2t\}. \tag{12}$$

由(6)可得$\mathscr{L}\{dy/dt\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-6$，由定理 7.1 的(d)可得$\mathscr{L}\{\sin 2t\}=2/(s^2+4)$，因此(12)为

$$sY(s)-6+3Y(s)=\frac{26}{s^2+4} \text{ 或 } (s+3)Y(s)=6+\frac{26}{s^2+4}.$$

解后一个 $Y(s)$ 的方程，可得

$$Y(s)=\frac{6}{s+3}+\frac{26}{(s+3)(s^2+4)}=\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}. \tag{13}$$

因为二次多项式 s^2+4 没有实数因子，部分分式的分子是 s 的线性多项式：

$$\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

对等式右边进行通分，然后令等式两边的分子相等，可得 $6s^2+50=A(s^2+4)+(Bs+C)(s+3)$. 令 $s=-3$，则 $A=8$. 由于分母没有实根，所以 s^2 和 s 的系数相等：$6=A+B$，$0=3B+C$. 由前面得到的 A 的值可得 $B=-2$，则从第二个方程中可以得到 $C=6$. 因此

$$Y(s)=\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}=\frac{8}{s+3}+\frac{-2s+6}{s^2+4}.$$

到这一步还没有结束，后一项的有理分式还可以继续分解成两项之和. 这一步如同例 2 中的逐项分解. 由例 2 中的(2)知，

$$y(t)=8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}.$$

由定理 7.3 的(c)、(d)、(e)可得初值问题的解是 $y(t)=8e^{-3t}-2\cos 2t+3\sin 2t$. ■

例 5 解二阶初值问题

解 $y''-3y'+2y=e^{-4t}, y(0)=1, y'(0)=5$.

解 如在例 4 中我们对微分方程进行变换一样，利用(6)和(7)可以把它写成每一项的变换之和，再利用初值条件和定理 7.3 的(c)，解 $Y(s)$的方程：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}-3\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+2\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=\frac{1}{s+4}$$

$$(s^2-3s+2)Y(s)=s+2+\frac{1}{s+4}$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2-3s+2}+\frac{1}{(s^2-3s+2)(s+4)}=\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}. \tag{14}$$

$Y(s)$的部分分式的分解在例 3 中已经详细讲解过了．由(4)和(5)的结论，可以得到初值问题的解为：

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=-\frac{16}{5}e^{t}+\frac{25}{6}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-4t}.$$ ■

例 4 和例 5 说明了用拉普拉斯变换解线性初值问题的基本步骤，但是这些例子也从另一个侧面说明了这个方法并不比 2.3 节和 4.3～4.6 节中的方法好．不要仅从这两个例子中得出任何负面的结论．这个方法虽然用了许多代数方法，但是我们没有用到常数变易法或待定系数法．此外，因为这个方法直接把初值条件代入求解，所以不需要专门把初值条件代入微分方程的通解 $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n+y_p$ 中去求特解的常数．

拉普拉斯变换有许多运算性质．接下来的一节将证明其中的几个性质，看看它们是如何解更复杂的问题的．

我们用一些与常用 s 函数类型相关的定理来总结本节内容．下一个定理说明并不是任意一个 s 函数都是指数阶分段连续函数的拉普拉斯变换．

定理 7.5　当 $s\to+\infty$ 时，$F(s)$ 的性质

如果 f 在$[0,+\infty)$上是分段连续的，且当 $t>T$ 时是指数阶的，则有 $\lim\limits_{s\to+\infty}\mathscr{L}\{f(t)\}=0$ 成立．

证　因为 $f(t)$ 是 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的分段连续函数，所以在这个区间上有界，即 $|f(t)|\leqslant M_1=M_1e^{0t}$．同时也满足 $|f(t)|\leqslant M_2e^{\gamma t}$，对所有 $t>T$ 成立．若 M 表示$\{M_1, M_2\}$中的最大值，c 表示$\{0, \gamma\}$上的最大值，则

$$|\mathscr{L}\{f(t)\}|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-st}|f(t)|\,dt\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-st}\cdot e^{ct}\,dt=-M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{M}{s-c}$$

对所有 $s>c$ 成立．当 $s\to+\infty$时，有 $|\mathscr{L}\{f(t)\}|\to0$，因此$\mathscr{L}\{f(t)\}\to0$． ■

作为定理 7.5 的一个结论，我们可以说 $F_1(s)=1$ 和 $F_2(s)=s/(s+1)$这样的 s 函数不是指数阶分段连续函数的拉普拉斯变换，因为当 $s\to+\infty$时，$F_1(s)\not\to0$，$F_2(s)\not\to0$．但是不能由此得出 $F_1(s)$和 $F_2(s)$不是拉普拉斯变换的结论．还有一些其他类型的函数也是这种情况．

注　(ⅰ)函数 $F(s)$ 的逆拉普拉斯变换可能不是唯一的，也就是说有可能存在 $\mathscr{L}\{f_1(t)\}=\mathscr{L}\{f_2(t)\}$，但是 $f_1\neq f_2$．这点不是我们要关注的重点．若 f_1和 f_2是$[0,+\infty)$上的连续分段函数，并且是指数阶的，那么 f_1和 f_2一定相等．请参考练习 7.2 的习题 41．但是，若 f_1和 f_2是$[0,+\infty)$上的连续函数，并且有$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=\mathscr{L}\{f_2(t)\}$成立，则在这个区间上 $f_1=f_2$．

(ⅱ)在做部分分式分解的时候需要注意这条注解．这是求部分分式系数的另一种方法，适用于$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$是 s 的有理分式的情形．F 的分母是不同的线性因子的乘积．我们重新来看一下例 3．假设给下列分式分解的两端分别乘以$(s-1)$，

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4},\tag{15}$$

化简后则有 $s=1$．因为等式右边的 B 和 C 等于零，可以得到

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-2)(s+4)}\bigg|_{s=1}=A\text{ 或 }A=-\frac{16}{5}.$$

写成另外一种形式为

$$\left.\frac{s^2+6s+9}{\boxed{(s-1)}(s-2)(s+4)}\right|_{s=1}=-\frac{16}{5}=A,$$

其中方框框起来的部分，或者说被覆盖的部分在给两边分别乘上$(s-1)$时可以约去. 为了求B和C的值，我们可以依次用$s-2$，$s+4$覆盖求出(15)式左边的值：

$$\left.\frac{s^2+6s+9}{(s-1)\boxed{(s-2)}(s+4)}\right|_{s=2}=\frac{25}{6}=B\text{ 和 }\left.\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)\boxed{(s+4)}}\right|_{s=-4}=\frac{1}{30}=C.$$

(15)式可以由(4)得出. 这种求系数的特殊方法被称作覆盖法(cover-up method).

(ⅲ)这条注解里继续介绍动态系统的术语. 因为(9)和(10)的性质，所以拉普拉斯变换对线性动态系统也适用. (11)中的多项式$P(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$是(10)中$Y(s)$的总系数，用幂$s^k$，$k=0$，1，…，$n$代替微分方程中的$\mathrm{d}^ky/\mathrm{d}t^k$，简化微分方程的左边. 通常把$P(s)$的倒数，也就是$W(s)=1/P(s)$称为系统的转移函数(transfer function)，把方程(11)写成

$$Y(s)=W(s)Q(s)+W(s)G(s). \tag{16}$$

用这种方法，我们可以对响应函数进行分解，这个响应函数受初始条件输入函数g(也就是$W(s)Q(s)$)的影响. 请见(13)和(14). 因此，系统的响应$y(t)$是两个响应的叠加：

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\}+\mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\}=y_0(t)+y_1(t).$$

如果输入$g(t)=0$，则该问题的解是$y_0(t)=\mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\}$. 这个解被称为系统的零输入响应(zero-input response). 另外，函数$y_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\}$是对应于输入$g(t)$的输出. 若系统的初始状态是零状态(所有的初始条件为零)，则$Q(s)=0$，因此初始问题的唯一解为$y_1(t)$. 后一个解被称为系统的零状态响应(zero-state response). $y_0(t)$和$y_1(t)$都是特解：$y_0(t)$是初值问题的一个解，这个初值问题由相关的齐次方程构成，而$y_1(t)$是零初始条件、非齐次方程的初值问题的解. 在例5中，由(14)可知，转移函数是$W(s)=1/(s^2-3s+2)$，零输入响应为

$$y_0(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right\}=-3\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{2t},$$

零状态响应为

$$y_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{30}\mathrm{e}^{-4t}.$$

请读者证明$y_0(t)$和$y_1(t)$的和是例5中的解$y(t)$，约束为$y_0(0)=1$，$y_0'(0)=5$，同时$y_1(0)=0$，$y_1'(0)=0$.

练习 7.2

在习题1～30中，利用定理7.3求所给的逆变换.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}+\frac{6}{s^5}-\frac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$

12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right\}$

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$

27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}$

28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$

29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$

在习题 31～40 中，利用拉普拉斯变换求解所给的初值问题.

31. $\frac{dy}{dt}-y=1$，$y(0)=0$

32. $2\frac{dy}{dt}+y=0$，$y(0)=-3$

33. $y'+6y=e^{4t}$，$y(0)=2$

34. $y'-y=2\cos 5t$，$y(0)=0$

35. $y''+5y'+4y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$

36. $y''-4y'=6e^{3t}-3e^{-t}$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$

37. $y''+y=\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$，$y(0)=10$，$y'(0)=0$

38. $y''+9y=e^t$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$

39. $2y'''+3y''-3y'-2y=e^{-t}$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，$y''(0)=1$

40. $y'''+2y''-y'-2y=\sin 3t$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，$y''(0)=1$

讨论题

41. 构造两个函数 f 和 g，使它们有相同的拉普拉斯变换. 不要把问题考虑得过于复杂.

42. 练习 7.1 中习题 45 结果的逆变换是

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}=e^{at}\cos bt \quad 和 \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}=e^{at}\sin bt.$$

用拉普拉斯变换和这些逆变换求解 $y'+y=e^{-3t}\cos 2t$，$y(0)=0$.

43. 回顾本节内容中的注(ⅲ). 求习题 36 中初值问题的零输入和零状态响应.

7.3 平移定理

若每次都用定义 7.1 来求解函数 $f(t)$的拉普拉斯变换是很麻烦的. 例如，用分部积分法计算$\mathscr{L}\{e^t t^2 \sin 3t\}$是非常繁琐的. 在本节和下一节中我们将介绍几个帮助我们节省计算量的定理，这些定理使我们可以不用拉普拉斯变换的定义就能得到更多的变换形式(请见附录 C 中的表格).

7.3.1 沿 s 轴的平移

若已知$\mathscr{L}\{t^3\}$和$\mathscr{L}\{\cos 4t\}$，则计算形如$\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$和$\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$的变换是相当容易的. 总的来说，如果知道函数 f 的拉普拉斯变换$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$，那么只要借助于平移或移动定理就可以计算出 f 的指数倍函数(即 $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$)的拉普拉斯变换，即从 $F(s)$变换到 $F(s-a)$. 这个结果称为第一平移定理(first translation theorem)或第一移动定理(first shifting theorem).

定理 7.6　第一平移定理

如果$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$，a 是任意给定的实数，那么

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a).$$

证　这个定理的证明是直接的，由定义 7.1 知

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t)\mathrm{d}t=F(s-a). \qquad ■$$

如果 s 是一个实变量，那么 $F(s-a)$的图像可由 $F(s)$的图像沿 s 轴平移 $|a|$ 个单位得到. 若 $a>0$，$F(s)$向右平移 a 个单位，但若 $a<0$，$F(s)$则向左平移 $|a|$ 个单位. 请参考图 7.10.

这里强调一下，有时用符号

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}=\mathscr{L}\{f(t)\}\big|_{s\to s-a}$$

表示是很有用的，这里 $s\to s-a$ 表示在 $f(t)$的拉普拉斯变换 $F(s)$中，s 一律都用 $s-a$ 代换.

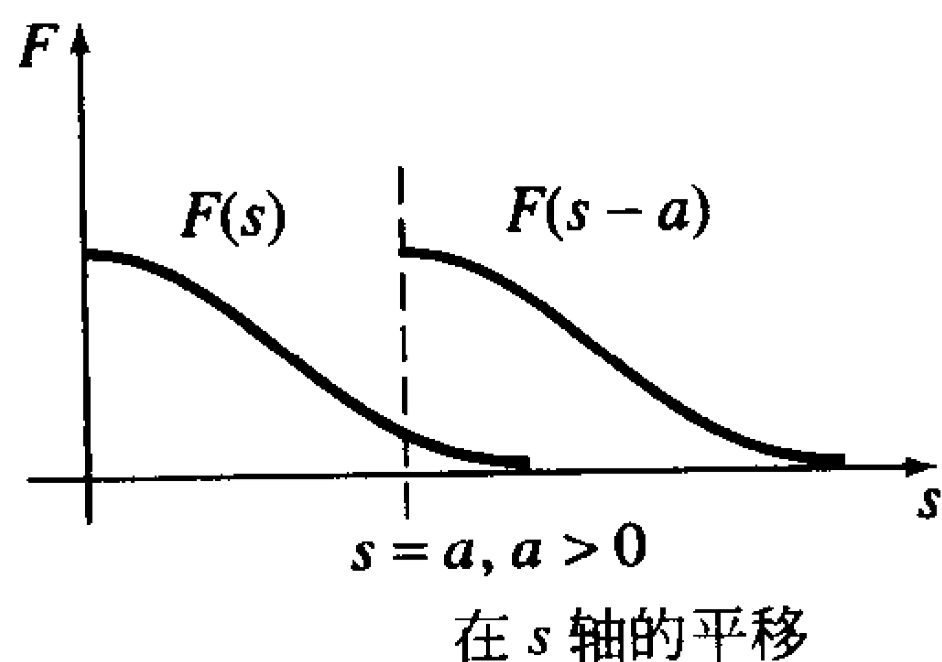


图 7.10

例 1　使用第一平移定理

计算(a) $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$,(b) $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

解　由定理 7.1 和定理 7.6 可以得到下列结果.

(a) $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}=\mathscr{L}\{t^3\}\Big|_{s\to s-5}=\dfrac{3!}{s^4}\Big|_{s\to s-5}=\dfrac{6}{(s-5)^4}$.

(b) $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}=\mathscr{L}\{\cos 4t\}\Big|_{s\to s-(-2)}=\dfrac{s}{s^2+16}\Big|_{s\to s+2}=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+16}$. ■

定理 7.6 的逆形式　为了计算 $F(s-a)$的逆，我们必须先找出 $F(s)$，用 $F(s)$的逆拉普拉斯变换求出 $f(t)$，然后用指数函数 e^{at}乘以 $f(t)$. 这个过程可以用下面符号化的方式表示：

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\big|_{s\to s-a}\right\}=e^{at}f(t), \tag{1}$$

其中 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

下一个例子的第一部分说明了在 $Y(s)$的分母含有多重线性因子的情况下如何进行部分分式分解.

例 2 **部分分式：多重线性因子**

计算(a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$，　(b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$.

解　(a)多重线性因子形如$(s-a)^n$，其中 a 是一个实数，n 是一个大于等于 2 的正整数. 回顾前面章节所讲到的，如果$(s-a)^n$在有理分式的分母上，那么部分分式就可以分解成含有 n 个常数分子的分式，它们对应的分母分别为 $s-a$，$(s-a)^2$，…，$(s-a)^n$. 当 $a=3$，$n=2$ 时，可以写为

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{(s-3)^2}.$$

通分右边的两个分式，可以得到分子 $2s+5=A(s-3)+B$，由这个等式可得 $A=2$，$B=11$. 因此，

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2}=\frac{2}{s-3}+\frac{11}{(s-3)^2},\tag{2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}=2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+11\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}.\tag{3}$$

$1/(s-3)^2$是 $F(s)=1/s^2$向右平移 3 个单位得到的. 因此，$\mathscr{L}^{-1}\{1/s^2\}=t$，再由(1)得到

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s-3}\right\}=\mathrm{e}^{3t}t.$$

最后，(3)式可以写为

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}=2\mathrm{e}^{3t}+11\mathrm{e}^{3t}t.\tag{4}$$

(b)观察二次多项式 s^2+4s+6，它没有零根，也没有实线性因子. 在这种情况下我们进行完全平方配方：

$$\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}=\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}.\tag{5}$$

我们的目标是把等式右边的表达式写成拉氏变换的形式 $F(s)$，并用 $s+2$ 来代换其中的 s. 我们所要做的工作与例 1 中的(b)有点类似. (5)的分母已经是我们所需要的形式了，即 s^2+2 中的 s 已经用 $s+2$ 代换掉了. 然而，我们还必须对分子进行配方：$\frac{1}{2}s+\frac{5}{3}=\frac{1}{2}(s+2)+\frac{5}{3}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}(s+2)+\frac{2}{3}$.

因为$\mathscr{L}^{-1}$是线性的，所以可以逐项进行变换. 由定理 7.3 中的(e)和(d)以及(1)，可得

$$\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}=\frac{\frac{1}{2}(s+2)+\frac{2}{3}}{(s+2)^2+2}=\frac{1}{2}\,\frac{s+2}{(s+2)^2+2}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{(s+2)^2+2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}=\frac{1}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\}+\frac{2}{3}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\}\tag{6}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{-2t}\sin\sqrt{2}t.\tag{7}$$

■

例 3 **初值问题**

解 $y''-6y'+9y=t^2e^{3t}, y(0)=2, y'(0)=17$.

解 在对微分方程进行变换之前，注意它的右边与例 1(a)中的函数类似. 利用线性性和定理 7.6 以及初值条件，我们可以把方程加以简化，然后解 $Y(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$：

$$\mathscr{L}\{y''\}-6\mathscr{L}\{y'\}+9\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-6[sY(s)-y(0)]+9Y(s)=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s^2-6s+9)Y(s)=2s+5+\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2Y(s)=2s+5+\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s)=\frac{2s+5}{(s-3)^2}+\frac{2}{(s-3)^5}.$$

右边第一项在例 2 的(a)中已经分解成了形如(2)的部分分式：

$$Y(s)=\frac{2}{s-3}+\frac{11}{(s-3)^2}+\frac{2}{(s-3)^5}.$$

因此

$$y(t)=2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}+\frac{2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}. \tag{8}$$

由定理 7.6 的逆形式(1)可知，(8)中的最后两项是

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3}\right\}=te^{3t} \text{ 和} \mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{4!}{s^5}\right|_{s\to s-3}\right\}=t^4e^{3t}.$$

因此将(8)写为 $y(t)=2e^{3t}+11te^{3t}+\frac{1}{12}t^4e^{3t}$. ■

例 4 **初值问题**

解 $y''+4y'+6y=1+e^{-t}, y(0)=0, y'(0)=0$.

解

$$\mathscr{L}\{y''\}+4\mathscr{L}\{y'\}+6\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{1\}+\mathscr{L}\{e^{-t}\},$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1},$$

$$(s^2+4s+6)Y(s)=\frac{2s+1}{s(s+1)},$$

$$Y(s)=\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}.$$

因为分母中的二次项没有分解成实线性因子，所以 $Y(s)$ 的部分分式分解可以写为：

$$Y(s)=\frac{1/6}{s}+\frac{1/3}{s+1}-\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}.$$

进一步，在逆变换的准备工作中我们已经把最后一项变为形如例 2 中(b)所需的形式了. 因此，根据(6)和(7)的结果，我们可以得到解

$$y(t)=\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\}-\frac{2}{3\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t. \quad \blacksquare$$

7.3.2 沿 t 轴的平移

单位阶梯函数 在工程中，有一种函数起到“关”和“开”的作用．例如，作用于力学系统的外力或电路的外加电压在一段时间后会消失．为了方便起见，对这种特殊的函数进行如下定义，函数等于 0(起到“关”的作用)直到时刻 $t=a$，该时刻以后函数等于 1(起到“开”的作用)．这种函数称为单位阶梯函数(unit step function)或海维赛德函数(Heaviside function)．

定义 7.3 单位阶梯函数

单位阶梯函数(unit step function) $\mathscr{U}(t-a)$ 定义为

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < a \\ 1, & t \geqslant a. \end{cases}$$

注意，我们只在 t 轴上的非负部分定义 $\mathscr{U}(t-a)$，因为我们只在这个区间上研究拉普拉斯变换．在更广的意义上有，$t<a$ 时 $\mathscr{U}(t-a)=0$．$\mathscr{U}(t-a)$ 的图像见图 7.11.

当用 $\mathscr{U}(t-a)$ 乘以一个定义在 $t\geqslant 0$ 上的函数 f 时，这个单位阶梯函数对应于函数图像上“关”的那一部分．例如，考虑函数 $f(t)=2t-3$．对应于 f 图像“关”的那一部分，区间为 $0\leqslant t<1$，我们可以构造乘积 $(2t-3)\mathscr{U}(t-1)$．请见图 7.12．一般地，$f(t)\mathscr{U}(t-a)$ 的图像在 $0\leqslant t<a$ 上为 0 是“关”的部分，而在 $t\geqslant a$ 上是“开”的部分.

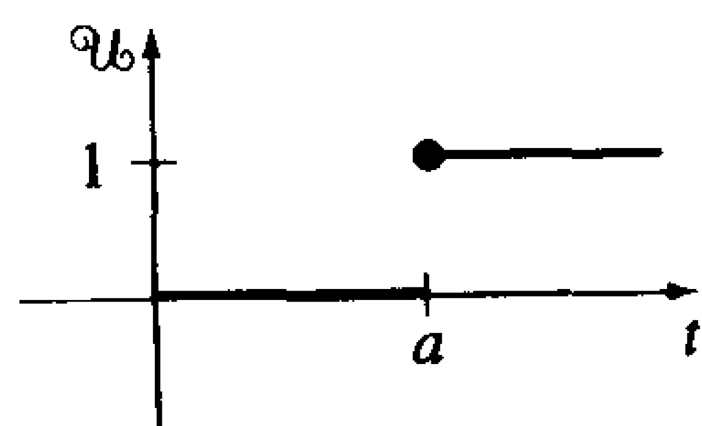


图 7.11

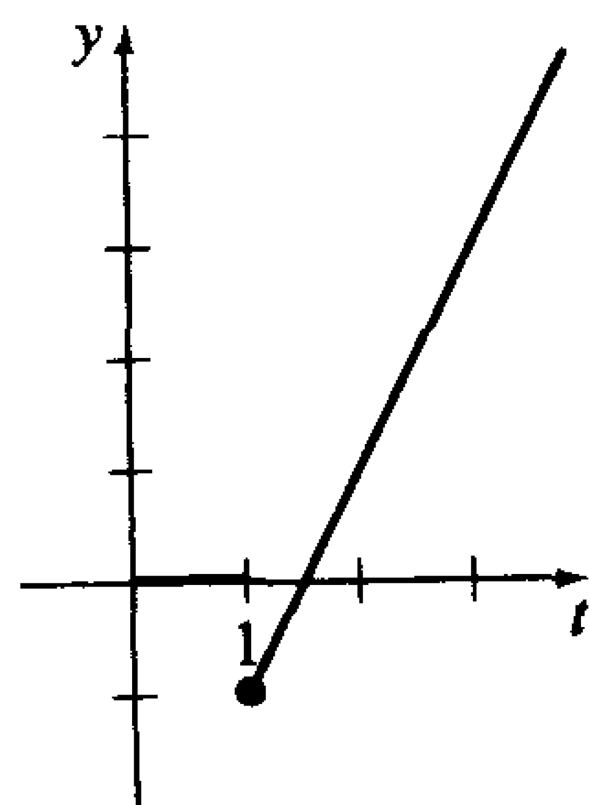


图 7.12

单位阶梯函数也可以用更简洁的形式来定义分段函数．例如，若考虑区间 $0\leqslant t<2$，$2\leqslant t<3$，$t\geqslant 3$，以及 $\mathscr{U}(t-2)$ 和 $\mathscr{U}(t-3)$ 对应的值，很明显，如图 7.13 所示的分段函数等价于 $f(t)=2-3\,\mathscr{U}(t-2)+\mathscr{U}(t-3)$．此外，一般形如

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leqslant t < a \\ h(t), & t \geqslant a \end{cases} \tag{9}$$

的分段函数都等价于

$$f(t) = g(t) - g(t)\,\mathscr{U}(t-a) + h(t)\,\mathscr{U}(t-a). \tag{10}$$

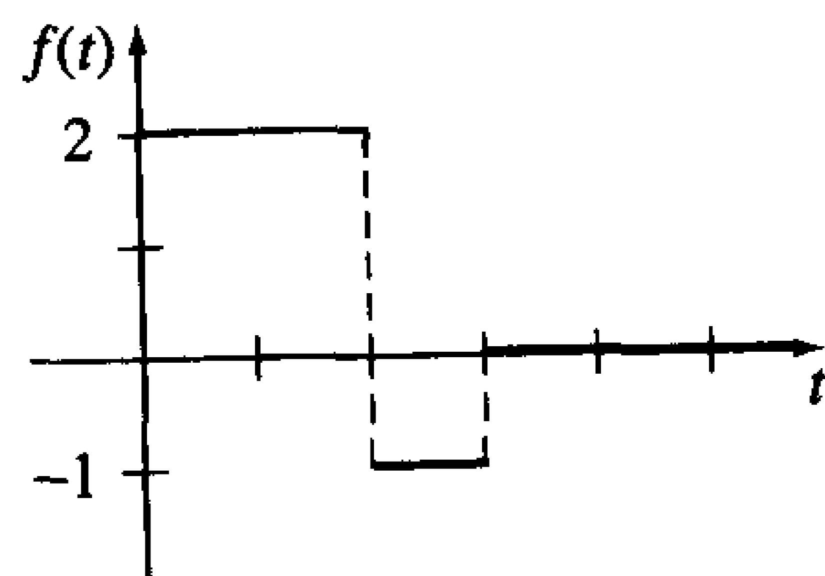


图 7.13

类似地，形如

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<a\\ g(t), & a\leqslant t<b\\ 0, & t\geqslant b\end{cases} \tag{11}$$

的函数可以写为

$$f(t)=g(t)[\mathscr{U}(t-a)-\mathscr{U}(t-b)]. \tag{12}$$

例 5　分段函数

用单位阶梯函数表示 $f(t)=\begin{cases}20t, & 0\leqslant t<5\\ 0, & t\geqslant 5\end{cases}$，绘出它的图像.

解　如图 7.14 所示 f 的图像. 令(9)和(10)中的 $a=5$，$g(t)=20t$，$h(t)=0$，可得 $f(t)=20t-20t\,\mathscr{U}(t-5)$. ■

考虑在 $t\geqslant 0$ 上定义的一般函数 $y=f(t)$. 分段函数

$$f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<a\\ f(t-a), & t\geqslant a\end{cases} \tag{13}$$

在接下来的讨论中十分重要. 如图 7.15 所示，函数 $y=f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$ 在 $a>0$ 上的图像和 $y=f(t-a)$ 在 $t\geqslant a$ 上的图像是一样的(它是整个 $y=f(t)$ 的图像沿 t 轴向右移动 a 个单位得到的)，但是在 $0\leqslant t<a$ 上恒等于 0.

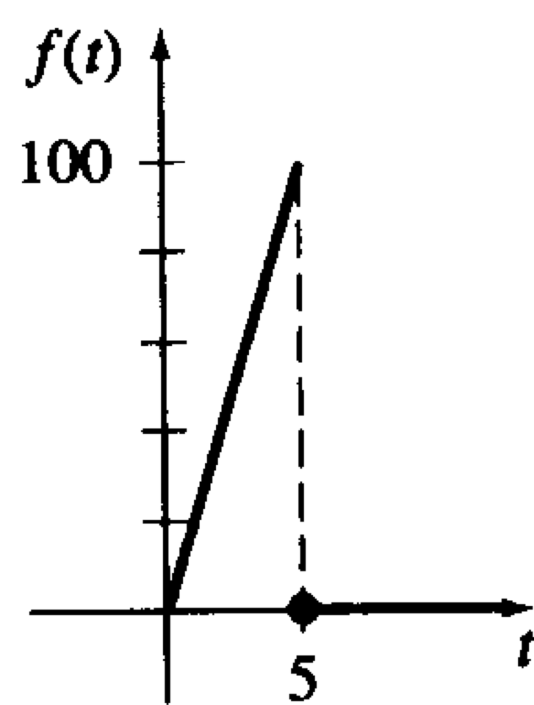


图　7.14

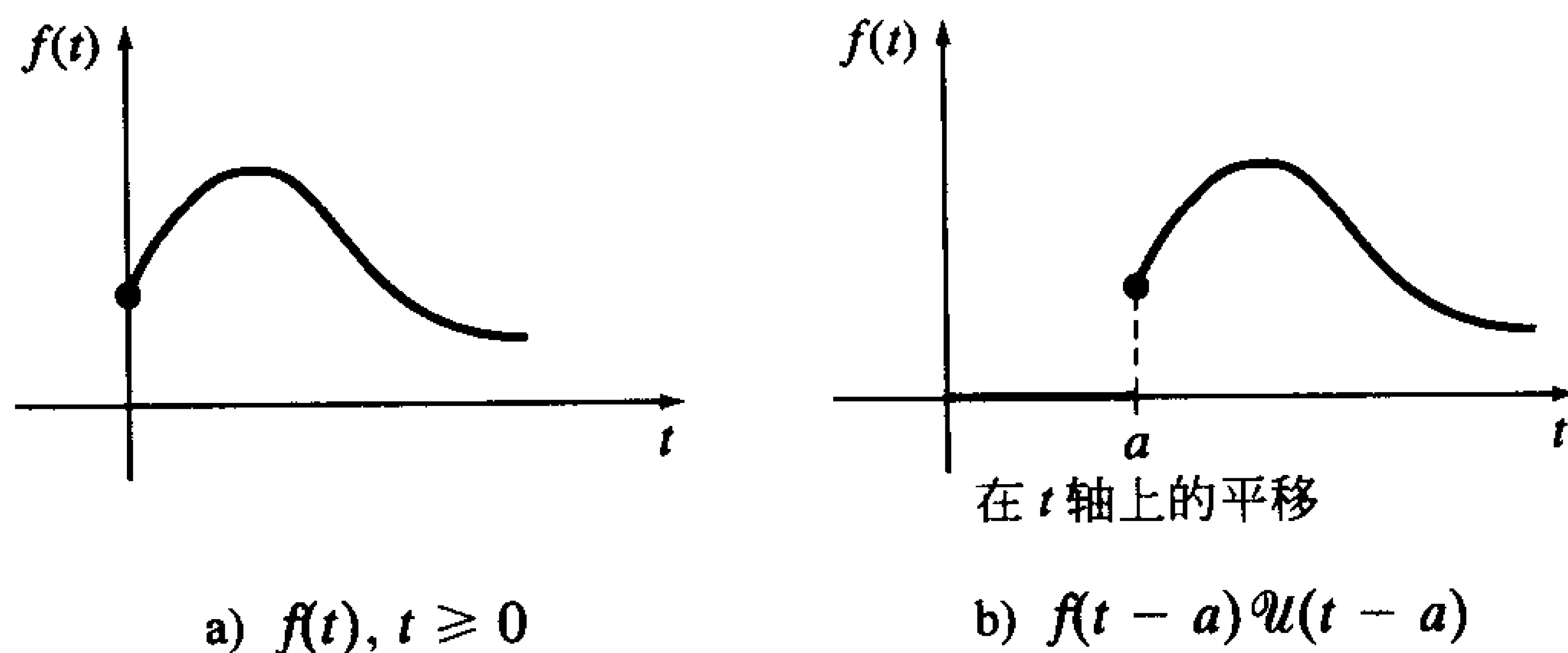


图　7.15

正如我们在定理 7.6 中所看到的，$f(t)$ 指数倍的变换可由 $F(s)$ 沿 s 轴平移得到. 作为下个定理的结果，我们可知无论何时 $F(s)$ 乘以指数函数 e^{-as}，$a>0$，乘积 $e^{-as}F(s)$ 的逆变换是函数 f 以图 7.15(b)所示的方式沿 t 轴平移得到的. 下面直接用拉氏变换来说明这个结果，它被称为*第二平移定理*(second translation theorem)或*第二移动定理*(second shifting theorem).

定理 7.7　第二平移定理

若 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$，$a>0$，则有

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)\}=e^{-as}F(s).$$

证　由积分的区间可加性，$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)dt$ 可以写成两个积分：

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)\}=\int_0^a e^{-st}f(t-a)\underbrace{\mathscr{U}(t-a)}_{\text{对于}0\leqslant t<a\text{等于零}}dt+\int_a^{+\infty} e^{-st}f(t-a)\underbrace{\mathscr{U}(t-a)}_{\text{对于}t\geqslant a\text{等于}1}dt$$

$$=\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\,dt.$$

若在最后一个积分中令 $v=t-a$，$dv=dt$，则

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\}=\int_0^{+\infty} e^{-s(v+a)} f(v)\,dv = e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-sv} f(v)\,dv = e^{-as}\,\mathscr{L}\{f(t)\}.\quad ■$$

我们通常希望求出单位阶梯函数的拉普拉斯变换. 这可以从定义 7.1 或定理 7.7 中得到. 如果在定理 7.7 中 $f(t)=1$，那么 $f(t-a)=1$，$F(s)=\mathscr{L}\{1\}=1/s$，则有

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}. \tag{14}$$

例如，利用(14)，图 7.13 所示函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\}&=2\,\mathscr{L}\{1\}-3\,\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-2)\}+\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-3)\}\\&=2\,\frac{1}{s}-3\,\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}.\end{aligned}$$

定理 7.7 的逆形式　如果 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$，那么当 $a>0$ 时定理 7.7 的逆变换为

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a). \tag{15}$$

例 6　**使用公式(15)**

计算(a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$，(b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}$.

解　(a)令 $a=2$，则 $F(s)=1/(s-4)$，$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{4t}$，由(15)式可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}=e^{4(t-2)}\,\mathscr{U}(t-2).$$

(b)令 $a=\pi/2$，则 $F(s)=s/(s^2+9)$，$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\cos 3t$，由(15)式可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}=\cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

用余弦函数的加法公式可以简化上式. 证明简化后的结果为 $-\sin 3t\,\mathscr{U}(t-\pi/2)$.　■

定理 7.7 的另一种形式　我们经常遇到这样的问题，求函数 g 与单位阶梯函数 $\mathscr{U}(t-a)$ 乘积的拉普拉斯变换，其中函数 g 没有写成定理 7.7 中 $f(t-a)$ 的形式. 为了求 $g(t)\mathscr{U}(t-a)$ 的拉普拉斯变换，需要通过代数运算把 $g(t)$ 变换成 $f(t-a)$ 的形式. 例如，若要利用定理 7.7 求 $t^2\mathscr{U}(t-2)$ 的拉普拉斯变换，需要把 $g(t)=t^2$ 变换为 $f(t-2)$ 的形式. 请读者写出详细过程并证明 $t^2=(t-2)^2+4(t-2)+4$. 因此

$$\mathscr{L}\{t^2\,\mathscr{U}(t-2)\}=\mathscr{L}\{(t-2)^2\,\mathscr{U}(t-2)+4(t-2)\,\mathscr{U}(t-2)+4\,\mathscr{U}(t-2)\},$$

等式右边的每一项都可以用定理 7.7 来计算. 但是因为这些运算是非常繁琐的，所以我们给出定理 7.7 的另一种形式来简化计算. 利用定义 7.1 和 $\mathscr{U}(t-a)$ 的定义以及代换 $u=t-a$ 可得

$$\mathscr{L}\{g(t)\,\mathscr{U}(t-a)\}=\int_a^{+\infty} e^{-st}g(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)}g(u+a)\,du,$$

也就是

$$\mathscr{L}\{g(t)\,\mathscr{U}(t-a)\}=e^{-as}\,\mathscr{L}\{g(t+a)\}. \tag{16}$$

例 7　**第二平移定理——另一形式**

计算 $\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$.

解 令 $g(t)=\cos t$，$a=\pi$，则根据余弦函数的加法公式得 $g(t+\pi)=\cos(t+\pi)=-\cos t$. 再由(16)，得

$$\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}=-\mathrm{e}^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos t\}=-\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s}.$$

■

例 8 **初值问题**

解 $y'+y=f(t)$，$y(0)=5$，其中 $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\pi\\ 3\cos t, & t\geqslant\pi\end{cases}$.

解 函数 f 可写为 $f(t)=3\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)$，再由线性性和例 7 的结果以及一般的部分分式可得

$$\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{y\}=3\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\},$$

$$sY(s)-y(0)+Y(s)=-3\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s},$$

$$(s+1)Y(s)=5-\frac{3s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s},$$

$$Y(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-\pi s}+\frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s}+\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s}\right]. \tag{17}$$

然后如例 6 的计算过程所示，令(15)式中的 $a=\pi$，括号中项的逆变换为

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-\pi s}\right\}=\mathrm{e}^{-(t-\pi)}\mathscr{U}(t-\pi),\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s}\right\}=\sin(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s}\right\}=\cos(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi).$$

因此(17)的逆变换为

$$\begin{aligned}y(t)&=5\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-(t-\pi)}\mathscr{U}(t-\pi)-\frac{3}{2}\sin(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)-\frac{3}{2}\cos(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)\\&=5\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}[\mathrm{e}^{-(t-\pi)}+\sin t+\cos t]\mathscr{U}(t-\pi)\quad\leftarrow\text{三角函数恒等式}\\&=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-t}, & 0\leqslant t<\pi\\ 5\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-(t-\pi)}+\frac{3}{2}\sin t+\frac{3}{2}\cos t, & t\geqslant\pi\end{cases}.\end{aligned} \tag{18}$$

用绘图工具可以绘出如图 7.16 所示的(18)的图像. ■

横梁问题 在 5.2 节中，长为 L 的匀质横梁，每单位长度负重 $w(x)$，它的静态弯曲形态 $y(x)$ 可以用线性四阶微分方程

$$EI\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=w(x), \tag{19}$$

来描述，其中 E 是杨氏模量，I 是横梁横截面的惯性矩. 当 $w(x)$ 是分段函数时，拉普拉斯变换在解(19)式时非常有用. 然而，为了能够使用拉普拉斯变换，我们必须按照惯例假设 $y(x)$ 和 $w(x)$ 均定义在 $(0,+\infty)$ 上而不是 $(0,L)$ 上. 注意，下一个例子是边界值问题而不是初值问题.

例 9 **边界值问题**

长为 L 的横梁，两端嵌入在支撑物里，如图 7.17 所示. 当负荷为如下所定义的函数时，求横梁的弯曲形态 $y(x)$.

$$w(x)=\begin{cases}w_0\left(1-\dfrac{2}{L}x\right), & 0<x<L/2\\ 0, & L/2<x<L\end{cases}.$$

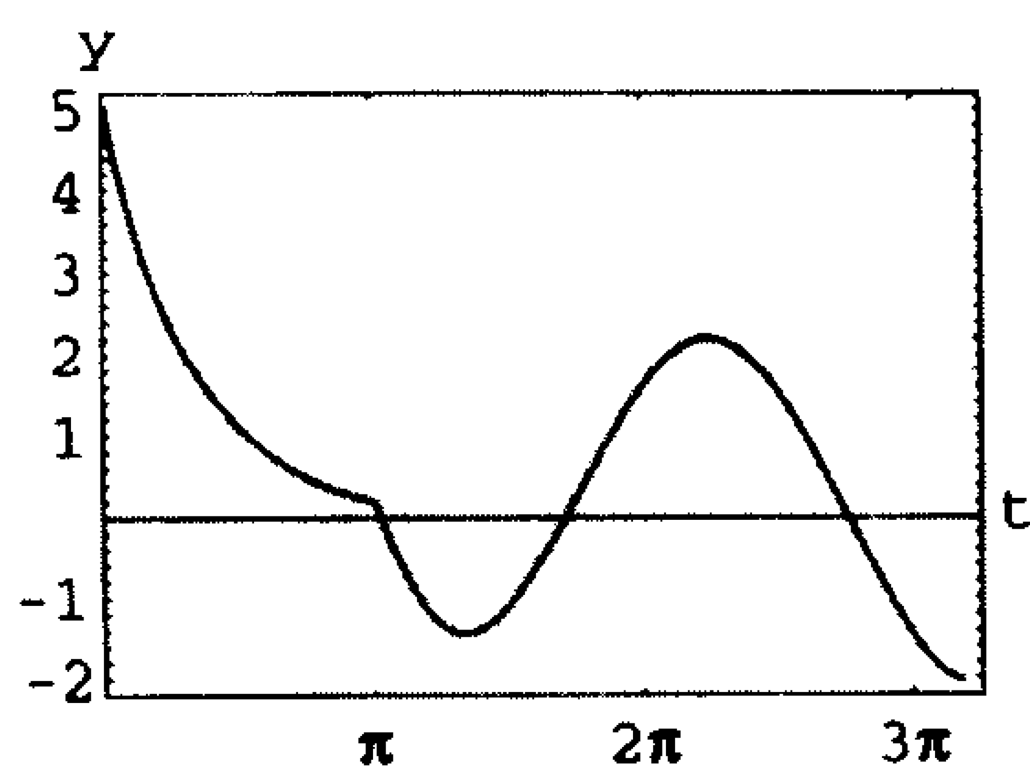


图 7.16

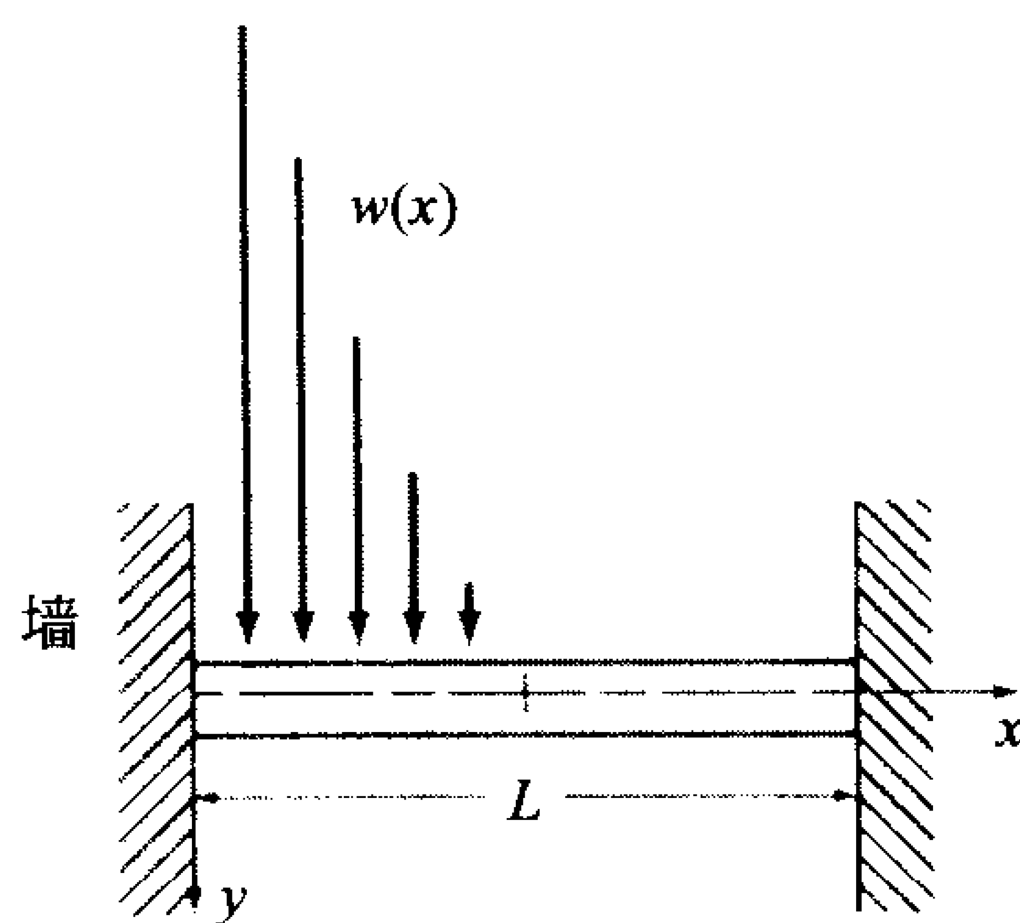


图 7.17

解 因为横梁的两端嵌入在支撑物里，所以边界条件为 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，$y(L)=0$，$y'(L)=0$. 根据(10)式，我们可以用单位阶梯函数表示 $w(x)$：

$$\begin{aligned}w(x)&=w_0\left(1-\frac{2}{L}x\right)-w_0\left(1-\frac{2}{L}x\right)\mathscr{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\\&=\frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2}-x+\left(x-\frac{L}{2}\right)\mathscr{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

对(19)式做关于 x 的变换，得

$$EI\left(s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)\right)=\frac{2w_0}{L}\left[\frac{L/2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-Ls/2}\right]$$

或

$$s^4Y(s)-sy''(0)-y'''(0)=\frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-Ls/2}\right].$$

若令 $c_1=y''(0),c_2=y'''(0)$，则有

$$Y(s)=\frac{c_1}{s^3}+\frac{c_2}{s^4}+\frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s^5}-\frac{1}{s^6}+\frac{1}{s^6}\mathrm{e}^{-Ls/2}\right],$$

因此，

$$\begin{aligned}y(x)=&\frac{c_1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}+\frac{c_2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}\\&+\frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}-\frac{1}{5!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}+\frac{1}{5!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\mathrm{e}^{-Ls/2}\right\}\right]\\=&\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{6}x^3+\frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4-x^5+\left(x-\frac{L}{2}\right)^5\mathscr{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

把条件 $y(L)=0$，$y'(L)=0$ 代入以上结果中，可得一个关于 c_1 和 c_2 的方程组：

$$c_1\frac{L^2}{2}+c_2\frac{L^3}{6}+\frac{49w_0L^4}{1920EI}=0$$

$$c_1L+c_2\frac{L^2}{2}+\frac{85w_0L^3}{960EI}=0.$$

解之，求出 $c_1=\dfrac{23w_0L^2}{960EI}$，$c_2=\dfrac{-9w_0L}{40EI}$. 因此弯曲量为

$$y(x)=\frac{23w_0L^2}{1920EI}x^2-\frac{3w_0L}{80EI}x^3+\frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4-x^5+\left(x-\frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right].$$ ■

练习 7.3

7.3.1 沿 s 轴的平移

在习题 1～20 中，求给出的 $F(s)$或 $f(t)$.

1. $\mathscr{L}\{te^{10t}\}$
2. $\mathscr{L}\{te^{-6t}\}$
3. $\mathscr{L}\{t^3e^{-2t}\}$
4. $\mathscr{L}\{t^{10}e^{-7t}\}$
5. $\mathscr{L}\{t(e^t+e^{2t})^2\}$
6. $\mathscr{L}\{e^{2t}(t-1)^2\}$
7. $\mathscr{L}\{e^t\sin3t\}$
8. $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos4t\}$
9. $\mathscr{L}\{(1-e^t+3e^{-4t})\cos5t\}$
10. $\mathscr{L}\left\{e^{3t}\left(9-4t+10\sin\frac{t}{2}\right)\right\}$
11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$
12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^4}\right\}$
13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$
14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+5}\right\}$
15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$
16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$
17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2}\right\}$
18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s-2)^2}\right\}$
19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$
20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$

在习题 21～30 中利用拉普拉斯变换解所给的初值问题.

21. $y'+4y=e^{-4t}$，$y(0)=2$
22. $y'-y=1+te^t$，$y(0)=0$
23. $y''+2y'+y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$
24. $y''-4y'+4y=t^3e^{2t}$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
25. $y''-6y'+9y=t$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$
26. $y''-4y'+4y=t^3$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$
27. $y''-6y'+13y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=-3$
28. $2y''+20y'+51y=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=0$
29. $y''-y'=e^t\cos t$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
30. $y''-2y'+5y=1+t$，$y(0)=0$，$y'(0)=4$

在习题 31 和 32 中，使用拉普拉斯变换和例 9 中的方法解所给的边界值问题.

31. $y''+2y'+y=0$，$y'(0)=2$，$y(1)=2$
32. $y''+8y'+20y=0$，$y(0)=0$，$y'(\pi)=0$
33. 一个 4lb 的重物使弹簧伸长了 2ft. 这个重物从平衡位置上方 18in 处由静止释放，这个运动发生在介质中，该介质所施加的阻力等于 7/8 倍瞬时速度. 用拉普拉斯变换写出运动 $x(t)$的方程.
34. 回顾在 LRC 串联电路中，电容器上瞬时电荷 $q(t)$的微分方程可由

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t). \tag{20}$$

描述. 请参考 5.1 节. 当 $L=1$h，$R=20\Omega$，$C=0.005$f，$E(t)=150$V，$t>0$，$q(0)=0$，$i(0)=0$ 时，利用拉普拉斯变换求 $q(t)$. 电流 $i(t)$是多少？

35. 考虑一个恒定电压 E_0的电池，它给电容器充电，如图 7.18 所示. 用 L 去除方程(20)的两端，定义 $2\lambda=R/L$，$\omega^2=\dfrac{1}{LC}$. 用拉普拉斯变换证明约束条件为 $q(0)=0$，$i(0)=0$的方程 $q''+2\lambda q'+\omega^2q=E_0/L$

的解 $q(t)$ 为

$$q(t)=\begin{cases}E_0C\left[1-e^{-\lambda t}\left(\cosh\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t+\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\sinh\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t\right)\right], & \lambda>\omega\\ E_0C[1-e^{-\lambda t}(1+\lambda t)], & \lambda=\omega\\ E_0C\left[1-e^{-\lambda t}\left(\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t+\dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}\sin\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t\right)\right], & \lambda<\omega\end{cases}$$

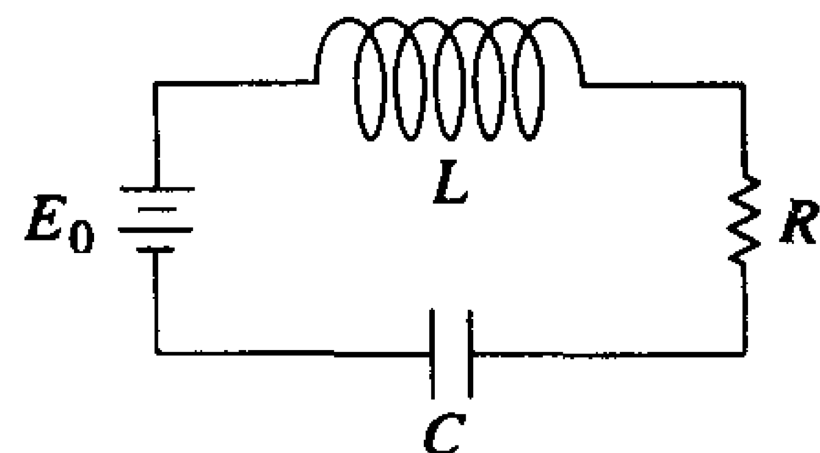


图 7.18

36. 用拉普拉斯变换求解 RC 串联电路中的电荷 $q(t)$，$q(0)=0$，$E(t)=E_0e^{-kt}$，$k>0$. 考虑两种情形：$k\neq\frac{1}{RC}$，$k=\frac{1}{RC}$.

7.3.2 沿 t 轴的平移

在习题 37～48 中，求解所给的 $F(s)$ 或 $f(t)$.

37. $\mathscr{L}\{(t-1)\mathscr{U}(t-1)\}$
38. $\mathscr{L}\{e^{2-t}\mathscr{U}(t-2)\}$
39. $\mathscr{L}\{t\,\mathscr{U}(t-2)\}$
40. $\mathscr{L}\{(3t+1)\mathscr{U}(t-1)\}$
41. $\mathscr{L}\{\cos 2t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$
42. $\mathscr{L}\left\{\sin t\,\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$
43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$
44. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$
45. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$
46. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$
47. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$
48. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

在习题 49～54 中，对给出的每个图像在(a)～(f)中找到一个与之对应的函数. $f(t)$ 的图像如图 7.19 所示.

图 7.19

(a) $f(t)-f(t)\mathscr{U}(t-a)$
(b) $f(t-b)\mathscr{U}(t-b)$
(c) $f(t)\mathscr{U}(t-a)$
(d) $f(t)-f(t)\mathscr{U}(t-b)$
(e) $f(t)\mathscr{U}(t-a)-f(t)\mathscr{U}(t-b)$
(f) $f(t-a)\mathscr{U}(t-a)-f(t-a)\mathscr{U}(t-b)$

49.

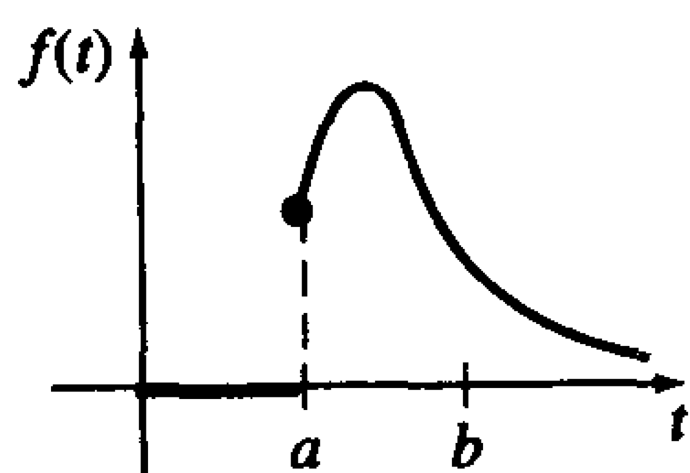


图 7.20

50.

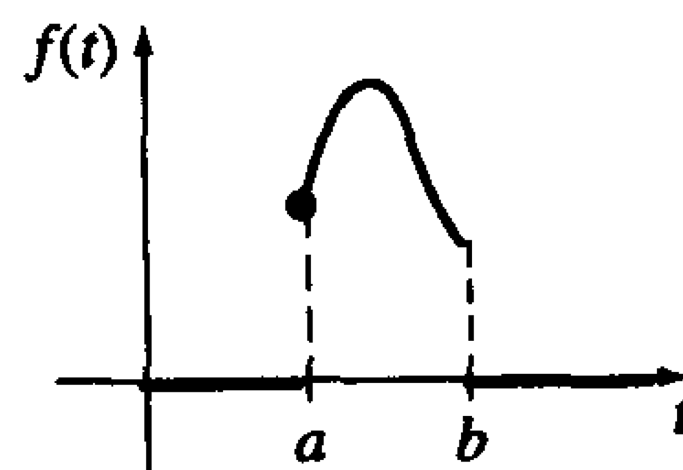


图 7.21

51.

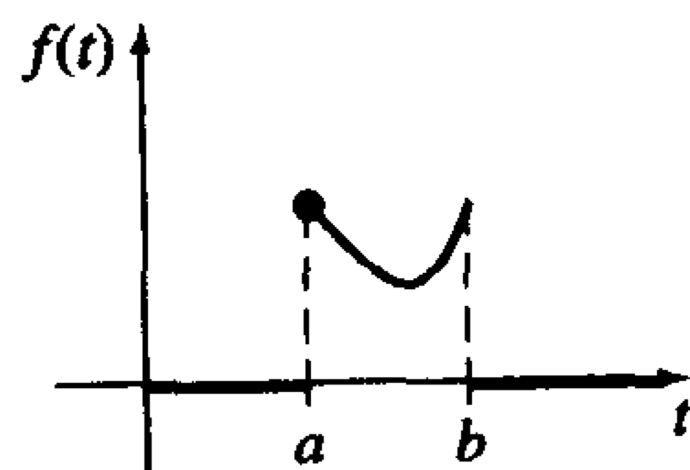


图 7.22

52.

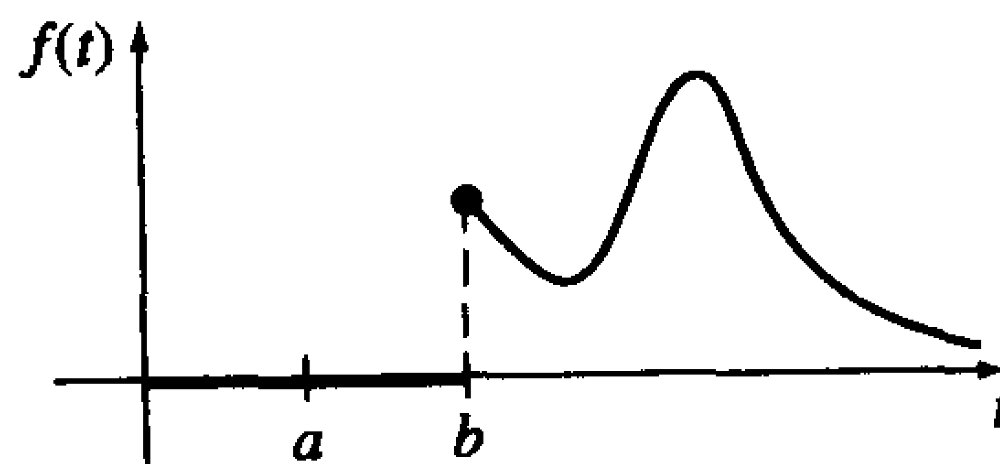


图 7.23

53.

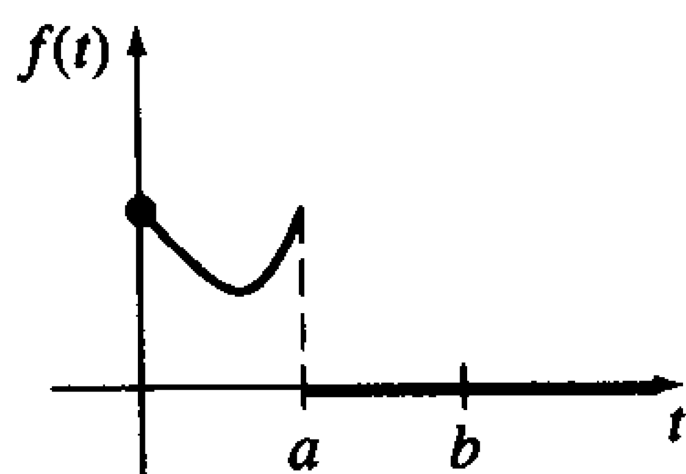


图 7.24

54.

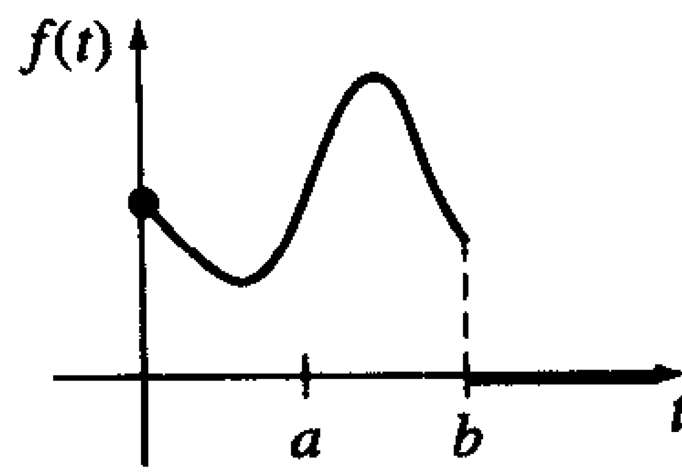


图 7.25

在习题 55～62 中，用单位阶梯函数表示出每个函数. 求所给函数的拉普拉斯变换.

55. $f(t)=\begin{cases}2, & 0\leqslant t<3\\ -2, & t\geqslant 3\end{cases}$

56. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<4\\ 0, & 4\leqslant t<5\\ 1, & t\geqslant 5\end{cases}$

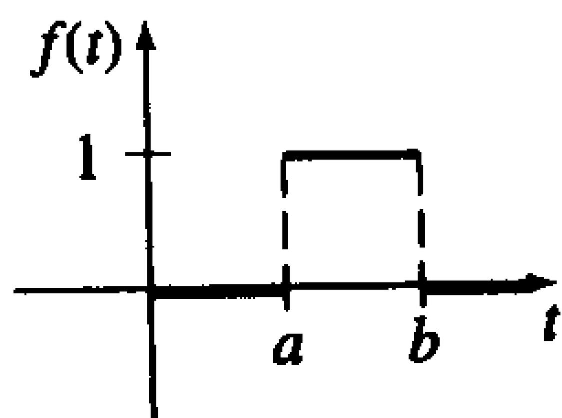
57. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1\\ t^2, & t\geqslant 1\end{cases}$

58. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<3\pi/2\\ \sin t, & t\geqslant 3\pi/2\end{cases}$

59. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<2\\ 0, & t\geqslant 2\end{cases}$

60. $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t<2\pi\\ 0, & t\geqslant 2\pi\end{cases}$

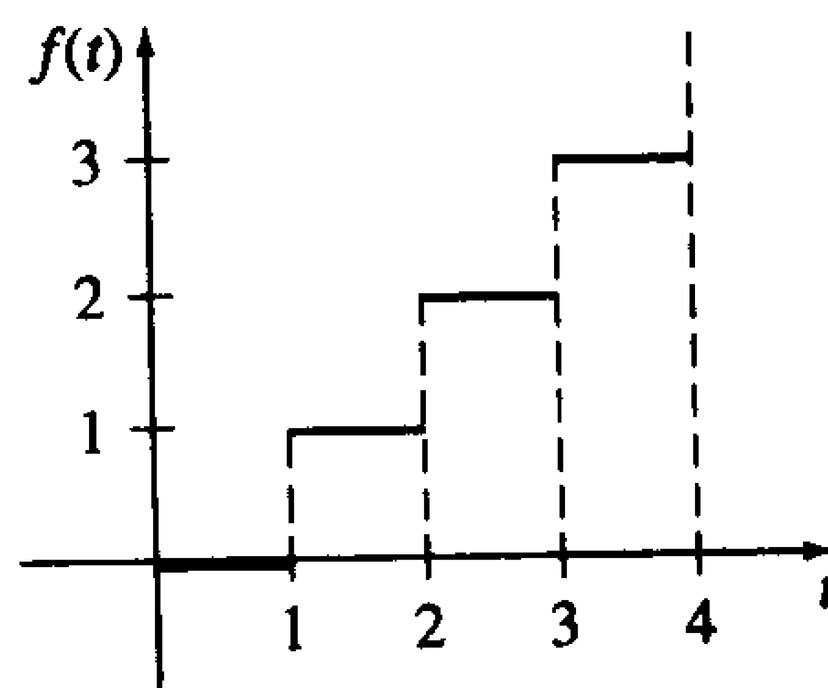
61.



矩形脉冲

图 7.26

62.



阶梯函数

图 7.27

在习题 63～70 中，用拉普拉斯变换解所给的初值问题.

63. $y'+y=f(t)$, $y(0)=0$，其中 $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1\\ 5, & t\geqslant 1\end{cases}$

64. $y'+y=f(t)$, $y(0)=0$，其中 $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ -1, & t\geqslant 1\end{cases}$

65. $y'+2y=f(t)$, $y(0)=0$，其中 $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$

66. $y''+4y=f(t)$, $y(0)=0$，$y'(0)=-1$，其中 $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$

67. $y''+4y=\sin t\,\mathscr{U}(t-2\pi)$, $y(0)=1$，$y'(0)=0$

68. $y''-5y'+6y=\mathscr{U}(t-1)$, $y(0)=0$，$y'(0)=1$

69. $y''+y=f(t)$, $y(0)=0$，$y'(0)=1$，其中 $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\pi\\ 1, & \pi\leqslant t<2\pi\\ 0, & t\geqslant 2\pi\end{cases}$

70. $y''+4y'+3y=1-\mathscr{U}(t-2)-\mathscr{U}(t-4)+\mathscr{U}(t-6)$, $y(0)=0$，$y'(0)=0$

71. 设一个 32lb 的重物使弹簧伸长了 2ft. 如果重物从平衡位置处由静止释放，外加压力 $f(t)=20t$ 在 $0\leqslant t<5$ 时作用在系统上，然后移掉，求运动 $x(t)$ 的方程(请参考例 5). 忽略任何阻力. 用绘图工具绘出 $x(t)$ 在区间 $[0, 10]$ 上的图像.

72. 若外加压力 $f(t)=\sin t$ 在 $0\leqslant t<2\pi$ 之间作用在系统上，然后移掉，求解习题 71.

在习题 73 和 74 中，利用拉普拉斯变换求解 RC 串联电路上电容的电荷 $q(t)$，受给定条件的约束.

73. $q(0)=0$，$R=2.5\Omega$，$C=0.08\text{f}$，$E(t)$ 如图 7.28 所给.

74. $q(0)=q_0$，$R=10\Omega$，$C=0.1\text{f}$，$E(t)$ 如图 7.29 所给.

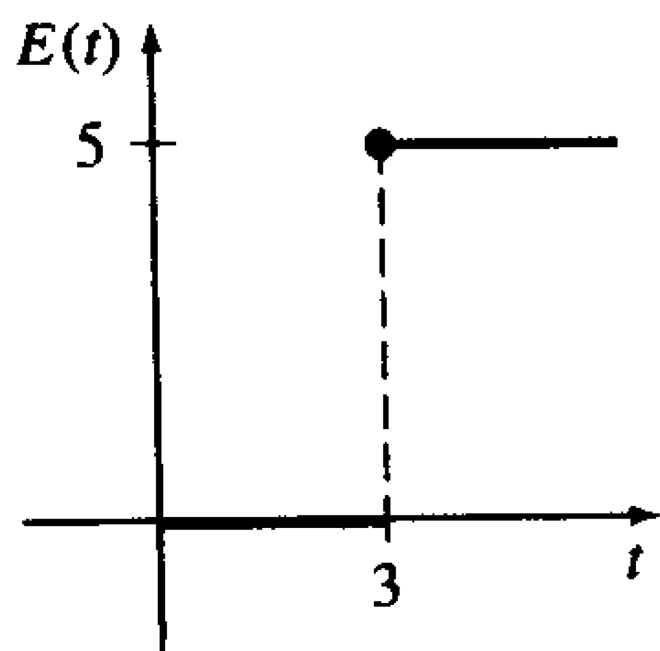


图 7.28

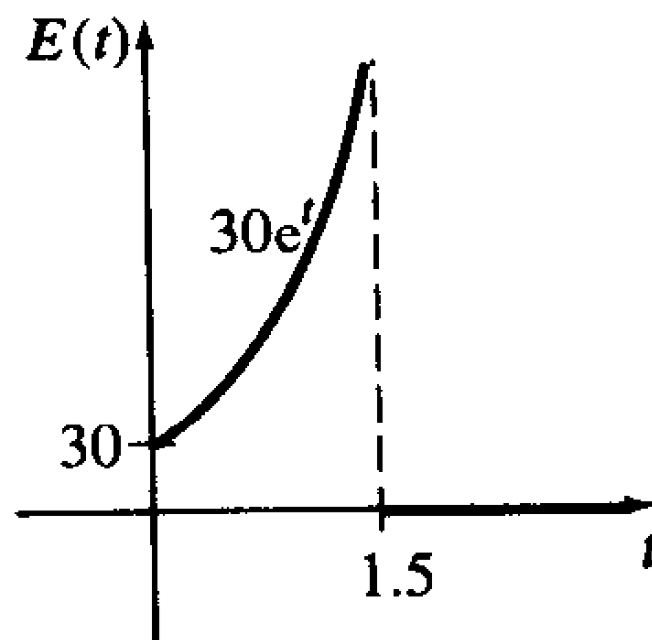


图 7.29

75. (a)用拉普拉斯变换求解单回路 LR 串联电路中的电流，$i(0)=0$，$L=1\text{h}$，$R=10\Omega$，$E(t)$ 如图 7.30 所给.

(b)用计算机绘图程序绘出 $i(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 6$ 上的图形. 用图像估计 $i_{\max}$ 和 $i_{\min}$，即电流的最大和最小值.

76. (a)用拉普拉斯变换求解 RC 串联电路中电容器上的电荷 $q(t)$，$q(0)=0$，$R=50\Omega$，$C=0.01\text{f}$，$E(t)$ 如图 7.31 所给.

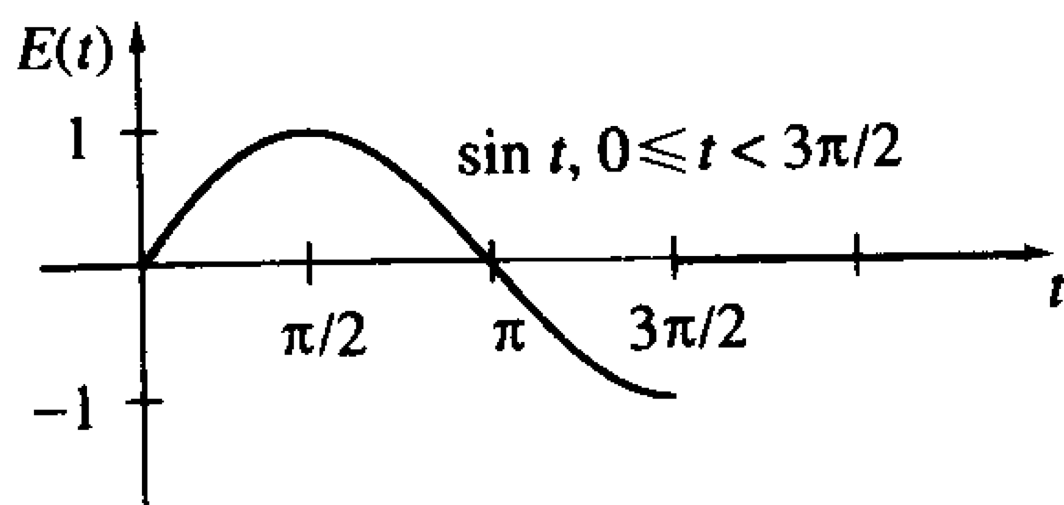


图 7.30

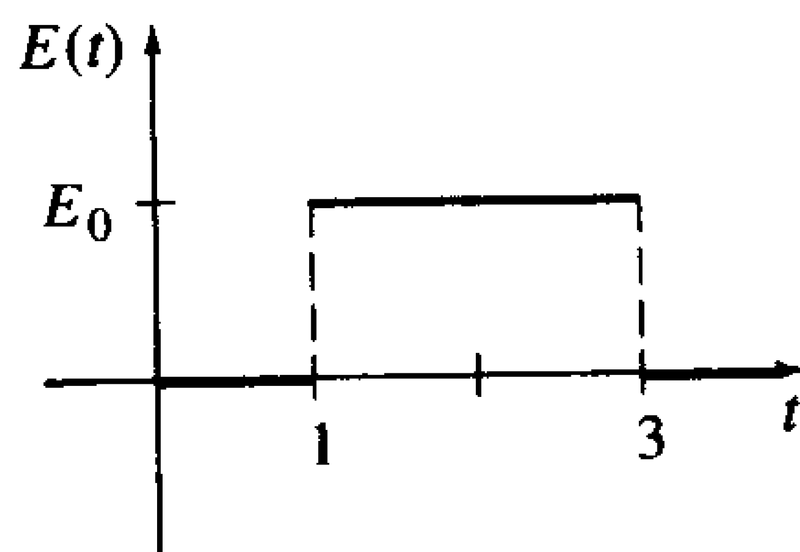


图 7.31

(b)设 $E_0=100\text{V}$. 用计算机绘图程序绘出 $q(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 6$ 上的图像. 用图像估计 $q_{\max}$，即电荷的最大值.

77. 一个悬臂梁左端嵌入在支撑物内，右端自由运动. 用拉普拉斯变换求解弯曲量 $y(x)$，其上所受的载荷为

$$w(x)=\begin{cases} w_0, & 0<x<L/2 \\ 0, & L/2\leqslant x<L. \end{cases}$$

78. 求解习题 77，横梁上的载荷如下所给：

$$w(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<L/3 \\ w_0, & L/3<x<2L/3 \\ 0, & 2L/3<x<L. \end{cases}$$

79. 求解悬臂梁的弯曲量 $y(x)$，左端嵌入在支撑物内，右端自由运动，载荷如例 9 所给.

80. 一个梁的左端嵌入在支撑物内，右端简单支撑. 求解弯曲量 $y(x)$，载荷如习题 77 所给.

讨论题

81. 讨论如何改写下列每个函数，使得定理 7.7 可以直接用于求出所给的拉普拉斯变换. 用本节的(16)式检验所得的答案.

(a)$\mathscr{L}\{(2t+1)\mathscr{U}(t-1)\}$　　(b)$\mathscr{L}\{e^t\mathscr{U}(t-5)\}$

(c)$\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$　　(d)$\mathscr{L}\{(t^2-3t)\mathscr{U}(t-2)\}$

82. (a)设用符号 ki 代替 a 后，定理 7.6 仍然适用，其中 k 是实数，$i^2=-1$. 证明用$\mathscr{L}\{te^{kit}\}$可以推导出

$$\mathscr{L}\{t\cos kt\}=\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}\quad 和 \quad \mathscr{L}\{t\sin kt\}=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

(b)利用拉普拉斯变换求解初值问题 $x''+\omega^2x=\cos\omega t$，$x(0)=0$，$x'(0)=0$.

7.4 加法运算的性质

本节中我们介绍一些便于运算的拉氏变换加法运算性质. 我们将求一些特殊函数的拉普拉斯变换，这些函数是某个函数与 t 的正整数次幂的乘积，或者是与某个积分的乘积，或者是与周期函数的乘积. 在本节中，我们还将利用拉普拉斯变换求解一些新类型的方程——Volterra 积分方程、积分微分方程，以及施迫函数是周期分段函数的常微分方程.

用 t^n 乘以函数　函数 $f(t)$与 t 乘积的拉普拉斯变换可以通过微分 $f(t)$的拉普拉斯变换得到. 若 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$，并假设微分和积分的次序是可以交换的，那么

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]dt=-\int_0^{+\infty}e^{-st}tf(t)dt=-\mathscr{L}\{tf(t)\};$$

也就是，

$$\mathscr{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

可以用上一个结果求出 $t^2f(t)$的拉氏变换：

$$\mathscr{L}\{t^2f(t)\}=\mathscr{L}\{t\cdot tf(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}\right)=\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

由前面两种情况可以归纳出$\mathscr{L}\{t^nf(t)\}$的一般结果.

定理 7.8　**变换的导数**

如果 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，那么有

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

例 1　**使用定理 7.8**

计算$\mathscr{L}\{t\sin kt\}$.

解　令 $f(t)=\sin kt$，$F(s)=k/(s^2+k^2)$，$n=1$，由定理 7.8 得

$$\mathscr{L}\{t\sin kt\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\sin kt\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}.$$ ■

若要计算$\mathscr{L}\{t^2\sin kt\}$和$\mathscr{L}\{t^3\sin kt\}$，我们依次需要做如下事情，先对例 1 中关于 s 的导数取负号，然后再对$\mathscr{L}\{t^2\sin kt\}$关于 s 的导数取负号.

注　求函数 t^ne^{at}的变换，我们既可以用定理 7.6 也可以用定理 7.8. 例如，

定理 7.6：$\mathscr{L}\{te^{3t}\}=\mathscr{L}\{t\}_{s\to s-3}=\left.\dfrac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3}=\dfrac{1}{(s-3)^2}$，

定理 7.8：$\mathscr{L}\{te^{3t}\}=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{3t}\}=-\dfrac{d}{ds}\dfrac{1}{s-3}=(s-3)^{-2}=\dfrac{1}{(s-3)^2}$.

例 2　初值问题

解 $x''+16x=\cos 4t, x(0)=0, x'(0)=1$.

解　这个初值问题描述了弹簧上的质点在受迫、无阻尼的情况下做简谐运动的模型. 质点初始时刻从平衡位置以向下 1ft/s 的速度开始运动.

对微分方程进行变换，可得

$$(s^2+16)X(s)=1+\frac{s}{s^2+16} \text{ 或 } X(s)=\frac{1}{s^2+16}+\frac{s}{(s^2+16)^2}.$$

现在，正如我们在例 1 中所看到的

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}\right\}=t\sin kt, \tag{1}$$

(1)中的 $k=4$，再由定理 7.3 的(d)，可得

$$\begin{aligned} x(t)&=\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}+\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} \\ &=\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{8}t\sin 4t. \end{aligned}$$

■

卷积　若函数 f 和 g 在$[0, +\infty)$上是分段连续的，那么一种用 $f*g$ 表示的特殊乘积定义为积分

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{2}$$

它称为 f 和 g 的卷积(convolution). 卷积 $f*g$ 是 t 的函数. 例如，

$$e^t*\sin t=\int_0^t e^\tau\sin(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}(-\sin t-\cos t+e^t). \tag{3}$$

请读者证明

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau;$$

即 $f*g=g*f$. 这表示两个函数的卷积是可交换的. 请参考练习 7.4 的习题 54.

函数乘积的积分不一定是积分的乘积. 然而，特殊积分(2)的拉普拉斯变换是 f 和 g 的拉普拉斯变换的乘积. 这意味着可以不通过计算(3)中的积分就可以求得两个函数卷积的拉普拉斯变换. 这个结果就是卷积定理(convolution theorem).

定理 7.9　卷积定理

如果 $f(t)$和 $g(t)$是$[0, +\infty)$上的分段连续函数，且是指数阶的，那么

$$\mathscr{L}\{f*g\}=\mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\}=F(s)G(s).$$

证　令

$$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-s\tau}f(\tau)d\tau,$$

$$G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-s\beta}g(\beta)d\beta.$$

因此，我们有

$$F(s)G(s)=\left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-s\beta}g(\beta)d\beta\right)$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+\beta)}f(\tau)g(\beta)d\tau d\beta$$
$$=\int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+\beta)}g(\beta)d\beta.$$

保持 τ 固定不变，令 $t=\tau+\beta$，$dt=d\beta$，因此

$$F(s)G(s)=\int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int_\tau^{+\infty} e^{-st}g(t-\tau)dt.$$

在 $t\tau$ 平面上，我们在图 7.32 中的阴影部分上进行积分. 因为 f 和 g 是$[0, +\infty)$上的分段连续指数阶函数，所以积分次序可以交换：

$$F(s)G(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^{+\infty} e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt=\mathscr{L}\{f*g\}.\quad ■$$

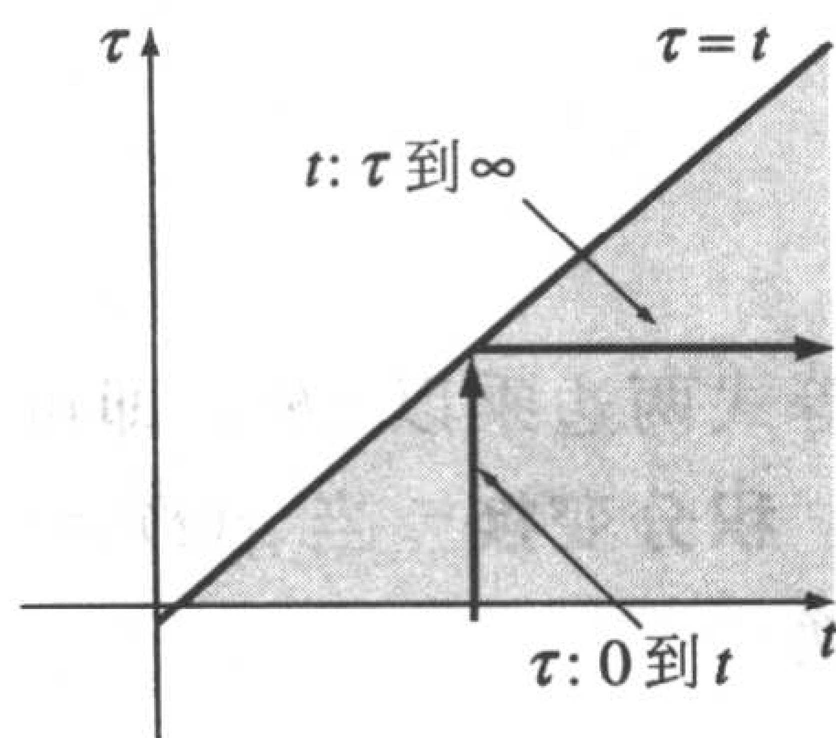


图 7.32

例 3 **卷积变换**

计算 $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}$.

解 令 $f(t)=e^t$，$g(t)=\sin t$，由卷积定理可知 f 和 g 卷积的拉普拉斯变换就是它们拉普拉斯变换的乘积：

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}=\mathscr{L}\{e^t\}\cdot\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.\quad ■$$

定理 7.9 的逆形式 卷积定理有时在求两个拉氏变换乘积的逆变换时是非常有用的. 由定理 7.9 可得

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f*g. \tag{4}$$

在附录 C 的拉普拉斯变换表中，许多结果都可以用(4)式推导出来. 例如，在下个例子中我们可以得到表中的第 25 项：

$$\mathscr{L}\{\sin kt-kt\cos kt\}=\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}. \tag{5}$$

例 4 **作为卷积的逆变换**

计算 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$.

解 令

$$F(s)=G(s)=\frac{1}{s^2+k^2},$$

因此

$$f(t)=g(t)=\frac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}=\frac{1}{k}\sin kt.$$

由(4)式可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}=\frac{1}{k^2}\int_0^t \sin k\tau\sin k(t-\tau)d\tau. \tag{6}$$

回顾三角函数公式

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B,$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B.$$

用第 2 个等式减去第 1 个等式，可得

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)].$$

若令 $A=k\tau$，$B=k(t-\tau)$，计算(6)中的积分：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t [\cos k(2\tau-t) - \cos kt]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\sin k(2\tau-t) - \tau\cos kt\right]_0^t \\ &= \frac{\sin kt - kt\cos kt}{2k^3}.\end{aligned}$$

给等式两边乘以 $2k^3$，即可得(5)的逆形式. ■

积分变换 当 $g(t)=1$，$\mathscr{L}\{g(t)\}=G(s)=1/s$ 时，卷积定理就给出了 f 积分的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{7}$$

(7)的逆形式为

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}, \tag{8}$$

当 s^n 是分母的一个因子，且 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ 比较容易积分时，它可以用来代替部分分式. 例如，我们知道当 $f(t)=\sin t$ 时，$F(s)=1/(s^2+1)$，再根据(8)式，可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin\tau\mathrm{d}\tau = 1-\cos t,$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos\tau)\mathrm{d}\tau = t-\sin t,$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (\tau-\sin\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t,$$

等等.

沃尔泰拉积分方程 卷积定理和(7)中的结果有助于解一些其他类型的方程，在这些方程里未知函数在积分号下. 下一个例子我们从沃尔泰拉积分方程中解出 $f(t)$，

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

函数 $g(t)$ 和 $h(t)$ 是已知的. 注意(9)中的积分有形如(2)的卷积，只是用符号 h 代替了 g.

例 5 积分方程

从 $f(t) = 3t^2 - \mathrm{e}^{-t} - \int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau$ 中解出 $f(t)$.

解 由积分学可知 $h(t-\tau)=\mathrm{e}^{t-\tau}$ 使得 $h(t)=\mathrm{e}^t$. 对每一项进行拉普拉斯变换，特别地，由定理 7.9 知，积分变换为 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ 与 $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^t\}=1/(s-1)$ 的乘积：

$$F(s)=3\cdot\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s+1}-F(s)\cdot\frac{1}{s-1}.$$

从此方程中解出 $F(s)$，并进行部分分式分解，求得

$$F(s)=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}.$$

再由逆变换得

$$\begin{aligned}f(t)&=3\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\\&=3t^2-t^3+1-2e^{-t}.\end{aligned}$$

■

串联电路 在一个单回路或串联电路中，基尔霍夫第二定律说明电感线圈、电阻和电容上的电压降之和等于电路的外加电压 $E(t)$. 现在分别知道电感、电阻和电容的电压降为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},Ri(t),\text{及}\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

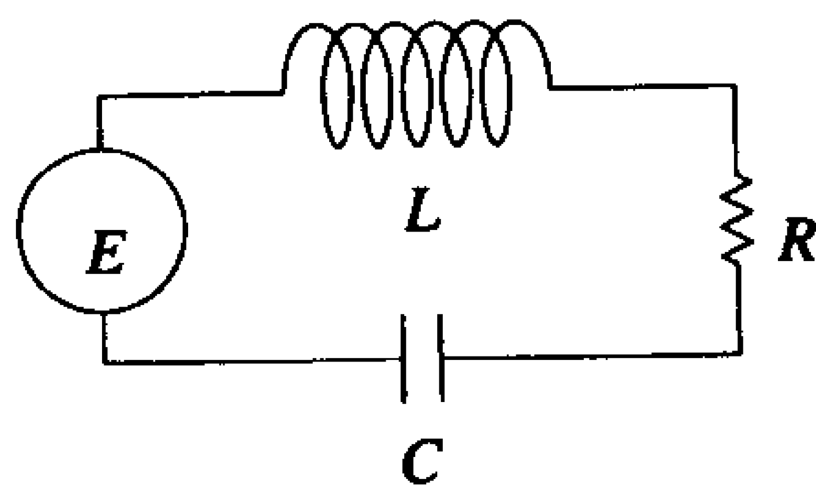


图 7.33

其中 $i(t)$ 为电流，L、R、C 均是常数. 电路中的电流如图 7.33 所示，由如下积分微分方程(integrodifferential equation)确定

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau=E(t). \qquad (10)$$

例 6 积分微分方程

求单回路 LRC 电路中的电流 $i(t)$，$L=0.1\text{h}$，$R=2\Omega$，$C=0.1\text{f}$，$i(0)=0$，外加电压为

$$E(t)=120t-120t\,\mathscr{U}(t-1).$$

解 利用题中的数据，方程(10)可以写成

$$0.1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+2i+10\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau=120t-120t\,\mathscr{U}(t-1).$$

根据(7)式得 $\mathscr{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=I(s)/s$，其中 $I(s)=\mathscr{L}\{i(t)\}$. 因此积分微分方程的拉普拉斯变换为

$$0.1sI(s)+2I(s)+10\frac{I(s)}{s}=120\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right].$$ ← 由 7.3 节(16)式可得

给方程两边乘以 $10s$，利用 $s^2+20s+100=(s+10)^2$，解出 $I(s)$，得到

$$I(s)=1200\left[\frac{1}{s(s+10)^2}-\frac{1}{s(s+10)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right].$$

由部分分式可得

$$\begin{aligned}I(s)=1200[&\frac{1/100}{s}-\frac{1/100}{s+10}-\frac{1/10}{(s+10)^2}-\frac{1/100}{s}e^{-s}\\&+\frac{1/100}{s+10}e^{-s}+\frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}].\end{aligned}$$

根据第二平移定理的逆形式和 7.3 节的(15)式，最后可得

$$\begin{aligned}i(t)=&12[1-\mathscr{U}(t-1)]-12[e^{-10t}-e^{-10(t-1)}\,\mathscr{U}(t-1)]\\&-120te^{-10t}-1080(t-1)e^{-10(t-1)}\,\mathscr{U}(t-1).\end{aligned}$$

用分段函数的形式可以把前述解写为

$$i(t)=\begin{cases}12-12\mathrm{e}^{-10t}-120t\mathrm{e}^{-10t}, & 0\leqslant t<1\\ -12\mathrm{e}^{-10t}+12\mathrm{e}^{-10(t-1)}-120t\mathrm{e}^{-10t}-1080(t-1)\mathrm{e}^{-10(t-1)}, & t\geqslant 1\end{cases}$$

根据解的上述形式，利用 CAS 软件可以分别在两个区间上绘出 $i(t)$ 的图像，并将两个图像合在一个图形上. 注意在图 7.34 中，尽管输入 $E(t)$ 是不连续的，但是输出或响应 $i(t)$ 是连续函数. ■

周期函数的变换 若周期函数 f 的周期为 T，$T>0$，则有 $f(t+T)=f(t)$. 周期函数的拉普拉斯变换可以通过对其在一个周期上进行积分得到.

定理 7.10 周期函数的变换

若 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的分段连续函数，且是指数阶的，周期为 T，则

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t.$$

证 把 f 的拉普拉斯变换写成两个积分：

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t.$$

令 $t=u+T$，最后一个积分变为

$$\int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s(u+T)}f(u+T)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-sT}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-su}f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

因此 $\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}$.

从这个方程中解出 $\mathscr{L}\{f(t)\}$，定理即可得证. ■

例 7 周期函数的变换

求图 7.35 所示周期函数的拉普拉斯变换.

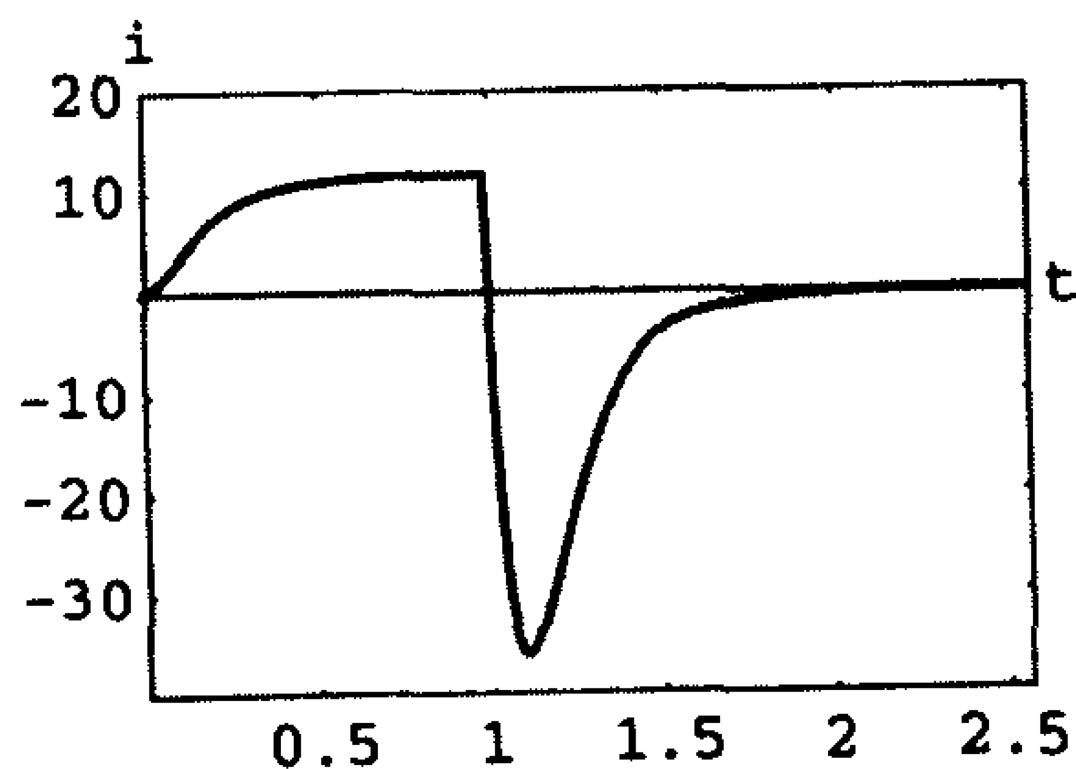


图 7.34

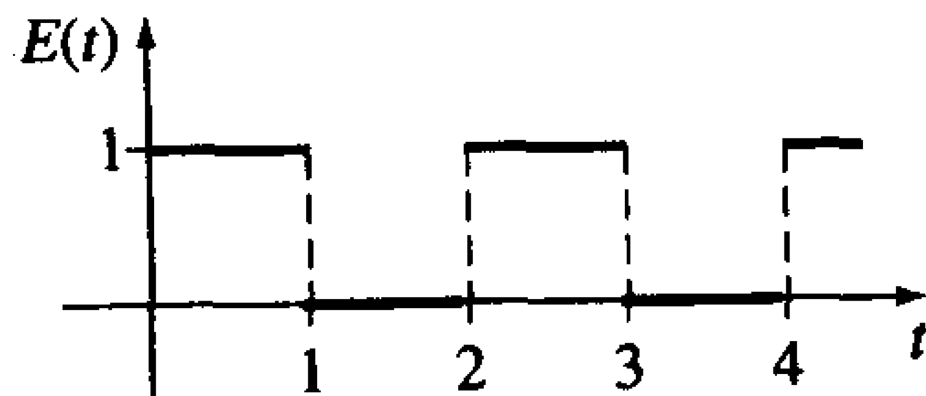


图 7.35

解 函数 $E(t)$ 称为方波，周期为 $T=2$. 在区间 $0\leqslant t<2$ 上，$E(t)$ 定义为

$$E(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & 1\leqslant t<2\end{cases},$$

这个区间之外的部分由 $f(t+2)=f(t)$ 定义. 由定理 7.10，

$$\mathscr{L}\{E(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}E(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1dt+\int_1^2 e^{-st}\cdot 0dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\frac{1-e^{-s}}{s} \qquad \leftarrow 1-e^{-2s}=(1+e^{-s})(1-e^{-s})$$

$$=\frac{1}{s(1+e^{-s})}. \tag{11}$$

■

例 8 周期性的外加电压

单回路 LR 串联电路中的电流 $i(t)$ 可以用如下微分方程描述

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t). \tag{12}$$

求电流 $i(t)$，$i(0)=0$，$E(t)$ 为图 7.35 所示的方波函数.

解 由上个例子中的(11)，微分方程的拉普拉斯变换为

$$LsI(s)+RI(s)=\frac{1}{s(1+e^{-s})} \text{ 或 } I(s)=\frac{1/L}{s(s+R/L)}\cdot\frac{1}{1+e^{-s}}. \tag{13}$$

为了求最后一个函数的逆拉普拉斯变换，我们首先使用几何级数. 令 $x=e^{-s}$，$s>0$，几何级数

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots \text{ 可以写为 } \frac{1}{1+e^{-s}}=1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\cdots.$$

由 $\frac{1}{s(s+R/L)}=\frac{L/R}{s}-\frac{L/R}{s+R/L}$ 我们可以把(13)式改写为

$$I(s)=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+R/L}\right)(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}+\cdots\right)-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{s+R/L}-\frac{1}{s+R/L}e^{-s}+\frac{e^{-2s}}{s+R/L}-\frac{e^{-3s}}{s+R/L}+\cdots\right).$$

对级数的每一项都应用第二平移定理的形式，我们可得

$$i(t)=\frac{1}{R}(1-\mathscr{U}(t-1)+\mathscr{U}(t-2)-\mathscr{U}(t-3)+\cdots)$$

$$-\frac{1}{R}(e^{-Rt/L}-e^{-R(t-1)/L}\mathscr{U}(t-1)+e^{-R(t-2)/L}\mathscr{U}(t-2)-e^{-R(t-3)/L}\mathscr{U}(t-3)+\cdots)$$

或等价于

$$i(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-Rt/L})+\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-e^{-R(t-n)/L})\mathscr{U}(t-n).$$

为了对这个解加以解释，我们设 $R=1$，$L=1$，$0\leqslant t<4$. 在这种情况下，

$$i(t)=1-e^{-t}-(1-e^{t-1})\mathscr{U}(t-1)+(1-e^{-(t-2)})\mathscr{U}(t-2)-(1-e^{-(t-3)})\mathscr{U}(t-3);$$

换言之，

$$i(t)=\begin{cases}1-e^{-t}, & 0\leqslant t<1\\ -e^{-t}+e^{-(t-1)}, & 1\leqslant t<2\\ 1-e^{-t}+e^{-(t-1)}-e^{-(t-2)}, & 2\leqslant t<3\\ -e^{-t}+e^{-(t-1)}-e^{-(t-2)}+e^{-(t-3)}, & 3\leqslant t<4\end{cases}$$

$i(t)$在区间 $0\leqslant t<4$ 上的图像如图 7.36 所示，可以用 CAS 绘出. ■

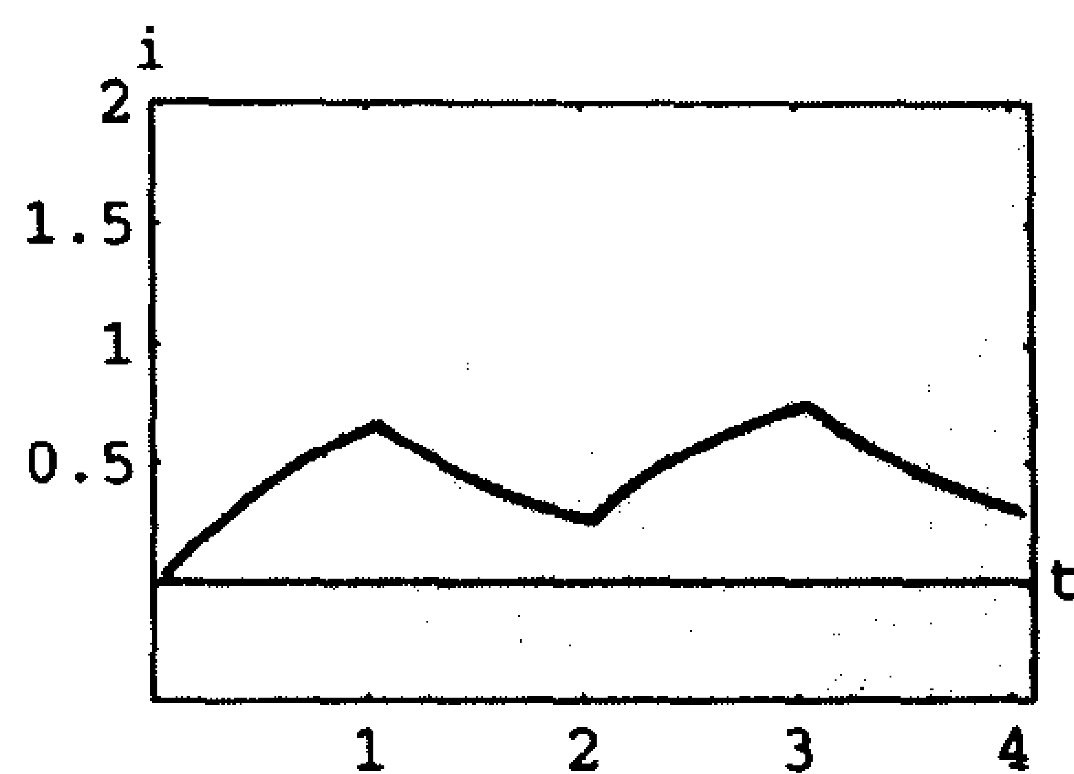


图 7.36

练习 7.4

在习题 1～10 中，求解 $F(s)$.

1. $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$
2. $\mathscr{L}\{t\sinh 3t\}$
3. $\mathscr{L}\{t^2\sinh t\}$
4. $\mathscr{L}\{t^2\cos t\}$
5. $\mathscr{L}\{te^{2t}\sin 6t\}$
6. $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$
7. $\mathscr{L}\{1 * t^3\}$
8. $\mathscr{L}\{t^2 * te^t\}$
9. $\mathscr{L}\{e^{-t} * e^t\cos t\}$
10. $\mathscr{L}\{e^{2t} * \sin t\}$

在习题 11～18 中，不用积分，计算给出的拉普拉斯变换.

11. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\}$
12. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos\tau d\tau\right\}$
13. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau\right\}$
14. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau\sin\tau d\tau\right\}$
15. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\right\}$
16. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \sin\tau\cos(t-\tau) d\tau\right\}$
17. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \sin\tau d\tau\right\}$
18. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}$
19. 用(8)式计算所给的逆变换.

    (a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$ (b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}$ (c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s-1)}\right\}$

20. 附录 C 中的表不包括下面的项

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8k^3 s}{(s^2+k^2)^3}\right\}.$$

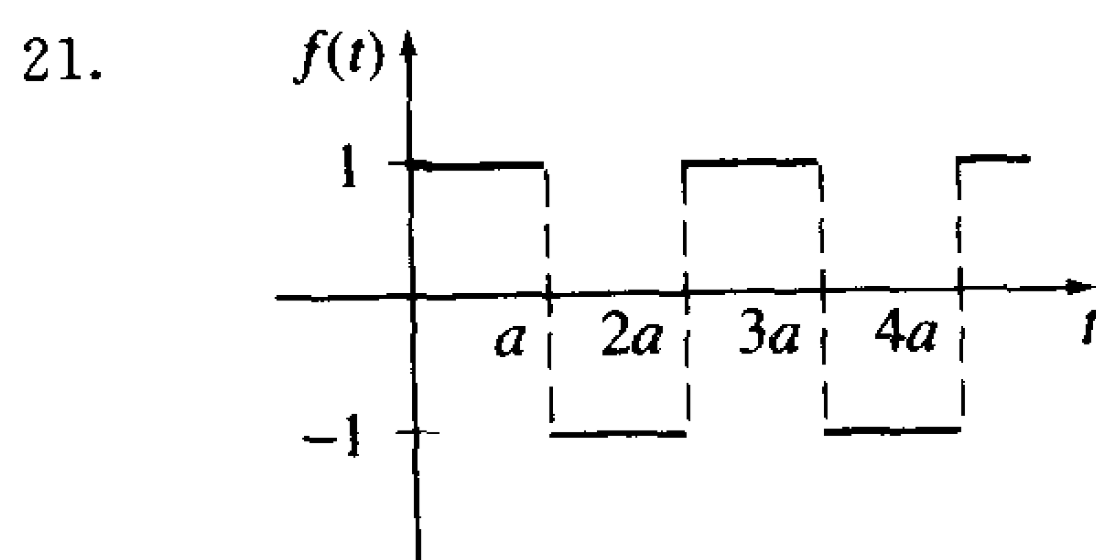


(a)用(4)和(5)中的结果计算这个逆变换. 用 CAS 计算卷积积分.

(b)重新计算(a)中的答案. 可以用不同的方法得到这个结果吗?

在习题 21～26 中，利用定理 7.10 求给定周期函数的拉普拉斯变换.

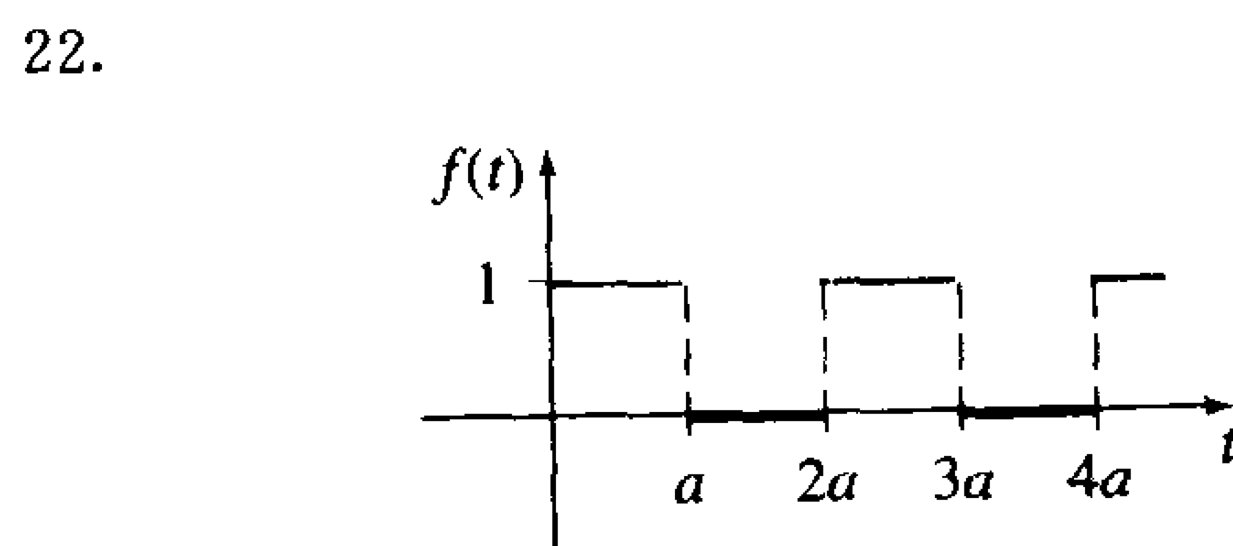
21.



曲折函数

图 7.37

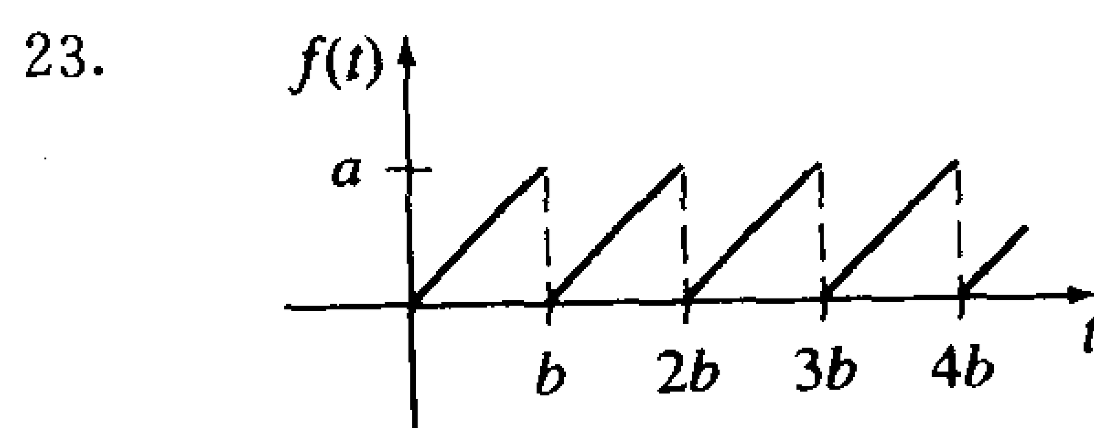
22.



正方形波动

图 7.38

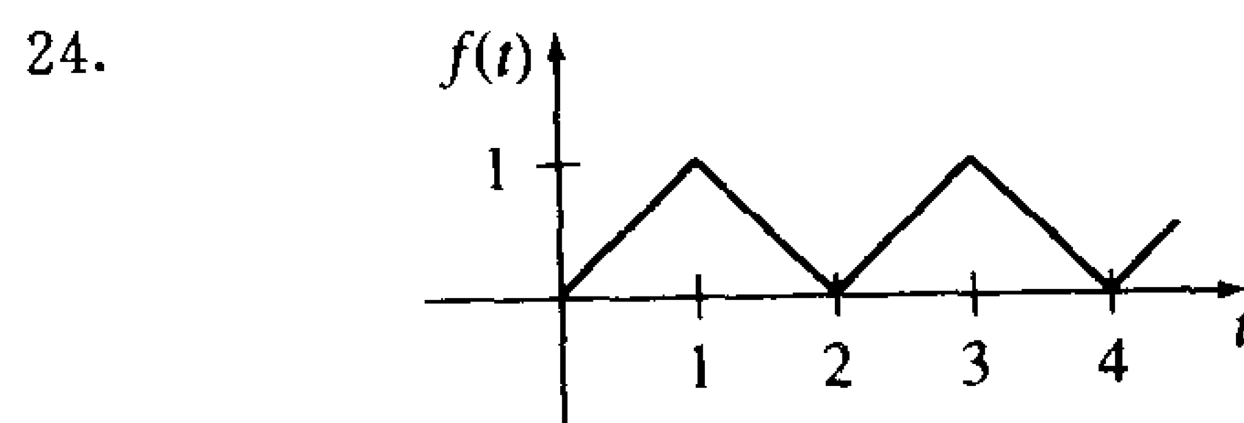
23.



锯齿函数

图 7.39

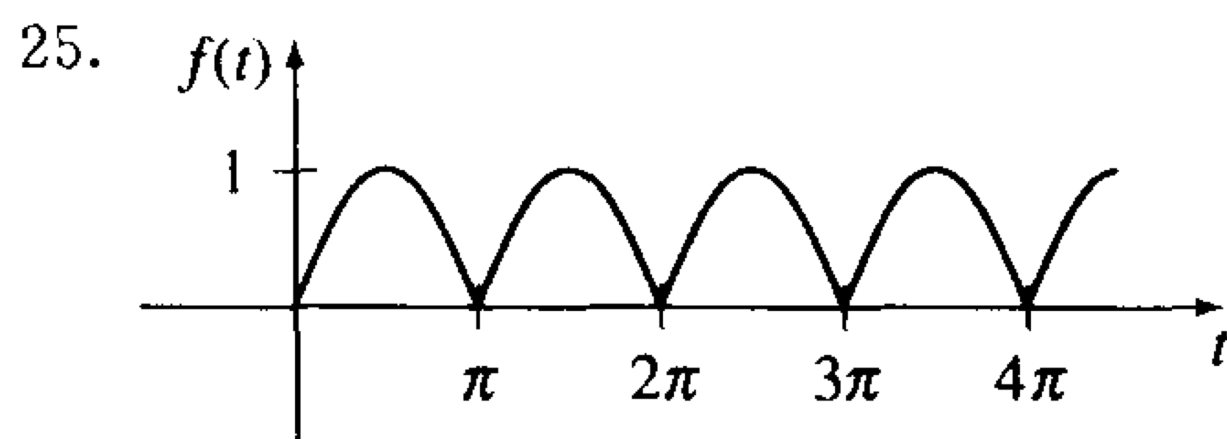
24.



三角形波动

图 7.40

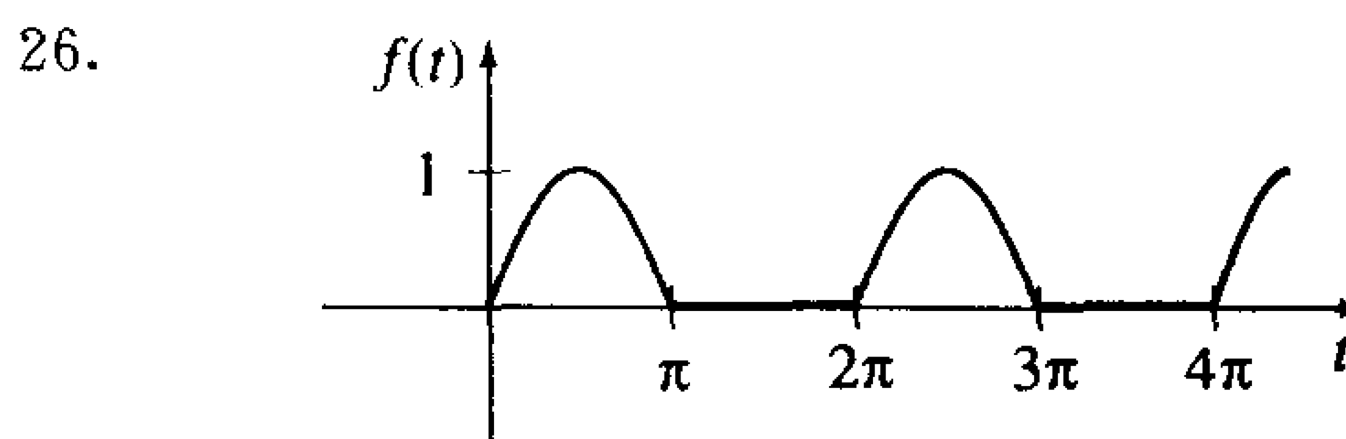
25.



sin*t* 的整波动流

图 7.41

26.



sin*t* 的半波动流

图 7.42

在下面的习题中如有必要可以使用附录 C 中的拉普拉斯变换表.

在习题 27～32 中，用拉普拉斯变换求解给定的初值问题.

27. $y'+y=t\sin t$，$y(0)=0$

28. $y'-y=te^t\sin t$，$y(0)=0$

29. $y''+9y=\cos 3t$，$y(0)=2$，$y'(0)=5$

30. $y''+y=\sin t$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$

31. $y''+16y=f(t)$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$，其中 $f(t)=\begin{cases}\cos 4t, & 0\leqslant t<\pi \\ 0, & t\geqslant\pi\end{cases}$

32. $y''+y=f(t)$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$，其中 $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\pi/2 \\ \sin t, & t\geqslant\pi/2\end{cases}$

33. 用拉普拉斯变换和习题 20 的结果求解初值问题 $y''+y=\sin t+t\sin t$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$. 用绘图工具绘出解的图像.

34. 用绘图工具绘出所给解的图像.

(a)习题 31 在区间 $0\leqslant t<2\pi$ 上的 $y(t)$.

(b)习题 32 在区间 $0\leqslant t<3\pi$ 上的 $y(t)$.

在习题 35～44 中，用拉普拉斯变换求解所给的积分方程或积分微分方程.

35. $f(t)+\int_0^t (t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=t$

36. $f(t)=2t-4\int_0^t \sin\tau f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

37. $f(t)=te^t+\int_0^t \tau f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

38. $f(t)+2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=4e^{-t}+\sin t$

39. $f(t)+\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau=1$

40. $f(t)=\cos t+\int_0^t e^{-\tau}f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

41. $f(t)=1+t-\frac{8}{3}\int_0^t (\tau-t)^3 f(\tau)\mathrm{d}\tau$

42. $t-2f(t)=\int_0^t (e^{\tau}-e^{-\tau})f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

43. $y'(t)=1-\sin t-\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$，$y(0)=0$

44. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+6y(t)+9\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=1$，$y(0)=0$

在习题45和46中，解方程(10)，初始条件为 $i(0)=0$，L、R、C、$E(t)$ 如下所给. 用绘图工具绘出解在区间 $0\leqslant t\leqslant 3$ 上的图像.

45. $L=0.1\text{h}$，$R=3\Omega$，$C=0.05\text{f}$，$E(t)=100[\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2)]$

46. $L=0.005\text{h}$，$R=1\Omega$，$C=0.02\text{f}$，$E(t)=100[t-(t-1)\mathscr{U}(t-1)]$

在习题47和48中，解方程(12)，初始条件为 $i(0)=0$，$E(t)$ 如下所给. 用绘图工具绘出解在区间 $0\leqslant t<4$ 上的图像，$L=1$，$R=1$.

47. $E(t)$ 是习题21中的曲折函数，振幅为1，$a=1$.

48. $E(t)$ 是习题23中的锯齿函数，振幅为1，$b=1$.

在习题49和50中，解受迫有阻尼的弹簧/质量系统模型

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=f(t),\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

其中施迫函数 f 是给定的. 用绘图工具绘出 $x(t)$ 在指定区间上的图像.

49. $m=1/2$，$\beta=1$，$k=5$，f 是习题21中的曲折函数，振幅为10，$a=\pi$，$0\leqslant t<2\pi$.

50. $m=1$，$\beta=2$，$k=1$，f 是习题22中的正方形波动，振幅为5，$a=\pi$，$0\leqslant t<4\pi$.

讨论题

51. 讨论如何利用定理7.8求解

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\}.$$

52. 解释：$t*\mathscr{U}(t-a)=\frac{1}{2}(t-a)^2\,\mathscr{U}(t-a)$.

53. 在(6)式中，我们看到的结果 $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=F(s)/s$，其中 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$，这可由 $g(t)=1$ 时的卷积得到. 用本章的定义和定理，用两种或两种以上的方法求出同样的结果.

54. 讨论如何证明 $f*g=g*f$. 并给出证明过程.

55. 拉普拉斯变换不适合解变系数的微分方程；但是，它可以在有些特殊情况下使用.

(a) 拉盖尔微分方程 $ty''+(1-t)y'+ny=0$ 有多项式解，n 是非负整数. 这些解自然称为拉盖尔多项式，用 $\mathscr{L}_n(t)$ 表示. 用本节的定理求解 $n=0,1,2,3,4$ 时的 $\mathscr{L}_n(t)$，已知 $y(0)=1$.

(b) 证明 $\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^t}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}t^n\mathrm{e}^{-t}\right\}=Y(s)$，其中 $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$，$y=L_n(t)$ 是(a)中微分方程的多项式解. 可得

$$L_n(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}t^n\mathrm{e}^{-t},n=0,1,2,\cdots.$$

由这个关系式可以得到拉盖尔多项式，类似于得到勒让德多项式的罗得里格斯公式. 请见6.3节(22)式.

计算机实验作业

56. 在本题的(a)中，我们使用Mathematica命令行来求解微分方程的拉普拉斯变换，并通过求逆变换得到初值问题的解. 在Mathematica中，函数 $y(t)$ 的拉普拉斯变换可以用 **LaplaceTransform[y[t], t, s]** 得到. 在这个语句里，我们用符号 **Y** 代换 **LaplaceTransform[y[t], t, s]**. (如果没有Mathematica，就用CAS句法中相应的语句代替.)

(a) 考虑初值问题

$$y''+6y'+9y=t\sin t,y(0)=2,y'(0)=-1.$$

加载拉普拉斯变换软件包，按照下面的命令行依次执行. 拷贝输出或打印出结果.

```
diffequat=y''[t]+6y'[t]+9y[t]==tSin[t]
transformdeq =LaplaceTransform[diffequat, t, s]/. {y[0]->2,
```

```
        y'[0]->-1, LaplaceTransform[y[t], t, s]->Y}
soln=Solve[transformdeq, Y]//Flatten
Y=Y/. soln
InverseLaplaceTransform[Y, s, t]
```

(b)修改(a)中的程序，求解

$$y''' + 3y' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$$

(c)LC 串联电路中电容器的电荷 $q(t)$ 由如下模型给出

$$\frac{d^2q}{dt^2} + q = 1 - 4\,\mathscr{U}(t-\pi) + 6\,\mathscr{U}(t-3\pi), q(0) = 0, q'(0) = 0.$$

修改(a)中的程序求解 $q(t)$.（在 Mathematica 中，单位阶梯函数 $\mathscr{U}(t-a)$ 写为 **UnitStep[t−a]**.）绘出解的图像.

7.5 狄拉克 δ 函数

力学系统经常会受到短周期的强外力作用(电路也会受到这类电动势的作用). 例如，振动的机翼会受到闪电的电击，弹簧上的质点也可能受到球形锤子的猛烈击打，一些球(棒球、高尔夫球、网球)当受到某种球棒(棒球棒、高尔夫球棒、网球拍)的猛烈撞击时会被击飞. 请参考图 7.43. 我们从考虑一种函数开始我们本节的讨论，而该函数可以作为这种外力的数学模型.

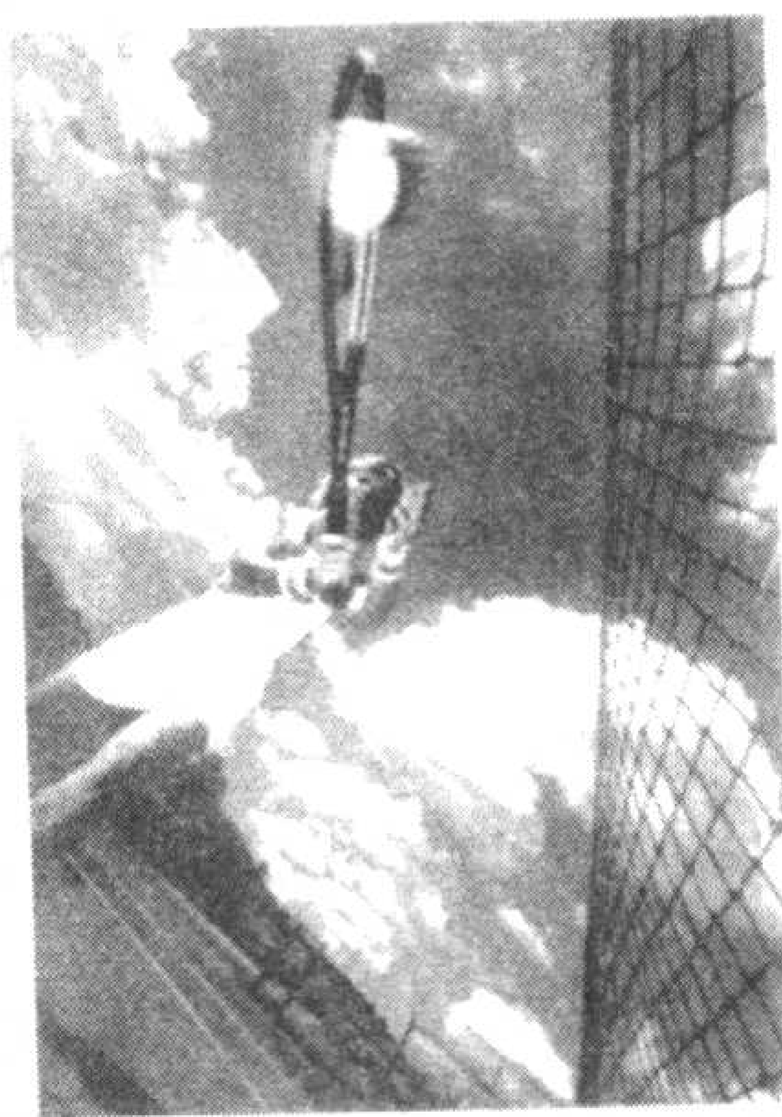


图 7.43 网球拍受到一个作用在球上的短周期强外力

单位冲量 分段函数

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \leqslant t < t_0 + a \\ 0, & t \geqslant t_0 + a \end{cases} \tag{1}$$

的图像如图 7.44(a)所示，其中 $a>0$，$t_0>0$. 对于很小的一个 a 值，$\delta_a(t-t_0)$是一个很大的常函数，它的周期很短，大约是 t_0，起到"开"的作用. 当 $a\to 0$ 时，$\delta_a(t-t_0)$的形态如图 7.44(b)所示. 函数 $\delta_a(t-t_0)$称为单位冲量(unit impulse)，因为它有一个积分性质 $\int_0^{+\infty}\delta_a(t-t_0)\mathrm{d}t = 1$.

狄拉克 δ 函数 在实践中，用另外一种单位冲量更方便，一个近似于 $\delta_a(t-t_0)$的"函数"定义为极限

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0). \tag{2}$$

这个表达式不是一个函数，它有两个性质

$$(\text{i})\ \delta(t-t_0) = \begin{cases} +\infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}, \qquad (\text{ii})\ \int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1.$$

单位冲量 $\delta(t-t_0)$称为狄拉克 δ 函数.

假设 $\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim\limits_{a\to 0}\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}$，则可以得到狄拉克 δ 函数的拉普拉斯变换.

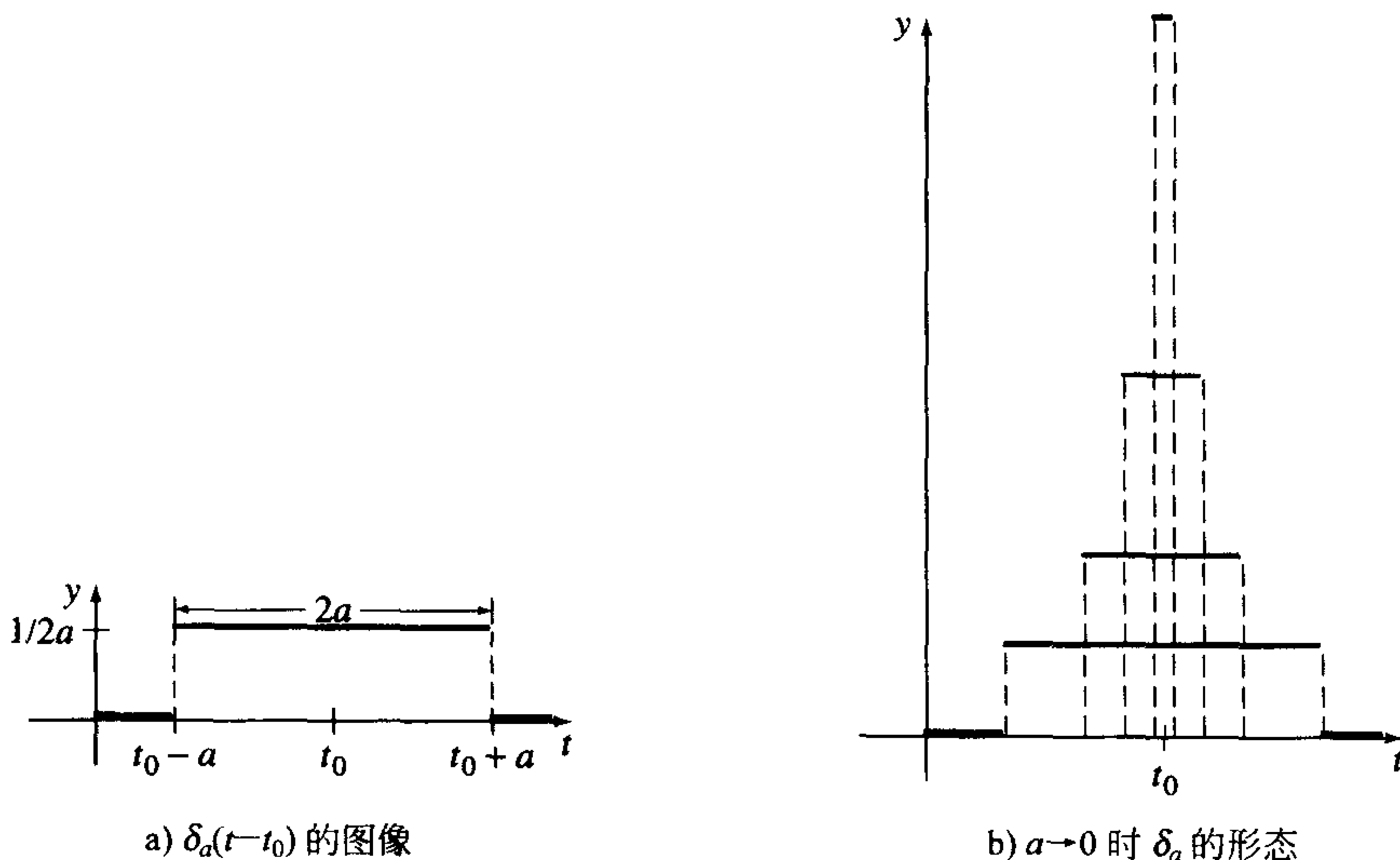


图 7.44

定理 7.11 狄拉克 δ 函数

对于 $t_0>0$，有

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=\mathrm{e}^{-st_0}. \tag{3}$$

证 首先，由 7.3 节的(11)和(12)，我们可以用单位阶梯函数表示 $\delta_a(t-t_0)$：

$$\delta_a(t-t_0)=\frac{1}{2a}[\mathscr{U}(t-(t_0-a))-\mathscr{U}(t-(t_0+a))].$$

再由线性及 7.3 节的(14)，这个等式的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=\frac{1}{2a}\left[\frac{\mathrm{e}^{-s(t_0-a)}}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-s(t_0+a)}}{s}\right]=\mathrm{e}^{-st_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sa}-\mathrm{e}^{-sa}}{2sa}\right). \tag{4}$$

因为当 $a\to 0$ 时(4)有待定形式 0/0，所以可以应用洛必达法则得：

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{a\to 0}\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=\mathrm{e}^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sa}-\mathrm{e}^{-sa}}{2sa}\right)=\mathrm{e}^{-st_0}.$$ ■

当 $t_0=0$ 时，可以从(3)式得到

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1.$$

这个结果强调 $\delta(t)$不是我们前面所考虑的一般类型的函数，因为由定理 7.4 可知，当 $s\to\infty$时，有$\mathscr{L}\{f(t)\}\to 0$.

例 1 两个初值问题

解 $y''+y=4\delta(t-2\pi)$，约束分别为：

(a) $y(0)=1, y'(0)=0$　　(b) $y(0)=0, y'(0)=0$

这两个初值问题可以作为描述弹簧上质点在无阻尼介质中运动的数学模型. 在 $t=2\pi$ 时刻，质点受到猛烈的撞击. 在(a)中，质点在平衡位置下方 1 单位距离处由静止释放. 在(b)中，质点在平衡位置处于静止状态.

解 (a) 从(3)式可知微分方程的拉普拉斯变换是

$$s^2Y(s)-s+Y(s)=4\mathrm{e}^{-2\pi s} \text{ 或 } Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{4\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

利用第二平移定理的逆形式，可以求得

$$y(t)=\cos t+4\sin(t-2\pi)\,\mathscr{U}(t-2\pi).$$

因为 $\sin(t-2\pi)=\sin t$，所以前述解可以写为

$$y(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\leqslant t<2\pi\\ \cos t+4\sin t, & t\geqslant 2\pi\end{cases}. \tag{5}$$

在图 7.45 中，我们可由(5)的图像看出质点在做简谐振动，直到在 $t=2\pi$ 时刻受到撞击运动状态改变. 单位冲量对它的影响是使振幅增大到了 $\sqrt{17}$，$t>2\pi$.

(b) 在这种情况下，方程的变换可以简化为

$$Y(s)=\frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1},$$

$$\begin{aligned}y(t)&=4\sin(t-2\pi)\mathscr{U}(t-2\pi)\\&=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<2\pi\\ 4\sin t, & t\geqslant 2\pi\end{cases}.\end{aligned} \tag{6}$$

如图 7.46 所示(6)的图像，正如我们从初始条件中所期望的那样，质点直到 $t=2\pi$ 时受到撞击后才开始运动.

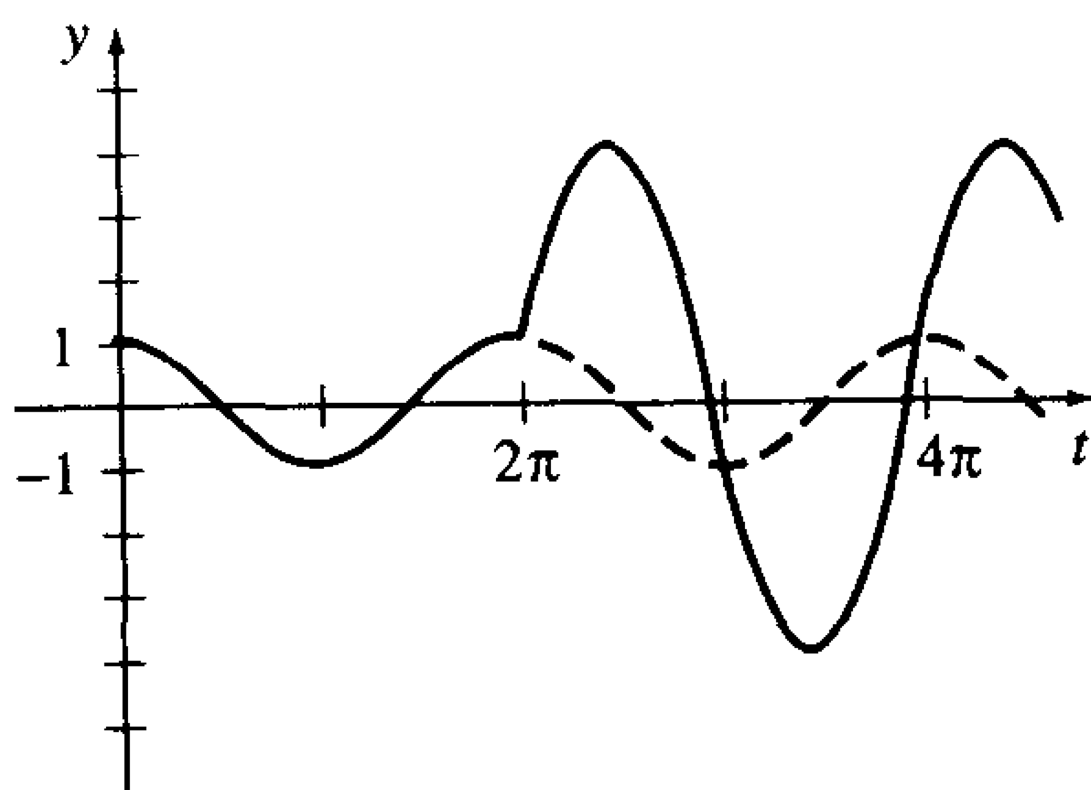


图 7.45

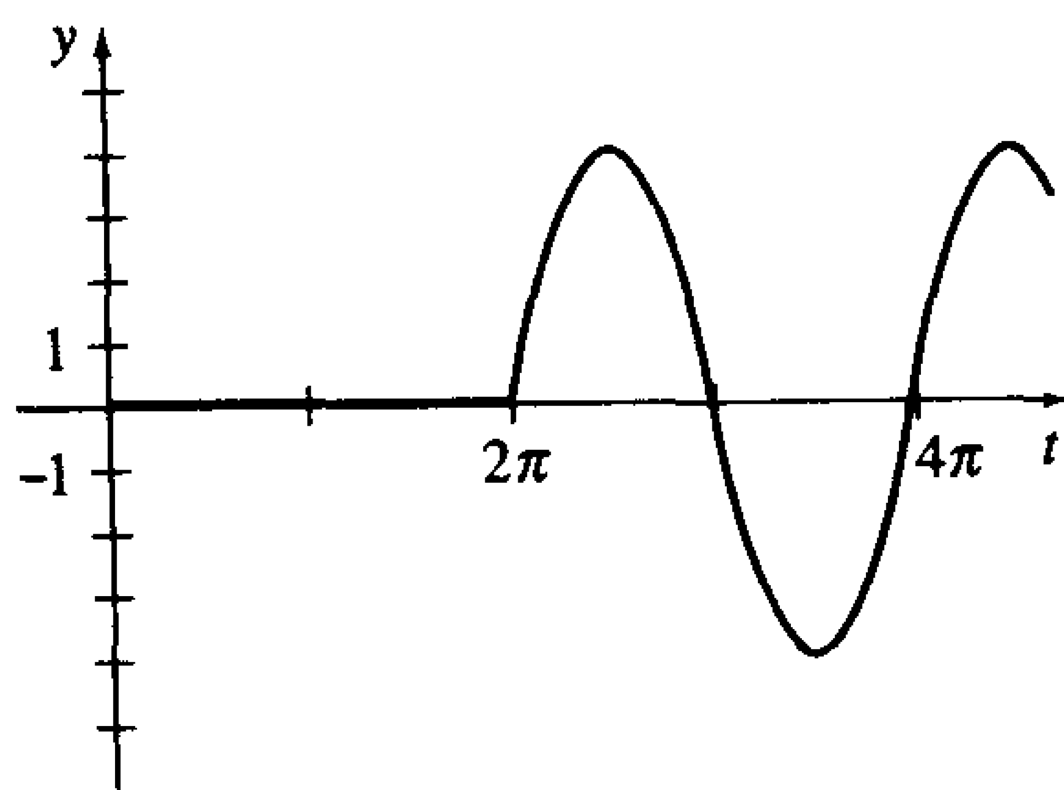


图 7.46

■

注 (ⅰ)若 $\delta(t-t_0)$ 是通常意义下的函数，则有本节前面所述的性质(ⅰ)，也就意味着 $\int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=0$ 而不是 $\int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$. 因为狄拉克 δ 函数不同于一般普通的函数，所以尽管它能产生正确的结果，但是刚开始的时候却遭到不少数学家的置疑. 然而，在 20 世纪 40 年代，法国数学家 Laurent Schwartz 在他的著作《La Théorie de distribution》里严格地证明了狄拉克的这个有争议的函数，结果产生了一个崭新的数学分支，称为分布理论(theory of distribution)或广义函数(generalized function). 在这个理论中，(2)不是 $\delta(t-t_0)$ 的一个定义，也不是函数值取 $+\infty$ 或 0 的函数. 尽管在这里我们不打算深入讨论这个话题，但是狄拉克 δ 函数作用在其他函数上有着很好的性质. 若 f 是连续函数，则

$$\int_0^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{7}$$

可以认为是 $\delta(t-t_0)$ 的定义. 这个结论称为过滤性质(sifting property)，因为 $\delta(t-t_0)$ 可

以从 f 在 $[0,+\infty)$ 上的值中过滤出 $f(t_0)$. 注意性质(ⅱ)($f(t)=1$)和(3)($f(t)=e^{-st}$)与(7)是一致的.

(ⅱ)7.2 节的注释说明了一般线性常系数 n 阶微分方程的转移函数为 $W(s)=1/P(s)$，其中 $P(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$. 转移函数是函数 $w(t)$ 的拉普拉斯变换，这个函数称为线性系统的权函数(weight function). 但是 $w(t)$ 不能根据下面的讨论来确定. 简单起见，我们考虑一个二阶线性系统，在 $t=0$ 时刻的输入是单位冲量：

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=\delta(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

利用拉普拉斯变换和 $\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1$ 证明响应 y 的变换是转移函数

$$Y(s)=\frac{1}{a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{1}{P(s)}=W(s),\quad \text{因此有 } y=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s)}\right\}=w(t).$$

由此可以看出，一般地，n 阶线性系统的权函数 $y=w(t)$ 就是该系统的单位冲量输入零状态响应. 出于这个原因，$w(t)$ 也称为系统的冲量响应(impulse response).

练习 7.5

在习题 1～12 中，用拉普拉斯变换求解给定初始条件的微分方程.

1. $y'-3y=\delta(t-2)$，$y(0)=0$
2. $y'+y=\delta(t-1)$，$y(0)=2$
3. $y''+y=\delta(t-2\pi)$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$
4. $y''+16y=\delta(t-2\pi)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
5. $y''+y=\delta\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)+\delta\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
6. $y''+y=\delta(t-2\pi)+\delta(t-4\pi)$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$
7. $y''+2y'=\delta(t-1)$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$
8. $y''-2y'=1+\delta(t-2)$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$
9. $y''+4y'+5y=\delta(t-2\pi)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
10. $y''+2y'+y=\delta(t-1)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
11. $y''+4y'+13y=\delta(t-\pi)+\delta(t-3\pi)$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$
12. $y''-7y'+6y=e^t+\delta(t-2)+\delta(t-4)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$
13. 长为 L 的匀质横梁. 在 $x=1/2L$ 处所受的载荷为 w_0. 横梁左端嵌在支撑物内，右端自由运动. 用拉普拉斯变换从

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=w_0\delta(x-\frac{1}{2}L).$$

中求解弯曲量 $y(x)$，其中 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，$y''(L)=0$，$y'''(L)=0$.

14. 解习题 13 中的微分方程，约束为 $y(0)=0$，$y'(L)=0$，$y(L)=0$，$y'(L)=0$. 在这种情况下，横梁两端都嵌在支撑物里. 请见图 7.47.

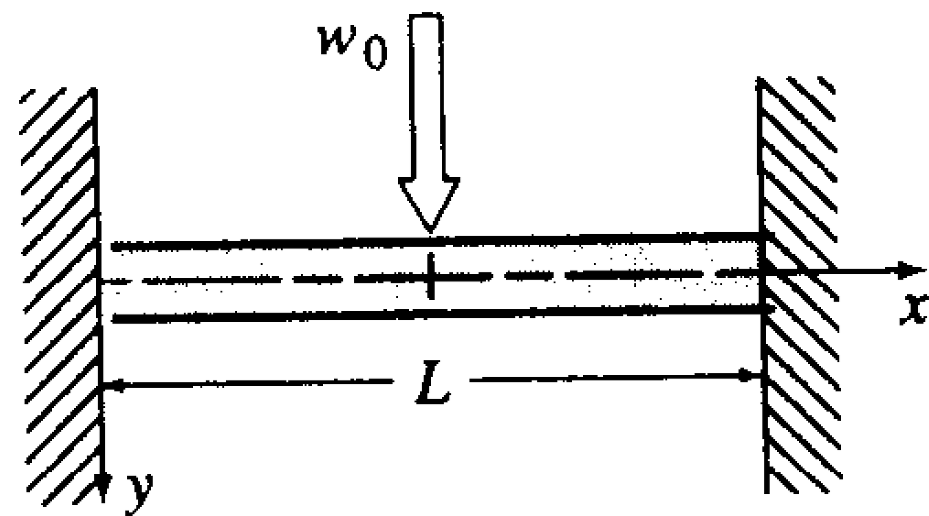


图 7.47

讨论题

15. 用拉普拉斯变换求解初值问题 $y''+\omega^2y=\delta(t)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$. 这个解有什么特点?

7.6 线性方程组

给定初始条件后，常系数线性微分方程组中每个方程的拉普拉斯变换可以把微分方程组化成一组同步方程，这些方程是变换后函数的方程. 我们从这个方程组中解出每个变换后的函数，然后用一般的方法求出其逆变换.

耦合弹簧 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体连接在弹簧 A 和 B 上，忽略弹簧的质量，它们的弹性系数分别为 k_1 和 k_2. 两个弹簧依次连接，如图 7.48 所示. 令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示两个质点距平衡位置的垂直位移. 当系统运动时，弹簧 B 受到拉力和压力的作用；因此，它的净伸长量为 x_2-x_1. 因此，由虎克定律知，弹簧 A 和 B 对 m_1 所施的力分别为 $-k_1x_1$ 和 $k_2(x_2-x_1)$. 若没有外力作用于系统，也没有阻力存在，则作用在 m_1 上的合外力为 $-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)$. 根据牛顿第二定律，有

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1).$$

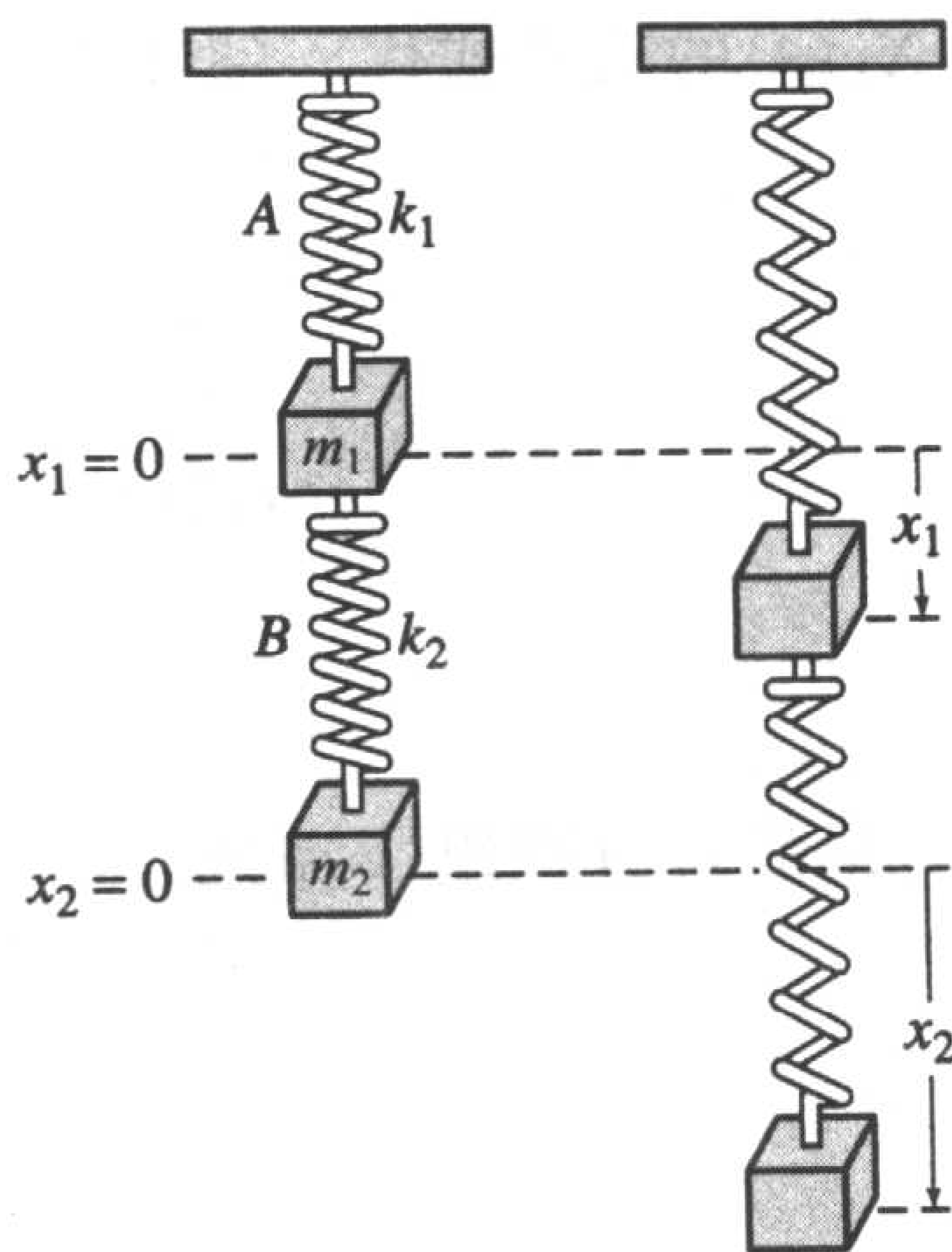


图 7.48

类似地，作用于 m_2 的净外力和 B 的净伸长有关；也就是 $-k_2(x_2-x_1)$. 因此可得

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}=-k_2(x_2-x_1).$$

换句话说，耦合弹簧的运动可以用同步二阶微分方程

$$\begin{aligned}m_1x''_1&=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)\\ m_2x''_2&=-k_2(x_2-x_1)\end{aligned}\tag{1}$$

来描述.

在下一个例子中，我们假设 $k_1=6$，$k_2=4$，$m_1=1$，$m_2=1$，然后解(1)，物体从它们的平衡位置开始运动，并且速度方向相反.

例 1 **耦合弹簧**

解

$$\begin{aligned}x''_1+10x_1-4x_2&=0,\\ -4x_1+x''_2+4x_2&=0,\end{aligned}\tag{2}$$

约束条件为 $x_1(0)=0, x_1'(0)=1, x_2(0)=0, x_2'(0)=-1$.

解 每个方程的拉普拉斯方程为

$$s^2X_1(s)-sx_1(0)-x_1'(0)+10X_1(s)-4X_2(s)=0$$
$$-4X_1(s)+s^2X_2(s)-sx_2(0)-x_2'(0)+4X_2(s)=0,$$

其中 $X_1(s)=\mathscr{L}\{x_1(t)\}$，$X_2(s)=\mathscr{L}\{x_2(t)\}$. 前述方程组等价于

$$\begin{aligned}(s^2+10)X_1(s)-4X_2(s)&=1\\ -4X_1(s)+(s^2+4)X_2(s)&=-1\end{aligned}\tag{3}$$

从(3)中解出 $X_1(s)$，并对其进行部分分式分解，可得

$$X_1(s)=\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}=-\frac{1/5}{s^2+2}+\frac{6/5}{s^2+12},$$

因此有

$$x_1(t)=-\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\}+\frac{6}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{10}\sin\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{3}}{5}\sin 2\sqrt{3}t.$$

把 $X_1(s)$的表达式代入(3)的第一个方程，可得

$$X_2(s)=-\frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)}=-\frac{2/5}{s^2+2}-\frac{3/5}{s^2+12}$$

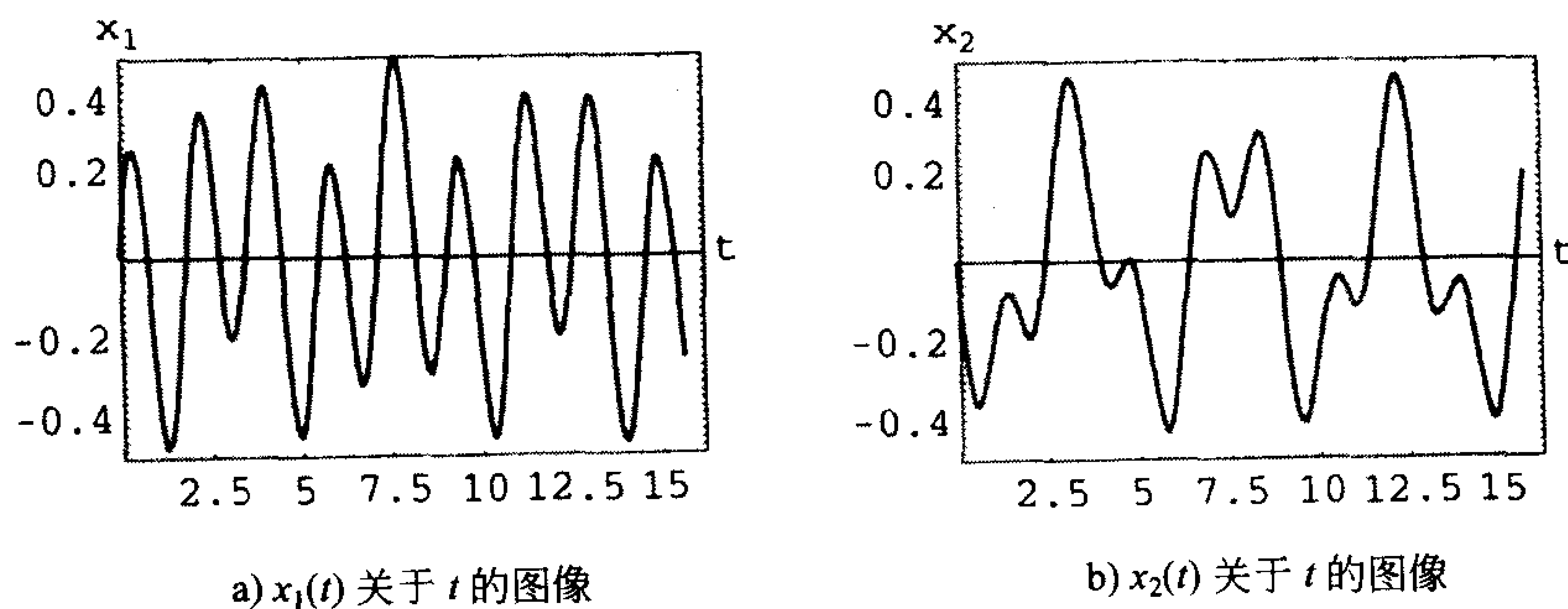
及

$$x_2(t)=-\frac{2}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\}-\frac{3}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{5}\sin\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{3}}{10}\sin 2\sqrt{3}t.$$

最后，方程组(2)的解为

$$\begin{aligned}x_1(t)&=-\frac{\sqrt{2}}{10}\sin\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{3}}{5}\sin 2\sqrt{3}t\\x_2(t)&=-\frac{\sqrt{2}}{5}\sin\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{3}}{10}\sin 2\sqrt{3}t.\end{aligned}\tag{4}$$

在图 7.49 中，x_1和 x_2的图像说明每个物体都在做复杂的振荡运动.



a) $x_1(t)$ 关于 t 的图像　　b) $x_2(t)$ 关于 t 的图像

图 7.49

■

电路网络　在 3.3 节的(18)式中，我们看到如图 7.50 所示的电路，包括一个电感线圈、一个电阻和一个电容，电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$可由一阶微分方程组

$$\begin{aligned}L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+Ri_2&=E(t)\\RC\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+i_2-i_1&=0.\end{aligned}\tag{5}$$

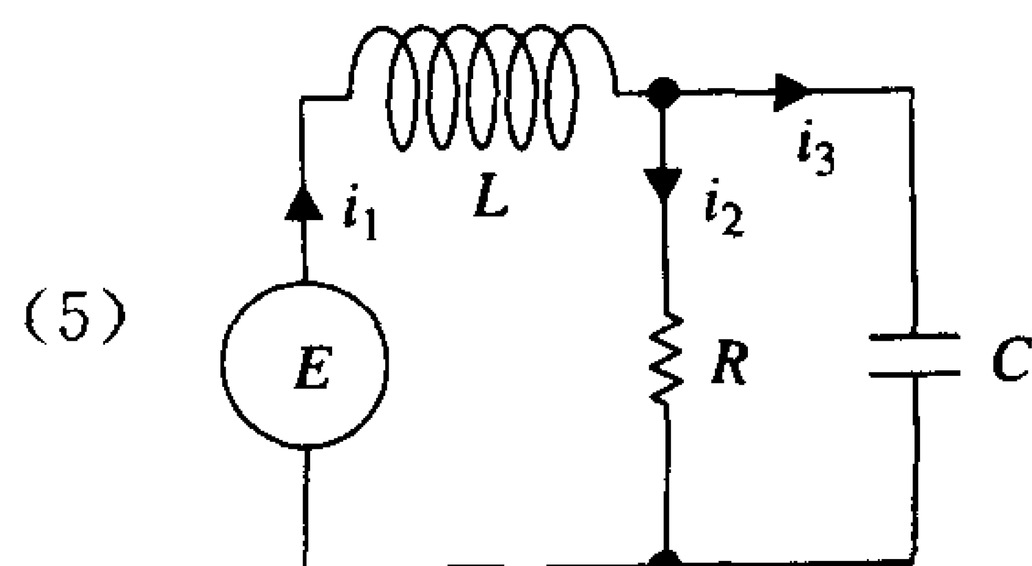


图 7.50

来描述. 在下一个例子中，我们用拉普拉斯变换解这个方程组.

例 2 **电路网络**

解(5)的方程组，条件为 $E(t)=60\text{V}$，$L=1\text{h}$，$R=50\Omega$，$C=10^{-4}\text{f}$，电流 i_1 和 i_2 的初始值为零.

解 我们需要解

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+50i_2=60$$

$$50(10^{-4})\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+i_2-i_1=0,$$

约束条件为 $i_1(0)=0, i_2(0)=0$.

对方程组的每个方程应用拉普拉斯变换，简化后得

$$sI_1(s)+50I_2(s)=\frac{60}{s}$$

$$-200I_1(s)+(s+200)I_2(s)=0,$$

其中 $I_1(s)=\mathscr{L}\{i_1(t)\}$，$I_2(s)=\mathscr{L}\{i_2(t)\}$. 解这个方程组，解出 I_1 和 I_2，把结果分解成部分分式，得

$$I_1(s)=\frac{60s+12\,000}{s(s+100)^2}=\frac{6/5}{s}-\frac{6/5}{s+100}-\frac{60}{(s+100)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{12\,000}{s(s+100)^2}=\frac{6/5}{s}-\frac{6/5}{s+100}-\frac{120}{(s+100)^2}.$$

做逆拉普拉斯变换，可求出电流为

$$i_1(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{e}^{-100t}-60t\mathrm{e}^{-100t}$$

$$i_2(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{e}^{-100t}-120t\mathrm{e}^{-100t}.$$ ■

注意在例 2 中当 $t\to+\infty$ 时 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 趋于 $E/R=6/5$. 进一步，因为通过电容的电流为 $i_3(t)=i_1(t)-i_2(t)=60t\mathrm{e}^{-100t}$，所以当 $t\to+\infty$ 时有 $i_3(t)\to0$.

双摆 如图 7.51 所示，一个双摆受重力作用在垂直平面内做摆动. 对于小位移 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$，可以用描述运动的微分方程组来表示

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)l_1{}^2\theta''_1+m_2l_1l_2\theta''_2+(m_1+m_2)l_1g\theta_1=0\\&m_2l_2{}^2\theta''_2+m_2l_1l_2\theta''_1+m_2l_2g\theta_2=0\end{aligned}\qquad(6)$$

如图 7.51 所示，θ_1(单位为弧度)为整个系统偏离轴线的角度，θ_2 为 m_2 偏离以 m_1 为中心的轴线的角度. 向右为正方向；向左为负方向.

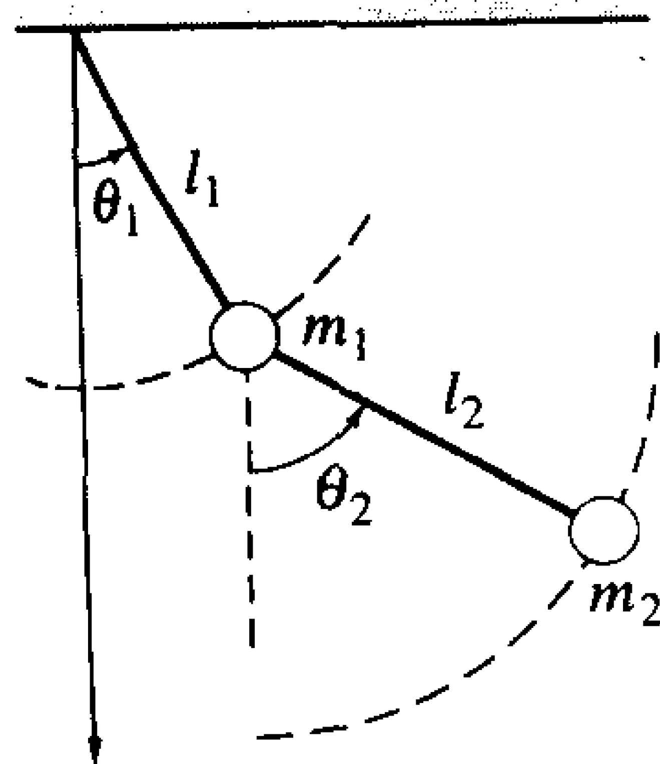


图 7.51

例 3 **双摆**

请读者用拉普拉斯变换解方程组(6)，$m_1=3$，$m_2=1$，$l_1=l_2=16$，$\theta_1(0)=1$，$\theta_2(0)=-1$，$\theta_1'(0)=0$，$\theta_2'(0)=0$. 然后可以求出

$$\theta_1(t)=\frac{1}{4}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{3}{4}\cos2t$$

$$\theta_2(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{3}{2}\cos 2t. \tag{7}$$

两个物体在 $t=0$ 及以后时刻的位置可以用 CAS 软件绘出，如图 7.52 所示. 请参考练习 7.6 的习题 21.

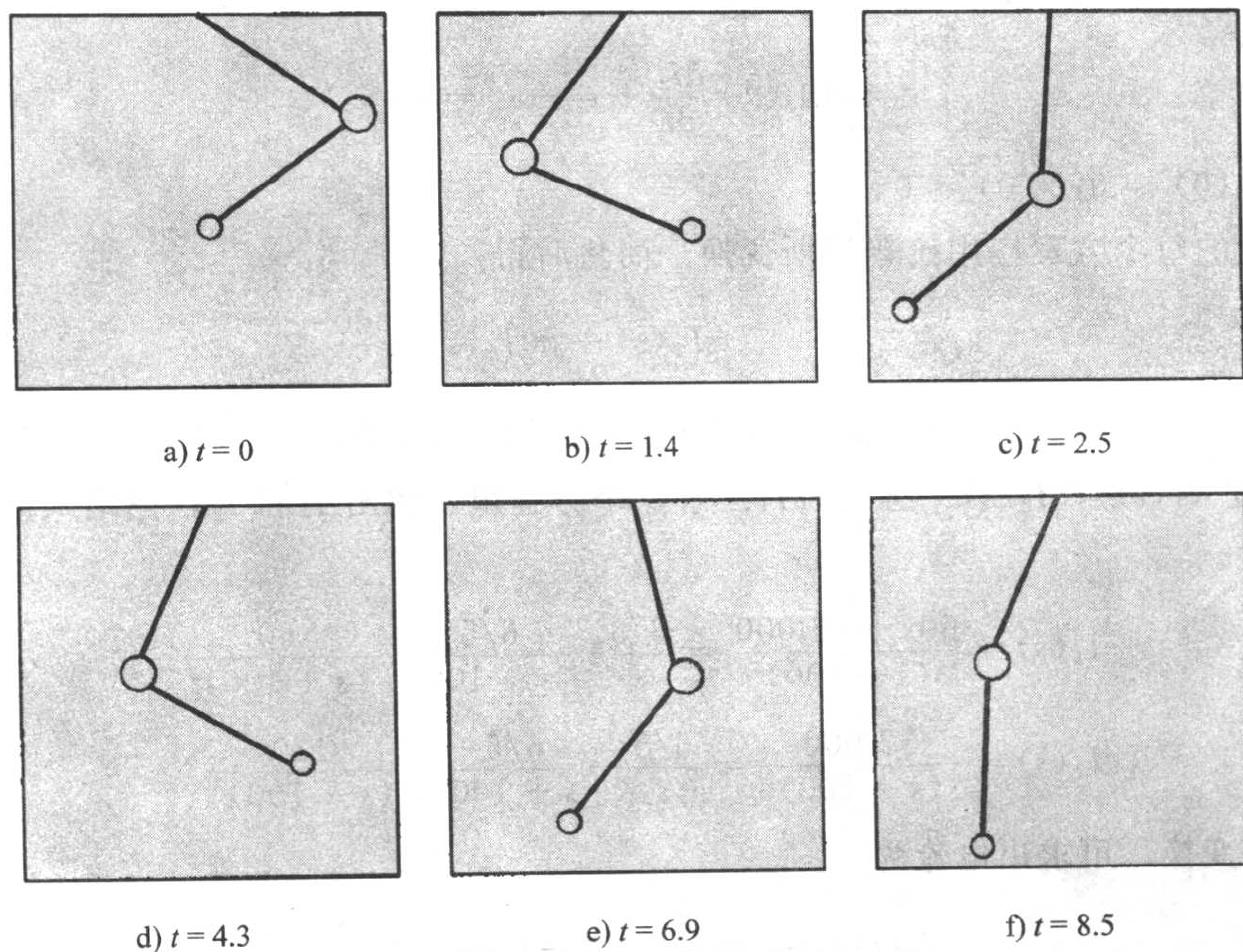


图 7.52

练习 7.6

在习题 1～12 中，用拉普拉斯变换求解所给的微分方程组.

1. $\frac{dx}{dt}=-x+y$

   $\frac{dy}{dt}=2x$

   $x(0)=0$，$y(0)=1$

2. $\frac{dx}{dt}=2y+e^t$

   $\frac{dy}{dt}=8x-t$

   $x(0)=1$，$y(0)=1$

3. $\frac{dx}{dt}=x-2y$

   $\frac{dy}{dt}=5x-y$

   $x(0)=-1$，$y(0)=2$

4. $\frac{dx}{dt}+3x+\frac{dy}{dt}=1$

   $\frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}-y=e^t$

   $x(0)=0$，$y(0)=0$

5. $2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x=1$

   $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-3x-3y=2$

   $x(0)=0$，$y(0)=0$

6. $\frac{dx}{dt}+x-\frac{dy}{dt}+y=0$

   $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2y=0$

   $x(0)=0$，$y(0)=1$

7. $\frac{d^2x}{dt^2}+x-y=0$

$\frac{d^2y}{dt^2}+y-x=0$

$x(0)=0$，$x'(0)=-2$，

$y(0)=0$，$y'(0)=1$

8. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$

$x(0)=1$，$x'(0)=0$，

$y(0)=-1$，$y'(0)=5$

9. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=t^2$

$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}=4t$

$x(0)=8$，$x'(0)=0$，

$y(0)=0$，$y'(0)=0$

10. $\frac{dx}{dt}-4x+\frac{d^3y}{dt^3}=6\sin t$

$\frac{dx}{dt}+2x-2\frac{d^3y}{dt^3}=0$

$x(0)=0$，$y(0)=0$，

$y'(0)=0$，$y''(0)=0$

11. $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+3y=0$

$\frac{d^2x}{dt^2}+3y=te^{-t}$

$x(0)=0$，$x'(0)=2$，$y(0)=0$

12. $\frac{dx}{dt}=4x-2y+2\mathcal{U}(t-1)$

$\frac{dy}{dt}=3x-y+\mathcal{U}(t-1)$

$x(0)=0$，$y(0)=\frac{1}{2}$，

13. 解方程组(1)，其中 $k_1=3$，$k_2=2$，$m_1=1$，$m_2=1$，$x_1(0)=0$，$x_1'(0)=1$，$x_2(0)=1$，$x_2'(0)=0$.

14. 推导一个微分方程，描述如图 7.53 所示的双弹簧垂直振动系统. 用拉普拉斯变换求解这个方程组，$k_1=1$，$k_2=1$，$k_3=1$，$m_1=1$，$m_2=1$，$x_1(0)=0$，$x_1'(0)=-1$，$x_2(0)=0$，$x_2'(0)=1$.

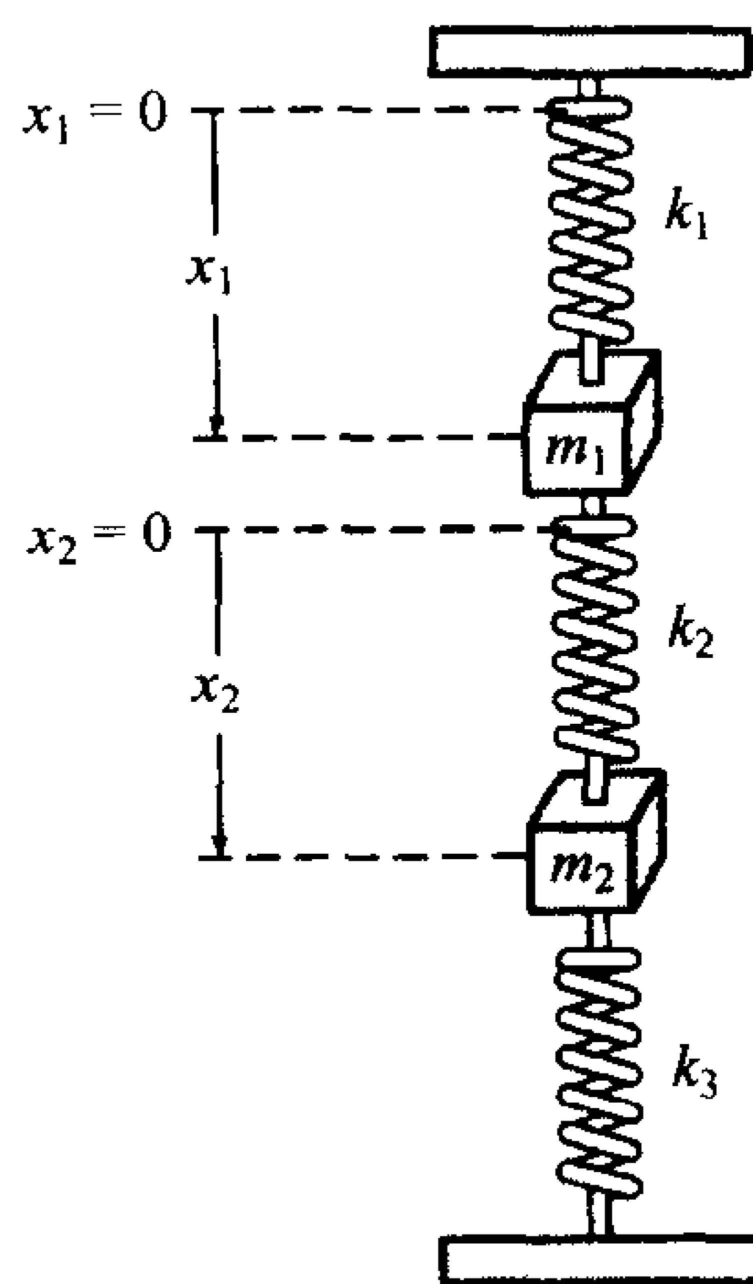


图 7.53

15. (a)证明如图 7.54 所示的电路中描述 $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 的微分方程组为

$$L_1\frac{di_2}{dt}+Ri_2+Ri_3=E(t)$$

$$L_2\frac{di_3}{dt}+Ri_2+Ri_3=E(t)$$

(b)解(a)中的方程组，$R=5\Omega$，$L_1=0.01\text{h}$，$L_2=0.0125\text{h}$，$E=100\text{V}$，$i_2(0)=0$，$i_3(0)=0$.

(c)求电流 $i_1(t)$.

16. (a)在练习 3.3 的习题 12 中，证明如图 7.55 所示的电路中的电流 $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 满足

$$L\frac{di_2}{dt}+L\frac{di_3}{dt}+R_1i_2=E(t)$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt}+R_2\frac{di_3}{dt}+\frac{1}{C}i_3=0$$

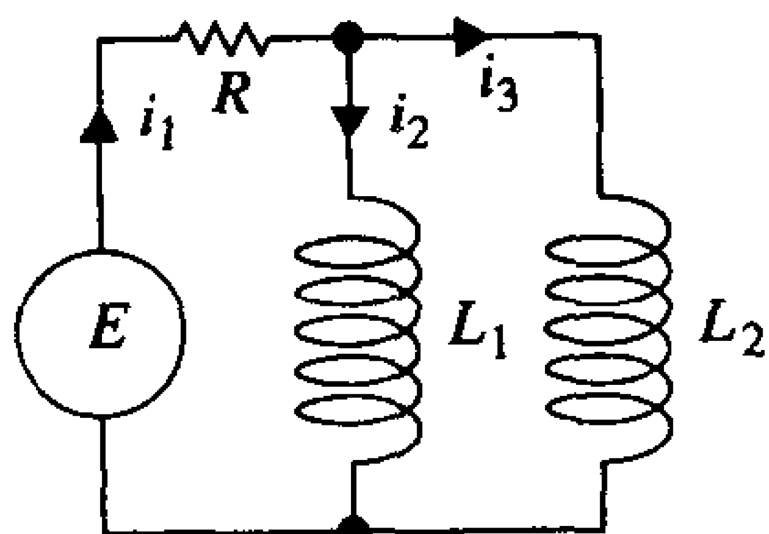


图 7.54

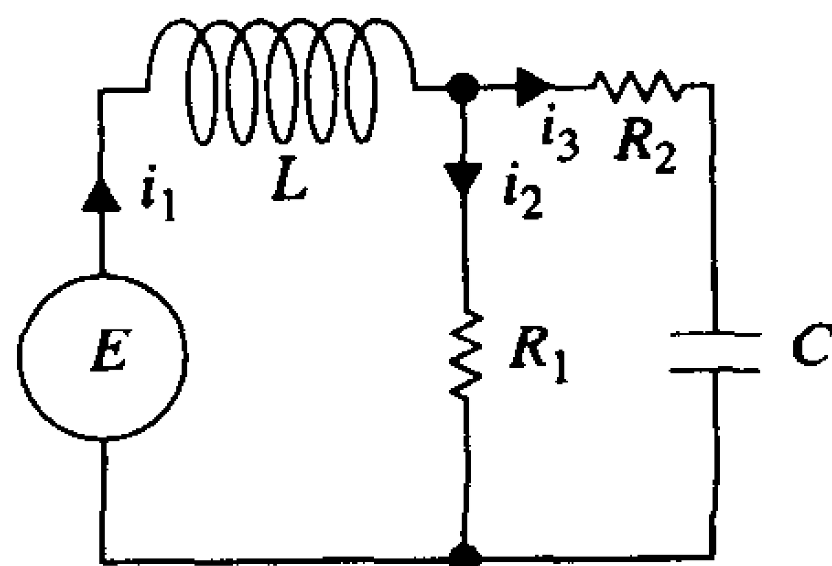


图 7.55

解这个方程组，$R_1=10\Omega$，$R_2=5\Omega$，$L=1\text{h}$，$C=0.2\text{f}$，

$$E(t)=\begin{cases}120, & 0\leqslant t<2\\ 0, & t\geqslant 2\end{cases}$$

$$i_2(0)=0, i_3(0)=0.$$

(b)求电流 $i_1(t)$.

17. 解 3.3 节中(17)的方程组，$R_1=6\Omega$，$R_2=5\Omega$，$L_1=1\text{h}$，$L_2=1\text{h}$，$E(t)=50\sin t\text{V}$，$i_2(0)=0$，$i_3(0)=0$.

18. 解(5)式，$E=60\text{V}$，$L=\frac{1}{2}\text{h}$，$R=50\Omega$，$C=10^{-4}\text{f}$，$i_1(0)=0$，$i_2(0)=0$.

19. 解(5)式，$E=60\text{V}$，$L=2\text{h}$，$R=50\Omega$，$C=10^{-4}\text{f}$，$i_1(0)=0$，$i_2(0)=0$.

20. (a)证明描述如图 7.56 所示的电容上的电荷 $q(t)$ 和电路中的电流 $i_3(t)$ 的微分方程组为

$$R_1\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q+R_1i_3=E(t)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}+R_2i_3-\frac{1}{C}q=0.$$

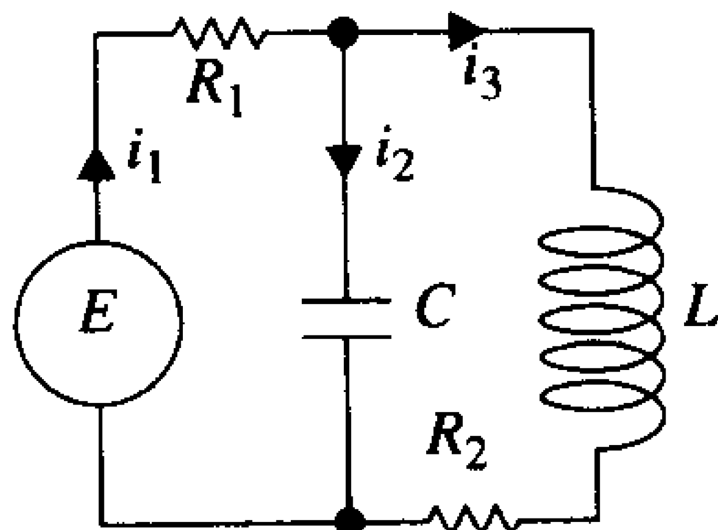


图 7.56

(b)求电容器上的电荷，$L=1\text{h}$，$R_1=1\Omega$，$R_2=1\Omega$，$C=1\text{f}$，

$$E(t)=\begin{cases}0, & 0<t<1\\ 50e^{-t}, & t\geqslant 1\end{cases}$$

$i_3(0)=0$，$q(0)=0$.

计算机实验作业

21. (a)用拉普拉斯变换和例 3 中的信息得到 (6)中方程组的解(7).
   (b)用绘图工具在 $t\theta$ 平面上绘出 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 的图像. 哪一个物体有较大的最大位移量? 通过图像估算出每个物体第一次通过平衡位置的时间. 讨论钟摆的运动是否具有周期性.
   (c)绘出 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 在 $\theta_1\theta_2$ 平面上的参数方程的图像. 参数方程所定义的曲线称为 Lissajous 曲线.
   (d)物体在 $t=0$ 时刻的位置如图 7.52(a)所示. 注意 1 弧度≈57.3°. 用计算器或 CAS 的表格应用程序构造 $t=1, 2, \cdots, 10\text{s}$ 时 θ_1 和 θ_2 的数值表. 然后绘出这两个物体在这些时刻的位置.
   (e)用 CAS 求出第一次 $\theta_1=\theta_2$ 时的时间，并计算相应的角度. 绘出这两个物体在这些时刻的位置.
   (f)用 CAS 绘出近似描绘钟摆的曲线，如图 7.52 所示. 用 CAS 软件模拟双钟摆从 $t=0$ 到 $t=10$ 时刻的运动过程，时间增量为 0.1. [提示：写出物体 m_1 和 m_2 的坐标 $(x_1(t), y_1(t))$，$(x_2(t), y_2(t))$，分别用 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 表示.]

第 7 章复习题

在习题 1 和 2 中，用拉普拉斯变换的定义求 $L\{f(t)\}$.

1. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1\\ 2-t, & t\geqslant 1\end{cases}$

2. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<2\\ 1, & 2\leqslant t<4\\ 0, & t\geqslant 4\end{cases}$

在习题 3～24 中，填空或判断对错.

3. 如果 f 不是$[0, +\infty)$上的分段连续函数，那么 $\mathscr{L}\{f(t)\}$ 不存在.

4. 函数 $f(t)=(e^t)^{10}$ 不是指数阶的.

5. $F(s)=s^2/(s^2+4)$ 不是某个分段连续指数阶函数的拉普拉斯变换.

6. 如果 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$，$\mathscr{L}\{g(t)\}=G(s)$，那么 $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)g(t)$.

7. $\mathscr{L}\{e^{-7t}\}=$________

8. $\mathscr{L}\{te^{-7t}\}=$________

9. $\mathscr{L}\{\sin 2t\}=$________

10. $\mathscr{L}\{e^{-3t}\sin 2t\}=$________

11. $\mathscr{L}\{t\sin 2t\}=$________

12. $\mathscr{L}\{\sin 2t\ \mathscr{U}(t-\pi)\}=$________

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{20}{s^6}\right\}=$________

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3s-1}\right\}=$________

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-5)^3}\right\}=$________

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-5}\right\}=$________

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-10s+29}\right\}=$________

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{s^2}\right\}=$________

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+\pi}{s^2+\pi^2}e^{-s}\right\}=$________

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{L^2s^2+n^2\pi^2}\right\}=$________

21. 当 $s>$________时$\mathscr{L}\{e^{-5t}\}$存在.

22. 如果$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$，那么$\mathscr{L}\{te^{8t}f(t)\}=$________.

23. 如果$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$，$k>0$，那么$\mathscr{L}\{e^{at}f(t-k)\mathscr{U}(t-k)\}=$________.

24. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{a\tau}f(\tau)d\tau\right\}=$________然而 $\mathscr{L}\left\{e^{at}\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=$________.

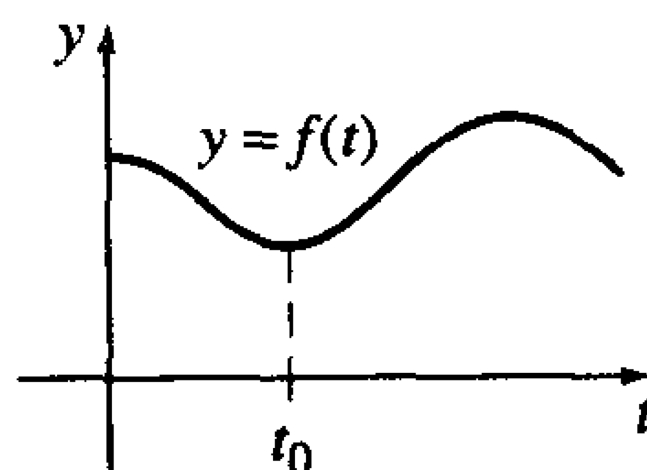


图 7.57

在习题 25～28 中，用单位阶梯函数求出用 $y=f(t)$ 所表示的图像的方程，图像如图 7.57 所示.

25.

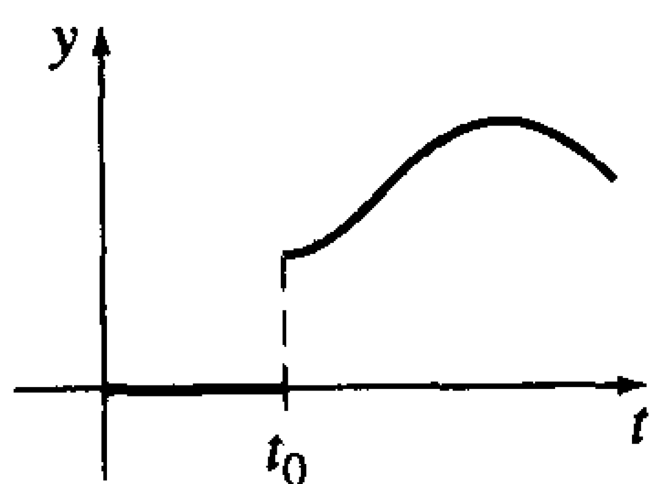


图 7.58

26.

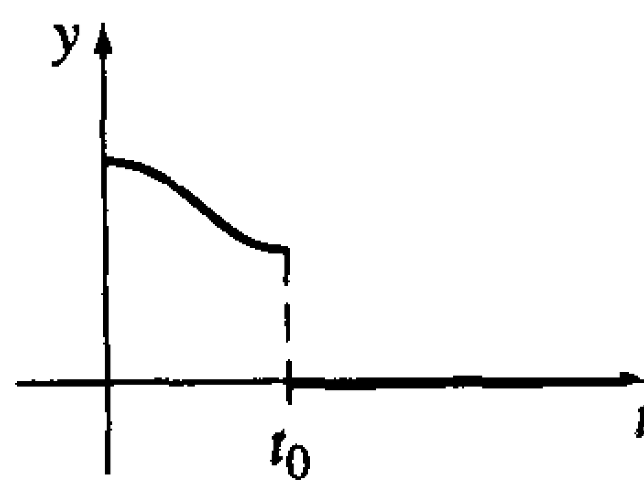


图 7.59

27.

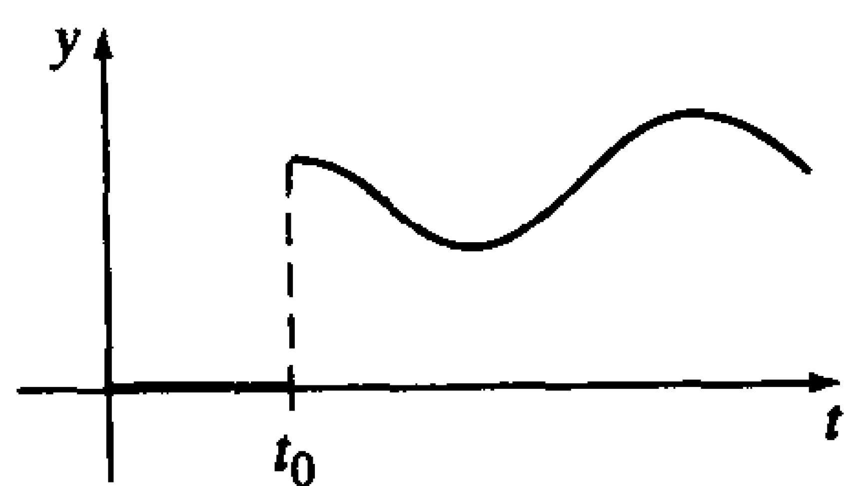


图 7.60

28.

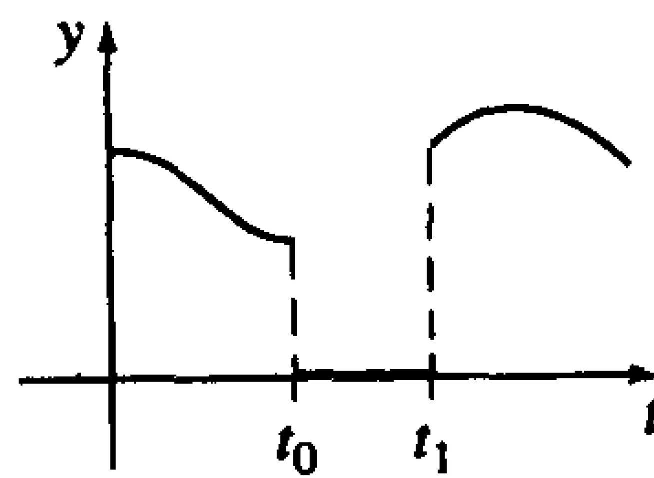


图 7.61

在习题 29～32 中，用单位阶梯函数表示 f. 求$\mathscr{L}\{f(t)\}$和$\mathscr{L}\{e^tf(t)\}$.

29.

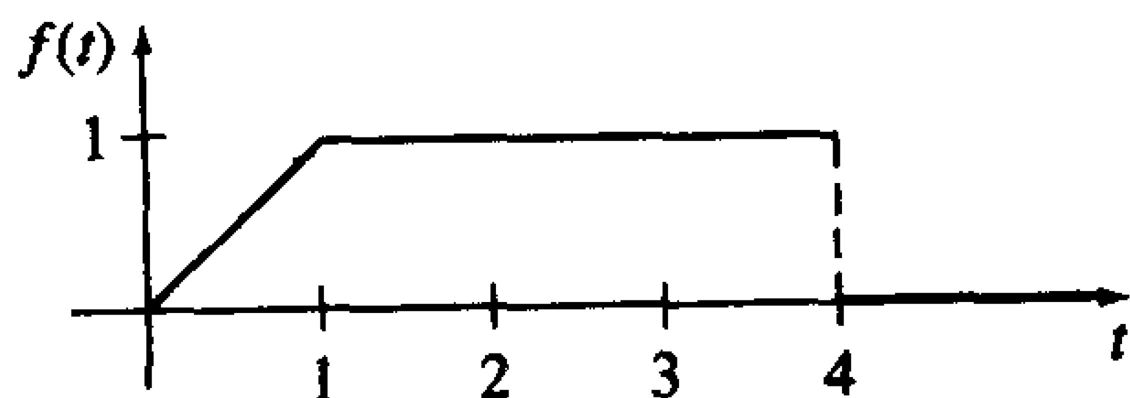


图 7.62

30.

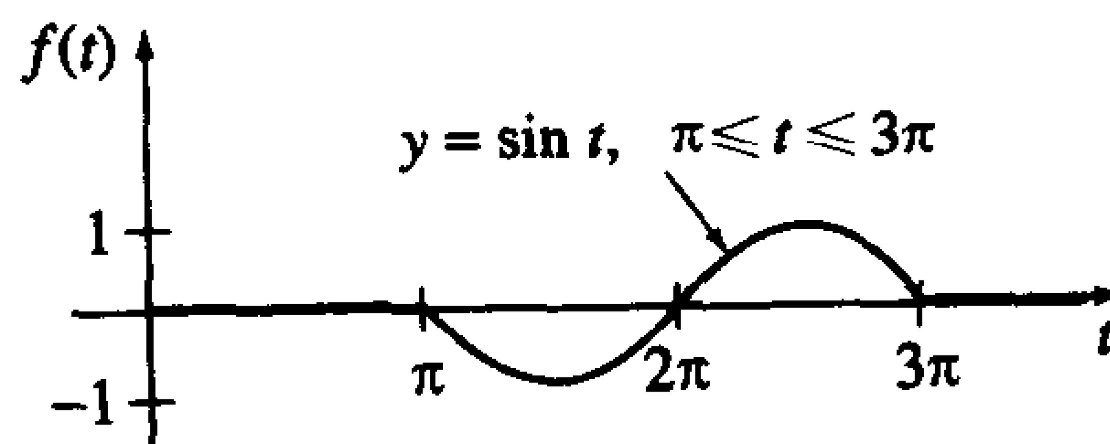


图 7.63

31.

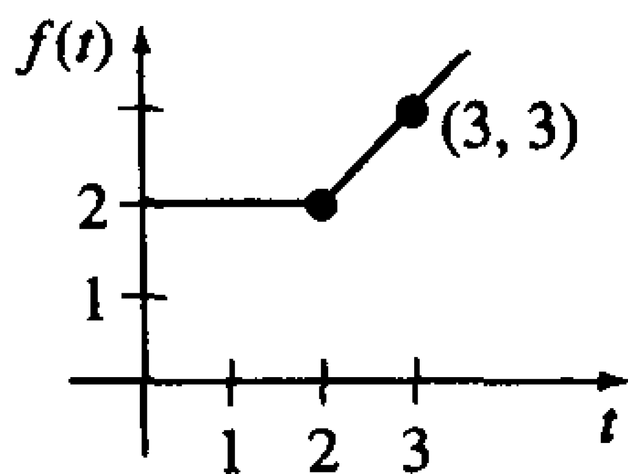


图 7.64

32.

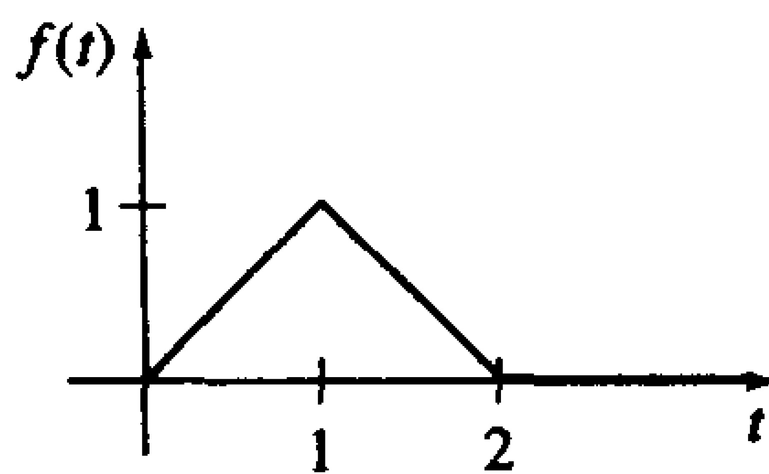


图 7.65

在习题 33～38 中，用拉普拉斯变换解所给的方程.

33. $y''-2y'+y=e^t$，$y(0)=0$，$y'(0)=5$

34. $y''-8y'+20y=te^t$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$

35. $y''+6y'+5y=t-t\,\mathcal{U}(t-2)$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$

36. $y'-5y=f(t)$，其中 $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\leqslant t<1\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$，$y(0)=1$

37. $y'(t)=\cos t+\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau, y(0)=1$

38. $\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=6t^3$

在习题 39 和 40 中，用拉普拉斯变换求解下列方程组.

39. $x'+y=t$

$4x+y'=0$

$x(0)=1$，$y(0)=2$

40. $x''+y''=e^{2t}$

$2x'+y''=-e^{2t}$

$x(0)=0$，$y(0)=0$，

$x'(0)=0$，$y'(0)=0$

41. RC 串联电路中的电流 $i(t)$ 可由下面的积分方程给出

$$Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau=E(t),$$

其中 $E(t)$ 是外加电压. 求 $i(t)$，$R=10\Omega$，$C=0.5\mathrm{f}$，$E(t)=2(t^2+t)$.

42. 一个串联电路包含一个感应器、一个电阻器和一个电容器，$L=\frac{1}{2}\mathrm{h}$，$R=10\Omega$，$C=0.01\mathrm{f}$. 外加电压

$$E(t)=\begin{cases}10, & 0\leqslant t<5\\ 0, & t\geqslant 5\end{cases}$$

施加在电路上. 求 $t>0$ 时电容器上的瞬时电荷 $q(t)$，$q(0)=0$，$q'(0)=0$.

43. 长为 L 的匀质悬臂横梁左端嵌在支撑物内($x=0$)，右端自由运动. 求其弯曲量 $y(x)$，每单位长度的载荷为

$$w(x)=\frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2}-x+\left(x-\frac{L}{2}\right)\mathcal{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right].$$

44. 匀质横梁受弹性座基支撑，其弯曲量 $y(x)$ 的微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+ky=w(x),$$

其中 k 是座基的弹性模量，$-ky$ 是与载荷 $w(x)$ 方向相反的座基回复力. 请参考图 7.66. 为了计算方便，我们把描述这个现象的

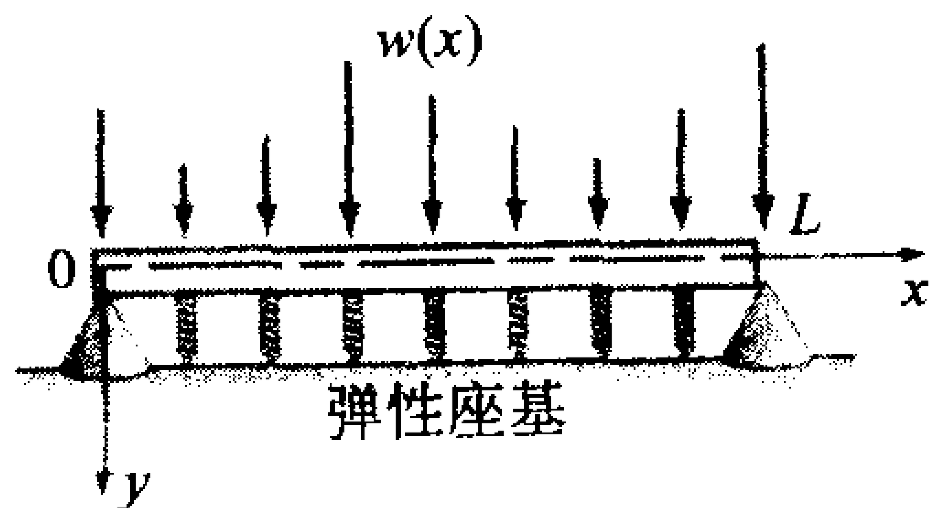


图 7.66

微分方程写为

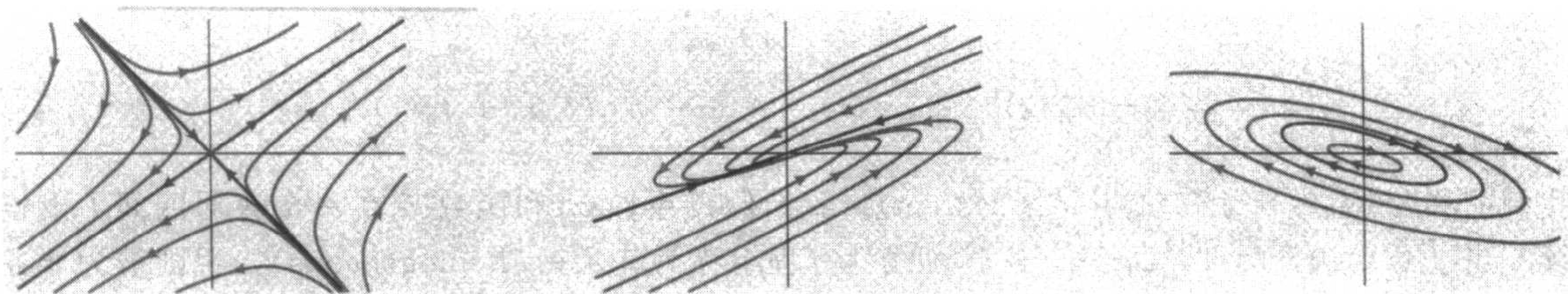
$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4a^4 y = \frac{w(x)}{EI}.$$

其中 $a=\left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4}$. 假设 $L=\pi$，$a=1$. 在下列两种情况下，求横梁的弯曲量 $y(x)$.

(a)横梁两端受简单支撑，常数载荷 w_0 均匀分布在横梁上.

(b)横梁两端嵌在支撑物内，$w(x)$是集中加载在 $x=\pi/2$ 处的载荷.

[提示：在这个习题的两个部分中，用到了附录 C 中拉普拉斯变换表的第 35 和 36 项.]



xy 平面上线性方程组解族的图像被称为相图；如图 8.2 所示

第 8 章 线性一阶微分方程组

我们已经在 3.3、4.8 以及 7.6 节见到过微分方程组，并学习了利用消元法或拉普拉斯变换求解一些方程组. 在本章中我们集中考虑线性一阶方程组. 虽然我们考虑的大多数方程都可以用消元法或拉普拉斯变换求解，但我们将讨论关于这类方程组的一般理论，当方程组的系数为常数时，我们将给出一种基于矩阵基本概念的解法. 我们将看到这种基本理论和求解过程与 4.1、4.3 及 4.6 节中求解线性高阶微分方程类似. 这些都是分析非线性一阶方程组的基础.

8.1 基本理论

在 4.8 节中，我们说明了如何利用消元法求解形如

$$\begin{aligned}P_{11}(D)x_1+P_{12}(D)x_2+\cdots+P_{1n}(D)x_n&=b_1(t)\\P_{21}(D)x_1+P_{22}(D)x_2+\cdots+P_{2n}(D)x_n&=b_2(t)\\&\vdots\\P_{n1}(D)x_1+P_{n2}(D)x_2+\cdots+P_{nn}(D)x_n&=b_n(t)\end{aligned}\tag{1}$$

的含有 n 个未知量并由 n 个线性微分方程构成的方程组，其中 P_{ij} 是微分算子 D 表示的各次多项式. 本章我们的研究仅限于方程组的特殊情况，即具有**正规形式**(Normal form)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=g_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}&=g_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\&\vdots\\\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}&=g_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\end{aligned}\tag{2}$$

的方程组. 由 n 个一阶方程构成的方程组(2)称为**一阶方程组**(first-order system).

线性方程组 当(2)中的每个函数 g_1，g_2，…，g_n关于独立变量 x_1，x_2，…，x_n都是线性的时候，我们可以得到线性一阶方程组的正规形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t)\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t). \tag{3}$$

我们简称(3)为线性方程组(linear system). 我们假设系数 a_{ij} 和函数 f_i 在一个普通区间 I 上连续. 当 $f_i(t)=0$, $i=1, 2, \cdots, n$ 时，线性方程组称为齐次的(homogeneous)，否则被为非齐次的(nonhomogeneous).

线性方程组的矩阵形式 如果 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{A}(t)$ 及 $\boldsymbol{F}(t)$ 分别表示矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)a_{12}(t)\cdots a_{1n}(t)\\a_{21}(t)a_{22}(t)\cdots a_{2n}(t)\\\vdots\\a_{n1}(t)a_{n2}(t)\cdots a_{nn}(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{pmatrix},$$

则线性一阶微分方程(3)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(t)a_{12}(t)\cdots a_{1n}(t)\\a_{21}(t)a_{22}(t)\cdots a_{2n}(t)\\\vdots\\a_{n1}(t)a_{n2}(t)\cdots a_{nn}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{pmatrix},$$

或简写成

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}. \tag{4}$$

若方程组是齐次的，则其矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{5}$$

例 1 用矩阵记号表示方程组

(a)如果 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则齐次方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=3x+4y\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=5x-7y\end{aligned}\quad\text{的矩阵形式为 }\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}3&4\\5&-7\end{pmatrix}\boldsymbol{X}.$$

(b)如果 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则非齐次方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=6x+y+z+t\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=8x+7y-z+10t\\\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=2x+9y-z+6t\end{aligned}\quad\text{的矩阵形式为 }\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}6&1&1\\8&7&-1\\2&9&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}t\\10t\\6t\end{pmatrix}.$$

■

定义 8.1 解向量

区间 I 上的解向量是任意在该区间满足方程组(4)的列矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix},$$

其元素都是可微函数.

当然，(4)的解向量等价于 n 个标量方程 $x_1=\phi_1(t)$，$x_2=\phi_2(t)$，…，$x_n=\phi_n(t)$，它也可以在几何意义上解释为空间曲线的参数方程系. $n=2$ 是比较重要的一种情况，方程 $x_1=\phi_1(t)$，$x_2=\phi_2(t)$ 表示 x_1x_2 平面上的一条曲线. 我们通常称平面上的这条曲线为轨迹(trajectory)，并称 x_1x_2 平面为相平面(phase plane). 我们将在下一节继续讨论这些概念.

例 2　解的检验

证明在区间$(-\infty, +\infty)$上，

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}=\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix}\text{和}\ \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}=\begin{pmatrix}3e^{6t}\\5e^{6t}\end{pmatrix}$$

是

$$\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\tag{6}$$

的解.

解　由 $\boldsymbol{X}'_1=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{pmatrix}$和 $\boldsymbol{X}'_2=\begin{pmatrix}18e^{6t}\\30e^{6t}\end{pmatrix}$，我们可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2t}-3e^{-2t}\\5e^{-2t}-3e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}'_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{6t}\\5e^{6t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^{6t}+15e^{6t}\\15e^{6t}+15e^{6t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18e^{6t}\\30e^{6t}\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}'_2.$$

■

很多关于 n 个线性一阶微分方程组成的方程组的理论与线性 n 阶微分方程都是类似的.

初值问题　设 t_0 为区间 I 上的一点且

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\\\vdots\\x_n(t_0)\end{pmatrix}\text{和}\ \boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix},$$

这里 $\gamma_i(i=1, 2, \cdots, n)$是给定的常数. 于是

$$\begin{aligned}&\text{求解：}\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)\\&\text{约束：}\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0\end{aligned}\tag{7}$$

是该区间上的初值问题(initial-value problem).

定理 8.1　唯一解的存在性

设矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\boldsymbol{F}(t)$中的元素都是在包含 t_0的区间 I 上连续的函数，则该区间上存在初值

问题(7)的唯一解.

齐次方程组 在下面的几个定义和定理中，我们只考虑齐次方程组. 以后我们将不再特别说明，a_{ij} 和 f_i 都是某普通区间 I 上的连续函数.

叠加原理 下面的结论是线性方程组解的叠加原理(superposition principle).

定理 8.2 **叠加原理**

设 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，$\boldsymbol{X}_k$ 是齐次方程组(5)在区间 I 上的一组解向量，则线性组合

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{X}_k,$$

其中 c_i，$i=1,2,\cdots,k$ 为任意常数，也是该区间上的解.

由定理 8.2，线性一阶齐次微分方程组的解乘以一个常数，结果仍是该方程组的解.

例 3 **叠加原理的使用**

首先读者可以证明，两个向量

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix} \text{和} \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^t\\ 0\end{pmatrix}$$

都是方程组

$$\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{X} \tag{8}$$

的解. 再由叠加原理，线性组合

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^t\\ 0\end{pmatrix}$$

也是方程组的一个解. ■

线性相关与线性无关 我们首先考虑齐次方程组(5)的线性无关解.

定义 8.2 **线性相关/无关**

设 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，$\boldsymbol{X}_k$ 是齐次方程组(5)在区间 I 上的一组解向量. 我们称这组解向量在该区间上线性相关(linearly dependent)，如果存在不全为 0 的常数 c_1，c_2，…，c_k，使得

$$c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{0}$$

对区间上的所有 t 都成立. 如果向量组在区间上不是线性相关的，则称为是线性无关的(linearly independent).

$k=2$ 的情况比较简单；两个解向量 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 是线性相关的，如果其中一个是另一个的常数倍，反之也成立. 对于 $k>2$，一组解向量是线性相关的，那么至少有一个解向量可由其他解向量的线性组合来表达.

朗斯基行列式 和前面讨论单个常微分方程理论一样，我们这里引入朗斯基(Wroskian)行列式的概念，它可以用来检验线性无关性. 我们不加证明地给出下面的定理.

定理 8.3 线性无关解的判别

设

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\vdots\\x_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n=\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}$$

是齐次方程组(5)在区间 I 上的 n 个解向量，则这组解向量在 I 上线性无关当且仅当朗斯基行列式

$$W(\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n)=\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ & \vdots & & \\x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{9}$$

对区间上的所有 t 都成立.

可以证明如果 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，$\boldsymbol{X}_n$是(5)的解向量，则对 I 中的每个 t 都有 $W(\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n)\neq 0$ 或 $W(\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n)=0$. 所以如果我们能证明 I 中的一些 t_0满足 $W\neq 0$，则对所有 t 都满足 $W\neq 0$，所以解在区间上线性无关.

注意，与 4.1 节中定义的朗斯基行列式不同，这里(9)中的行列式并没有微分.

例 4 线性无关解

在例 2 中我们看到 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}$ 和 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}$是方程组(6)的解. 显然 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 在区间 $(-\infty,\ +\infty)$上线性无关，因为没有一个向量是另一个向量的常数倍. 此外，我们有

$$W(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)=\begin{vmatrix}e^{-2t} & 3e^{6t}\\-e^{-2t} & 5e^{6t}\end{vmatrix}=8e^{4t}\neq 0$$

对所有的实数 t 都成立. ■

定义 8.3 基本解组

齐次方程组(5)在区间 I 上的任意 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，$\boldsymbol{X}_n$称为该区间上的基本解组(fundamental set of solution).

定理 8.4 基本解组的存在性

齐次方程组(5)在区间 I 上的基本解组是存在的.

接下来的两个关于线性方程组的定理与定理 4.5 和定理 4.6 等价.

定理 8.5 通解——齐次方程组

设 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，$\boldsymbol{X}_n$为齐次方程组(5)在区间 I 上的基本解组，则方程组在该区间上的通解(general solution)为

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{X}_n,$$

这里 $c_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为任意常数.

例 5 方程组(6)的通解

由例 2 我们知道 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}$ 和 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}$ 是(6)在$(-\infty,\ +\infty)$上的线性无关解. 所

以 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 构成了该区间上的一个基本解组，则方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}. \tag{10}$$

■

例 6　方程组(8)的通解

向量

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}\cos t\\-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\\-\cos t-\sin t\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^t,\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}\sin t\\-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\-\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

是例 3 中方程组(8)的解(请参考练习 8.1 中的习题 16). 现有

$$W(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=\begin{vmatrix}\cos t & 0 & \sin t\\-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t & e^t & -\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\-\cos t-\sin t & 0 & -\sin t+\cos t\end{vmatrix}=e^t\neq 0$$

对所有的实数 t 都成立. 我们有结论，$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 和 $\boldsymbol{X}_3$ 构成了$(-\infty,+\infty)$上的一个基本解组. 所以方程组在该区间上的通解为线性组合 $\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+c_3\boldsymbol{X}_3$；即

$$\boldsymbol{X}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\\-\cos t-\sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix}\sin t\\-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\-\sin t+\cos t\end{pmatrix}.$$

■

非齐次方程组　对于非齐次方程组，区间 I 上的特解(particular solution)$\boldsymbol{X}_p$是不含任意参数的向量，其元素是满足方程组(4)的函数.

定理 8.6　通解——非齐次方程组

设 $\boldsymbol{X}_p$是一个给定的非齐次方程组(4)在区间 I 上的解，并设

$$\boldsymbol{X}_c=c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{X}_n$$

表示相应的齐次方程组(5)在相同区间上的通解，则非齐次方程组在该区间上的通解(general solution)为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_c+\boldsymbol{X}_p.$$

齐次方程组(5)的通解 $\boldsymbol{X}_c$称为非齐次方程组(4)的余函数(complementary function).

例 7　通解——非齐次方程组

向量 $\boldsymbol{X}_p=\begin{pmatrix}3t-4\\-5t+6\end{pmatrix}$是非齐次方程组

$$\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}12t-11\\-3\end{pmatrix} \tag{11}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上的特解(证明之). (11)在相同区间上的余函数，或称 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$ 的通解在例 5 的(10)中给出，为 $\boldsymbol{X}_c=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}$. 所以由定理 8.6

$$X = X_c + X_p = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t} + \begin{pmatrix}3t-4\\-5t+6\end{pmatrix}$$

可知它是(11)在$(-\infty, +\infty)$上的通解. ■

练习 8.1

在习题 1～6 中将线性方程组改写成矩阵形式.

1. $\dfrac{dx}{dt}=3x-5y$

   $\dfrac{dy}{dt}=4x+8y$

2. $\dfrac{dx}{dt}=4x-7y$

   $\dfrac{dy}{dt}=5x$

3. $\dfrac{dx}{dt}=-3x+4y-9z$

   $\dfrac{dy}{dt}=6x-y$

   $\dfrac{dz}{dt}=10x+4y+3z$

4. $\dfrac{dx}{dt}=x-y$

   $\dfrac{dy}{dt}=x+2z$

   $\dfrac{dz}{dt}=-x+z$

5. $\dfrac{dx}{dt}=x-y+z+t-1$

   $\dfrac{dy}{dt}=2x+y-z-3t^2$

   $\dfrac{dz}{dt}=x+y+z+t^2-t+2$

6. $\dfrac{dx}{dt}=-3x+4y+e^{-t}\sin 2t$

   $\dfrac{dy}{dt}=5x+9z+4e^{-t}\cos 2t$

   $\dfrac{dz}{dt}=y+6z-e^{-t}$

在习题 7～10 中将给定的方程组改写成不用矩阵表达的形式.

7. $X'=\begin{pmatrix}4 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}$

8. $X'=\begin{pmatrix}7 & 5 & -9\\4 & 1 & 1\\0 & -2 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^{5t}-\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}e^{-2t}$

9. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\3 & -4 & 1\\-2 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}e^{-t}-\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}t$

10. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -7\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}\sin t+\begin{pmatrix}t-4\\2t+1\end{pmatrix}e^{4t}$

在习题 11～16 中证明向量 X 是给定方程组的解.

11. $\dfrac{dx}{dt}=3x-4y$

    $\dfrac{dy}{dt}=4x-7y$; $X=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-5t}$

12. $\dfrac{dx}{dt}=-2x+5y$

    $\dfrac{dy}{dt}=-2x+4y$; $X=\begin{pmatrix}5\cos t\\3\cos t-\sin t\end{pmatrix}e^{t}$

13. $X'=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}X$; $X=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-3t/2}$

14. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}te^{t}$

● 15. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\6\\-13\end{pmatrix}$

16. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\sin t\\ -\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\ -\sin t+\cos t\end{pmatrix}$

在习题17～20中给定向量是方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 的解．判别这些向量是否构成$(-\infty,+\infty)$上的基本解组．

17. $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-6t}$

18. $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}te^{t}$

19. $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}3\\-6\\12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$

20. $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\6\\-13\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}e^{-4t}$，$\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}e^{3t}$

在习题21～24中证明向量 $\boldsymbol{X}_p$ 是给定方程组的特解．

21. $\frac{dx}{dt}=x+4y+2t-7$

$\frac{dy}{dt}=3x+2y-4t-18$；$\boldsymbol{X}_p=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

22. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{X}_p=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

23. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}-\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}e^{t}$；$\boldsymbol{X}_p=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{t}$

24. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 2 & 0\\ -6 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}\sin 3t$；$\boldsymbol{X}_p=\begin{pmatrix}\sin 3t\\0\\\cos 3t\end{pmatrix}$

25. 证明方程组

$$\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}0 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上的通解是

$$\boldsymbol{X}=c_1\begin{pmatrix}6\\-1\\-5\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+c_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}.$$

26. 证明方程组

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

在区间$(-\infty, +\infty)$上的通解是

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.2 常系数齐次线性方程组

在 8.1 节的例 5 中看到，齐次方程组 $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ 的通解是 $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$. 因为两个解向量都有 $X_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}$ 的形式，$i=1$，2，其中 k_1 和 k_2 为常数，我们会问是否总能找到形如

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = K e^{\lambda t} \tag{1}$$

的解，使它满足一般的齐次线性一阶方程组

$$X' = AX, \tag{2}$$

这里 A 是一个 $n \times n$ 的常数矩阵.

特征值与特征向量 如果(1)是线性方程组的解向量，则 $X' = K\lambda e^{\lambda t}$，使得(2)变为 $K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t}$. 在两边除以 $e^{\lambda t}$ 并整理后得 $AK = \lambda K$ 或 $AK - \lambda K = 0$. 因为 $K = IK$，所以最后一个方程等价于

$$(A - \lambda I)K = 0 \tag{3}$$

矩阵方程(3)等价于联立代数方程

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)k_1 + \quad a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-\lambda)k_2 + \cdots + \quad a_{2n}k_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}k_1 + \quad a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)k_n &= 0. \end{aligned}$$

所以为求(2)的非平凡解 X，我们必须求出以上方程组的非平凡解；也就是说，我们必须求出满足(3)的非平凡向量 K. 但为使(3)有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 以外的解，我们必须有

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

这个关于 λ 的多项式方程称为矩阵 A 的特征方程(characteristic equation)，它的解为 A 的特征值(eigenvalue). (3)相应于某个特征值 λ 的解 $K \neq 0$ 称为 A 的特征向量(eigenvector). 齐次方程组(2)的解为 $X = Ke^{\lambda t}$.

在下面的讨论中，我们考虑三种情况：不同的实特征值(即没有相同的特征值)，重复的特征值，复特征值.

8.2.1 不同的实特征值

当 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的实特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 时，我们总可以求出 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$，…，$\boldsymbol{K}_n$，且

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{K}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{K}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{K}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}$$

是(2)式在 $(-\infty,+\infty)$ 上的基本解组.

定理 8.7 通解——齐次方程组

设 λ_1，λ_2，…，λ_n 为齐次方程组(2)的系数方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个不同的实特征值，且设 $\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$，…，$\boldsymbol{K}_n$ 为相应的特征向量，那么(2)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的通解可表述为

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{K}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{K}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\boldsymbol{K}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}.$$

例 1 不同的特征值

求解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=2x+3y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=2x+y.\end{aligned}\tag{4}$$

解 首先求系数矩阵的特征值和特征向量.

由特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)=0$$

可求得特征值为 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=4$.

对于 $\lambda_1=-1$，(3)等价于

$$\begin{aligned}3k_1+3k_2&=0\\ 2k_1+2k_2&=0\end{aligned}$$

因此 $k_1=-k_2$. 当 $k_2=-1$ 时，对应的特征向量为

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=4$，我们有

$$\begin{aligned}-2k_1+3k_2&=0\\ 2k_1-3k_2&=0.\end{aligned}$$

所以 $k_1=3k_2/2$，且对于 $k_2=2$，对应的特征向量为

$$\boldsymbol{K}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

因为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵且我们已经求出了(4)的两个线性无关解

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}\text{ 和 }\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t},$$

所以可以得出方程组的解为

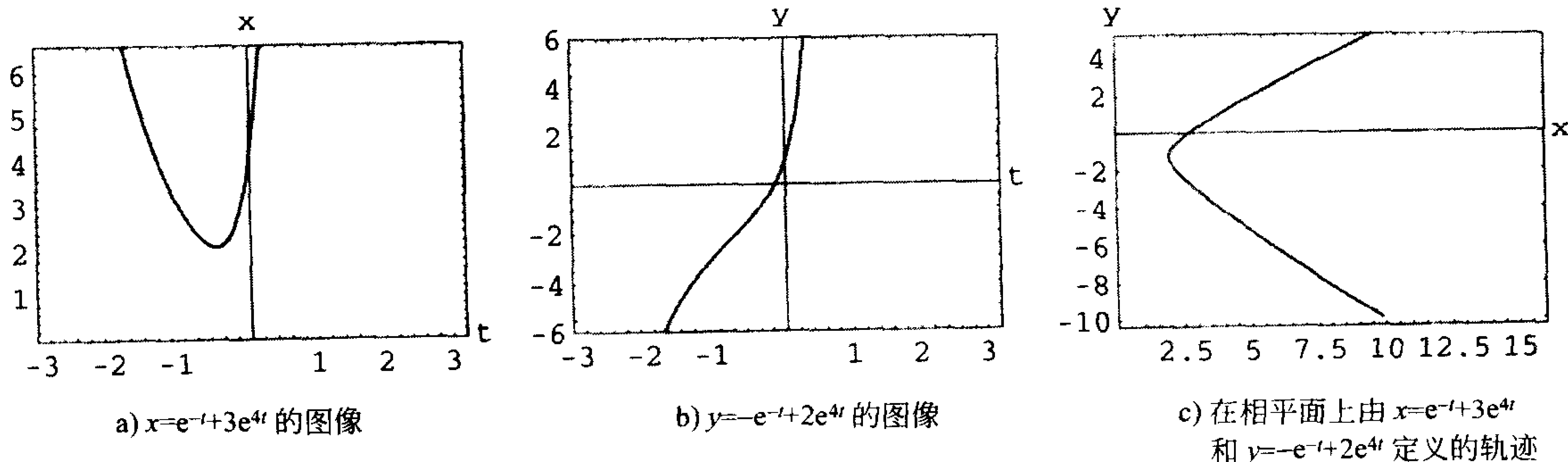
$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{4t}. \tag{5}$$

■

回顾前面的内容，读者应该清楚用矩阵形式表示的线性一阶微分方程组的解是我们在4.8节中所使用方法的简化，即列出了单个函数以及常数之间的关系. 如果我们把(5)右边的向量加起来并与左边对应的元素用等号连接，则我们得到与前面更相似的形式

$$x = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}, y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}.$$

如在8.1节中所指出的，我们可以把这些方程解释为 xy 平面或*相平面*(phase plane)上的曲线的参数方程. 这条曲线称为*轨迹*(trajectory). 图8.1所示的3个图像是解中常数 $c_1=c_2=1$ 时，$x(t)$在 tx 平面，$y(t)$在 ty 平面，以及相平面上的轨迹图像. 如图8.2所示，相平面上一组具有代表性的轨迹称为给定线性方程组的*相图*(phase portrait). 图中的两条黑色直线实际上是分别由 $\mathbf{X}_2$、$-\mathbf{X}_1$、$-\mathbf{X}_2$及 $\mathbf{X}_1$ 在第一、二、三和四象限里定义的四条半直线. 例如，第一和第四象限内的半直线笛卡儿方程 $y=\frac{2}{3}x$，$x>0$ 和 $y=-x$，$x>0$ 可分别通过消去解$x=3e^{4t}$，$y=2e^{4t}$和 $x=e^{-t}$，$y=-e^{-t}$中的参数 t 获得. 进一步，每个特征向量都可被视为落在其中一条半直线上的二维向量. 特征向量 $\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ 落在第一象限的 $y=\frac{2}{3}x$ 上，而 $\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 落在第四象限的 $y=-x$ 上. 每个向量都始于原点；$\mathbf{K}_2$的终点为(2，3)，而 $\mathbf{K}_1$的终点为(1，-1).



a) $x=e^{-t}+3e^{4t}$ 的图像

b) $y=-e^{-t}+2e^{4t}$ 的图像

c) 在相平面上由 $x=e^{-t}+3e^{4t}$ 和 $y=-e^{-t}+2e^{4t}$ 定义的轨迹

图 8.1

原点 $x=0$，$y=0$ 不仅是所有 2×2 齐次线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 的常数解，而且也是对该类方程组进行定性分析时一个很重要的点. 若我们使用物理术语来描述，则图8.2中每个轨迹上的箭头指出了 t 时刻轨迹上坐标为$(x(t), y(t))$的质点随时间的增加将要运动的方向. 观察这些箭头，除第二和四象限内的两条半直线外，其他质点都随着时间 t 的增加而远离原点. 如果我们想象时间范围是从$-\infty$到$+\infty$，则解 $x=c_1e^{-t}+3c_2e^{4t}$，$y=-c_1e^{-t}+2c_2e^{4t}$，$c_1\neq0$，$c_2\neq0$ 表示的轨迹或运

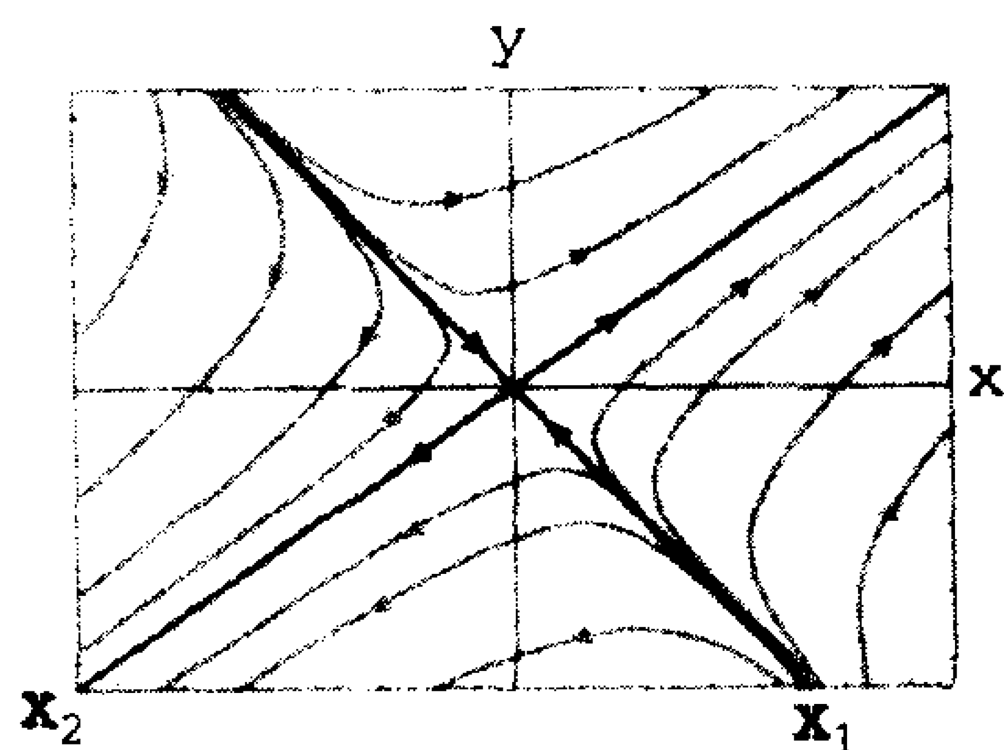


图8.2　方程组(4)的相图

动的质点，渐近地"开始"于由 $\boldsymbol{X}_1$ 或 $-\boldsymbol{X}_1$ 定义的半直线(因为当 $t\to-\infty$ 时 e^{4t} 可以忽略)而渐近地"结束"于由 $\boldsymbol{X}_2$ 或 $-\boldsymbol{X}_2$ 定义的半直线(因为当 $t\to+\infty$ 时 e^{-t} 可以忽略).

我们注意到，图 8.2 是此类 2×2 齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 相图的典型代表，该类方程组具有异号的实特征值. 请参考练习 8.2 中的习题 17. 此外，对于所有具有同号但不等的实特征值的 2×2 线性方程组来说，其相图的典型代表分为两种情况. 当 λ_1 和 λ_2 都为正时，所有轨迹上的质点随 $t\to+\infty$ 而远离原点，而当 λ_1 和 λ_2 都为负时，所有轨迹上的质点随 $t\to+\infty$ 而靠近原点. 所以当 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$ 时，我们称原点为排斥子(repeller)，当 $\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$ 时，称原点为吸引子(attractor). 请参考练习 8.2 中的习题 18. 在图 8.2 中原点既非排斥子又非吸引子. 分析一个 2×2 齐次线性方程组的特征值 $\lambda=0$ 的情况，这个留给读者作为练习. 请参考练习 8.2 中的习题 49.

例 2 不同的特征值

求解

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-4x+y+z\\ \frac{dy}{dt}&=x+5y-z\\ \frac{dz}{dt}&=y-3z.\end{aligned}\tag{6}$$

解 利用第三行的余子式，我们得

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 5-\lambda & -1\\ 0 & 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5)=0.$$

所以特征值为 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=-4$，$\lambda_3=5$.

对于 $\lambda_1=-3$，由高斯-若尔当消元法得

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

所以 $k_1=k_3$ 且 $k_2=0$. 令 $k_3=1$，得到一个特征向量和相应的解向量

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-3t}.\tag{7}$$

类似地，对于 $\lambda_2=-4$，有

$$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 9 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -10 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

这意味着 $k_1=10k_3$ 且 $k_2=-k_3$. 令 $k_3=1$，得到第三个特征向量和解向量

$$\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-4t}. \tag{8}$$

最后，当 $\lambda_3=5$ 时，由增广矩阵

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I}\mid\mathbf{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}-9&1&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&-8&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-8&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

得

$$\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix},\mathbf{X}_3=\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}e^{5t}. \tag{9}$$

(6)的通解为(7)、(8)和(9)中的解向量的线性组合：

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+c_2\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-4t}+c_3\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}e^{5t}.$$

■

计算机应用 利用 MATLAB、Mathematica、Maple 及 DERIVE 等软件包可以很快求出矩阵的特征值和特征向量. 例如，如果想利用 Mathematica 求(6)中的系数矩阵的特征值和特征向量，则首先输入以行定义的矩阵：

m={{−4, 1, 1}, {1, 5, −1}, {0, 1, −3}}.

通过命令

Eigenvalues[m]和 **Eigenvectors[m]**

可分别得

{−4, −3, 5}和**{{10, −1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 8, 1}}.**

在 Mathematica 中，也可以利用 **Eigensystem[m]**同时求得特征值和特征向量.

8.2.2 重复的特征值

当然并不是 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有 n 个特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 都要互异，即有些特征值可能会重复. 例如，方程组

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}3&-18\\2&-9\end{pmatrix}\mathbf{X} \tag{10}$$

的系数矩阵的特征方程为 $(\lambda+3)^2=0$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=-3$ 是一个二重根. 根据这个值我们得到单独的特征向量

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\text{所以有 }\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t} \tag{11}$$

是(10)的解. 但我们感兴趣的显然是如何构造方程组的通解，所以我们需要设法求出第二个解.

一般地，如果 m 是正整数，$(\lambda-\lambda_1)^m$ 是特征方程的因子而 $(\lambda-\lambda_1)^{m+1}$ 不是，则 λ_1 称为 m 重特征值(eigenvalue of multiplicity m)．下面的三个例子考虑了以下几种情况：

(ⅰ)对于一些 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，可能会找到对应于 $m(m\leqslant n)$ 重特征值 λ_1 的 m 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$，…，$\boldsymbol{K}_m$．在这种情况下，方程组的通解包含线性组合

$$c_1\boldsymbol{K}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{K}_2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+\cdots+c_m\boldsymbol{K}_m\mathrm{e}^{\lambda_1 t}.$$

(ⅱ)若对应于 m 重特征值 λ_1，只有一个特征向量，则总能找到以下形式的 m 个线性无关解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1&=\boldsymbol{K}_{11}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \boldsymbol{X}_2&=\boldsymbol{K}_{21}t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+\boldsymbol{K}_{22}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ &\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_m&=\boldsymbol{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+\boldsymbol{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+\cdots+\boldsymbol{K}_{mm}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}.\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{ij}$ 是列向量．

二重特征值 我们先来考虑二重特征值．在第一个例子的矩阵中我们可以求出相应于一个二重特征值的两个不同的特征向量．

例3 **重复的特征值**

求解 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$.

解 展开特征方程的行列式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&1-\lambda&-2\\2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

得 $-(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$．可以得到 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 及 $\lambda_3=5$．

对于 $\lambda_1=-1$，由高斯-若尔当消元法立即可得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&2&0\\-2&2&-2&0\\2&-2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

最后一个矩阵的第一行意味着 $k_1-k_2+k_3=0$ 或 $k_1=k_2-k_3$．令 $k_2=1$，$k_3=0$ 和 $k_2=1$，$k_3=1$，则有 $k_1=1$ 和 $k_1=0$．所以对应于 $\lambda_1=-1$ 的两个特征向量为

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{K}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因为没有哪个特征向量是另一个向量的常数倍，所以将得到相应于同一特征值的两个线性无关解

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}.$$

最后，对于 $\lambda_3=5$，化简

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I}\mid\mathbf{0})=\begin{pmatrix}-4&-2&2&0\\-2&-4&-2&0\\2&-2&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

蕴涵着 $k_1=k_3$ 和 $k_2=-k_3$. 令 $k_3=1$ 得 $k_1=1$，$k_2=-1$，所以第 3 个特征向量为

$$\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

可以得出结论，方程组的通解为

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{5t}.$$

■

例 3 中的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 属于一类被称为对称矩阵的特殊矩阵. $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 称为对称的(symmetric)，如果它的转置 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$(行列互换)与 $\mathbf{A}$ 相等，即 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$. 可以证明如果方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 中的矩阵 $\mathbf{A}$ 是实对称的，那么我们总可以求出 n 个线性无关特征向量 $\mathbf{K}_1$，$\mathbf{K}_2$，…，$\mathbf{K}_n$，且该方程组的通解由定理 8.7 给出. 如例 3 所示，尽管有时特征值是重复的，但这个结果仍成立.

第二个解 现假设 λ_1 是二重特征值且其只有一个特征向量. 则一定能求出形如

$$\mathbf{X}_2=\mathbf{K}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{P}e^{\lambda_1 t} \tag{12}$$

的第二个解. 其中

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}.$$

为检验这一结果，我们将(12)式代入方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 并化简得：

$$(\mathbf{AK}-\lambda_1\mathbf{K})te^{\lambda_1 t}+(\mathbf{AP}-\lambda_1\mathbf{P}-\mathbf{K})e^{\lambda_1 t}=\mathbf{0}.$$

因为这个方程对所有的 t 值都成立，所以必有

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0} \tag{13}$$

和

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K} \tag{14}$$

方程(13)说明 $\mathbf{K}$ 一定是 $\mathbf{A}$ 属于 λ_1 的特征向量. 通过求解(13)，我们得到一个解 $\mathbf{X}_1=\mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$. 为求第二个解，我们只需求出附加方程组(14)中的向量 $\mathbf{P}$.

例 4 重复的特征值

求出由(10)给定的方程组的通解.

解 由(11)我们知道 $\lambda_1=-3$，且一个解为 $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$. 同时有 $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$，

由(14)可知，必须求解

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K} \quad \text{或} \quad \begin{aligned} 6p_1-18p_2&=3\\ 2p_1-6p_2&=1. \end{aligned}$$

因为这个方程组显然等价于一个方程，所以我们有无数种对于 p_1 和 p_2 的选择. 例如，选择 $p_1=1$，我们得 $p_2=1/6$. 不过为简单起见，我们令 $p_1=1/2$，则 $p_2=0$. 因此 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. 由(12)式可得

$$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^{-3t}.$$

(10)的通解为

$$\boldsymbol{X}=c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+c_2\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^{-3t}\right].$$

■

通过在例 4 的解中选择不同的 c_1 和 c_2 的值，我们可以给出方程组(10)的轨迹. (10)的相图在图 8.3 中给出. 解 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $-\boldsymbol{X}_1$ 分别确定了两条射线 $y=\frac{1}{3}x$，$x>0$ 和 $y=\frac{1}{3}x$，$x<0$，如图中的黑线所示. 因为这个单独的特征值为负，所以在每一条轨迹上随着 $t\to+\infty$ 有 $e^{-3t}\to0$，所以当 $t\to+\infty$ 时我们有 $(x(t),\ y(t))\to(0,\ 0)$. 这就是随着时间的增加所有轨迹上质点的运动方向都朝向原点，使得原点成为一个吸引子的原因. 此外，运动的质点或轨迹 $x=3c_1e^{-3t}+c_2\left(te^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right)$，$y=c_1e^{-3t}+c_2te^{-3t}$，$c_2\neq0$ 在 $t\to+\infty$ 时与其中一条射线在(0, 0)处相切. 反之，若重复的特征值为正，则情况相反，原点变为排斥子. 请参考练习 8.2 中的习题 21. 类似于图 8.2，图 8.3 是具有两个重复负特征值的 2×2 齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 的典型代表. 请参考练习 8.2 中的习题 32.

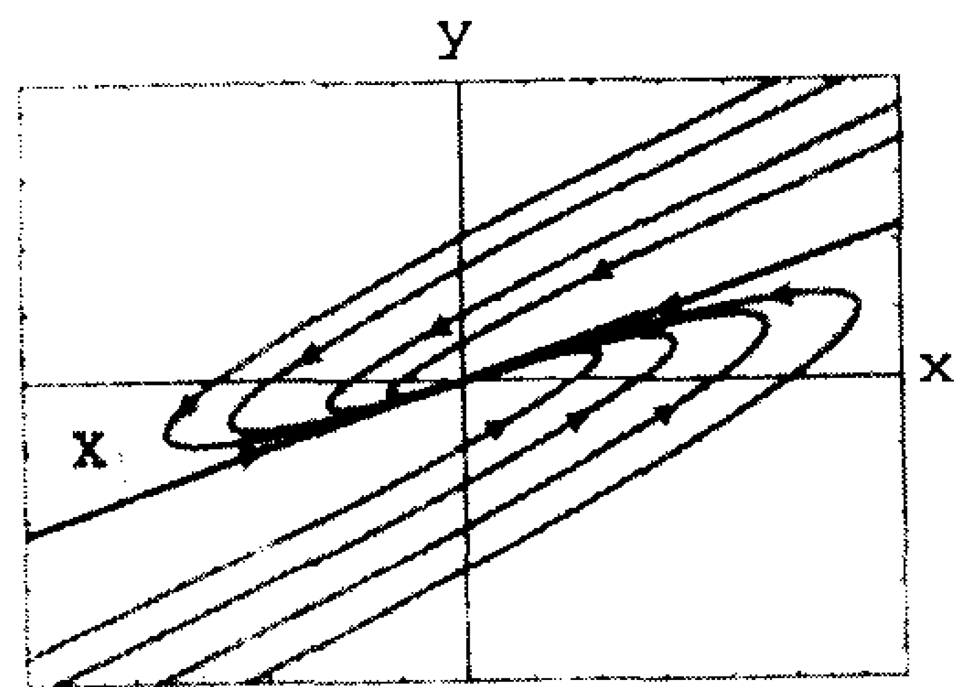


图 8.3 方程组(10)的相图

三重特征值 如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个相应于三重特征值 λ_1 的特征向量，那么我们可以求出形如(12)的第二个解和以下形式的第三个解

$$\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}+\boldsymbol{P}te^{\lambda_1 t}+\boldsymbol{Q}e^{\lambda_1 t}, \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}.$$

将(15)式代入方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$，我们发现向量 $\mathbf{K}$、$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 必须满足

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0} \tag{16}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K} \tag{17}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{Q}=\mathbf{P}. \tag{18}$$

当然，(16)和(17)的解可被用来构造解 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$.

例 5　重复的特征值

求解 $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}\mathbf{X}$.

解　由特征方程 $(\lambda-2)^3=0$ 可知 $\lambda_1=2$ 是三重特征值. 解 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}$，我们得到唯一的特征向量

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

接着解 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K}$ 及 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{Q}=\mathbf{P}$，可得

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{6}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

利用(12)和(15)，我们可得方程组的通解为

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}\right]+c_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{6}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}e^{2t}\right].$$

■

注　当 λ_1 为 m 重特征值时，我们肯定能求出 m 个线性无关的特征向量或相应的少于 m 个的特征向量. 所以本节开始列出的两种情况并不能包括所有有重复特征值的情况. 比如说，一个 5×5 矩阵可能有一个 5 重特征值且有三个相应的线性无关的特征向量. 请参考练习 8.2 中的习题 31 和 50.

8.2.3 复特征值

如果 $\lambda_1=\alpha+\beta i$ 和 $\lambda_2=\alpha-\beta i$ 是系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的复特征值，$\beta>0$，$i^2=-1$，则我们可以肯定其相应的特征向量中有复元素[⊖].

例如，方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=6x-y\\\frac{dy}{dt}&=5x+4y\end{aligned} \tag{19}$$

⊖ 当特征方程为实系数时，复特征值总是以共轭形式成对出现.

的特征方程为

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-10\lambda+29=0.$$

由二次方程的求根公式得 $\lambda_1=5+2\mathrm{i}$，$\lambda_2=5-2\mathrm{i}$.

对于 $\lambda_1=5+2\mathrm{i}$，我们有

$$\begin{aligned}(1-2\mathrm{i})k_1 - \quad\quad k_2 &= 0\\ 5k_1-(1+2\mathrm{i})k_2 &= 0.\end{aligned}$$

因为 $k_2=(1-2\mathrm{i})k_1$[1]，则令 $k_1=1$ 可得以下特征向量和相应的解向量：

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\1-2\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1-2\mathrm{i}\end{pmatrix}e^{(5+2\mathrm{i})t}.$$

同理，对于 $\lambda_2=5-2\mathrm{i}$，我们得

$$\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}1\\1+2\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1+2\mathrm{i}\end{pmatrix}e^{(5-2\mathrm{i})t}.$$

我们可以利用朗斯基行列式证明这些解向量是线性无关的，所以(19)的通解为

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\1-2\mathrm{i}\end{pmatrix}e^{(5+2\mathrm{i})t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1+2\mathrm{i}\end{pmatrix}e^{(5-2\mathrm{i})t}. \tag{20}$$

注意相应于 λ_2 的 $\mathbf{K}_2$ 中的元素是相应于 λ_1 的 $\mathbf{K}_1$ 中的元素的共轭. 而 λ_2 显然是 λ_1 的共轭. 所以我们有 $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ 和 $\mathbf{K}_2=\overline{\mathbf{K}}_1$. 故有下面的一般结论.

定理 8.8 相应于复特征值的解

令 $\mathbf{A}$ 为齐次方程组(2)的实系数矩阵，设 $\mathbf{K}_1$ 是相应于复特征值 $\lambda_1=\alpha+\beta\mathrm{i}$ 的特征向量，α 和 β 为实数，则

$$\mathbf{K}_1e^{\lambda_1t}\ \text{和}\ \overline{\mathbf{K}}_1e^{\bar{\lambda}_1t}$$

是(2)的解.

我们需要并且容易将诸如(20)的解用实函数表示. 为达到这个目的，我们首先利用欧拉公式

$$\begin{aligned}e^{(5+2\mathrm{i})t}&=e^{5t}e^{2t\mathrm{i}}=e^{5t}(\cos2t+\mathrm{i}\sin2t)\\ e^{(5-2\mathrm{i})t}&=e^{5t}e^{-2t\mathrm{i}}=e^{5t}(\cos2t-\mathrm{i}\sin2t).\end{aligned}$$

然后，将其乘以复数，合并同类项，及用 C_1 代替 c_1+c_2，用 C_2 代替 $(c_1-c_2)\mathrm{i}$ 后，得

$$\mathbf{X}=C_1\mathbf{X}_1+C_2\mathbf{X}_2 \tag{21}$$

其中

$$\mathbf{X}_1=\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos2t-\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\sin2t\right]e^{5t}$$

和

$$\mathbf{X}_2=\left[\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\cos2t+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin2t\right]e^{5t}.$$

[1] 注意第 2 个方程等于第 1 个方程乘以(1+2i).

现在我们要重视的一点是(21)中的两个向量 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 是原方程组的线性无关实数解．接着我们忽略 C_1、C_2 与 c_1、c_2 之间的关系，仅认为 C_1 和 C_2 是完全任取的实数．也就是说，线性组合(21)是(19)的另一个通解．

以上过程可以被一般化．设 $\boldsymbol{K}_1$ 为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$(实元素)相应于复特征值 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的特征向量，那么定理 8.8 中的两个解向量可被写为

$$\boldsymbol{K}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \boldsymbol{K}_1 \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t} = \boldsymbol{K}_1 \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t)$$

$$\overline{\boldsymbol{K}}_1 \mathrm{e}^{\bar{\lambda}_1 t} = \overline{\boldsymbol{K}}_1 \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t} = \overline{\boldsymbol{K}}_1 \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t).$$

根据叠加原理，即定理 8.2，以下向量也是方程组的解：

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \overline{\boldsymbol{K}}_1 \mathrm{e}^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1 + \overline{\boldsymbol{K}}_1)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t - \frac{\mathrm{i}}{2}(-\boldsymbol{K}_1 + \overline{\boldsymbol{K}}_1)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}(-\boldsymbol{K}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \overline{\boldsymbol{K}}_1 \mathrm{e}^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{\mathrm{i}}{2}(-\boldsymbol{K}_1 + \overline{\boldsymbol{K}}_1)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1 + \overline{\boldsymbol{K}}_1)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t.$$

对任何复数 $z=a+\mathrm{i}b$，$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=a$ 和 $\frac{\mathrm{i}}{2}(-z+\bar{z})=b$ 都是实数．所以列向量 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1+\overline{\boldsymbol{K}_1})$ 和 $\frac{\mathrm{i}}{2}(-\boldsymbol{K}_1+\overline{\boldsymbol{K}_1})$ 的元素都是实数．通过定义

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1 + \overline{\boldsymbol{K}}_1) \text{ 及 } \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}(-\boldsymbol{K}_1 + \overline{\boldsymbol{K}}_1) \tag{22}$$

我们可得以下定理．

定理 8.9　相应于复特征值的实数解

设 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是(2)中齐次方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复特征值，另设 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 表示(22)中定义的两个列向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1 &= [\boldsymbol{B}_1\cos\beta t - \boldsymbol{B}_2\sin\beta t]\mathrm{e}^{\alpha t}\\ \boldsymbol{X}_2 &= [\boldsymbol{B}_2\cos\beta t + \boldsymbol{B}_1\sin\beta t]\mathrm{e}^{\alpha t}\end{aligned} \tag{23}$$

是(2)式在$(-\infty, +\infty)$上的线性无关解．

(22)中的矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 常被表示成

$$\boldsymbol{B}_1 = \mathrm{Re}(\boldsymbol{K}_1) \text{ 和 } \boldsymbol{B}_2 = \mathrm{Im}(\boldsymbol{K}_1) \tag{24}$$

因为这两个向量分别是特征向量 $\boldsymbol{K}_1$ 的实部和虚部．例如，根据

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\1-2\mathrm{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \mathrm{Re}(\boldsymbol{K}_1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{和 } \boldsymbol{B}_2 = \mathrm{Im}(\boldsymbol{K}_1) = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

可由(23)推得(21)．

例 6　复特征值

求解初值问题

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix}2 & 8\\-1 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}. \tag{25}$$

解 首先我们由

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 8\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4=0$$

得特征值为 $\lambda_1=2\mathrm{i}$ 和 $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=-2\mathrm{i}$. 对于 λ_1，方程组为

$$\begin{aligned}(2-2\mathrm{i})k_1+\qquad\qquad 8k_2&=0\\ -k_1+(-2-2\mathrm{i})k_2&=0\end{aligned},$$

可得 $k_1=-(2+2\mathrm{i})k_2$. 令 $k_2=-1$，我们得

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}2+2\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

现由(24)，我们构造

$$\boldsymbol{B}_1=\mathrm{Re}(\boldsymbol{K}_1)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\text{和 }\boldsymbol{B}_2=\mathrm{Im}(\boldsymbol{K}_1)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha=0$，由(23)得方程组的通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=c_1\left[\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cos2t-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\sin2t\right]+c_2\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cos2t+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\sin2t\right]\\&=c_1\begin{pmatrix}2\cos2t-2\sin2t\\-\cos2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\cos2t+2\sin2t\\-\sin2t\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{26}$$

由方程组的解(26)定义的曲线或轨迹的图像在图 8.4 的相图中给出. 初值条件为 $\boldsymbol{C}(0)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$，或等价地，$x(0)=2$ 且 $y(0)=-1$，我们可得代数方程组 $2c_1+2c_2=2$，$-c_1=-1$，其解为 $c_1=1$，$c_2=0$. 所以初值问题的解为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\cos2t-2\sin2t\\-\cos2t\end{pmatrix}$. 由参数方程 $x=2\cos 2t-2\sin 2t$，$y=-\cos 2t$ 定义的特解的轨迹为图 8.4 中过点(2，−1)的曲线.

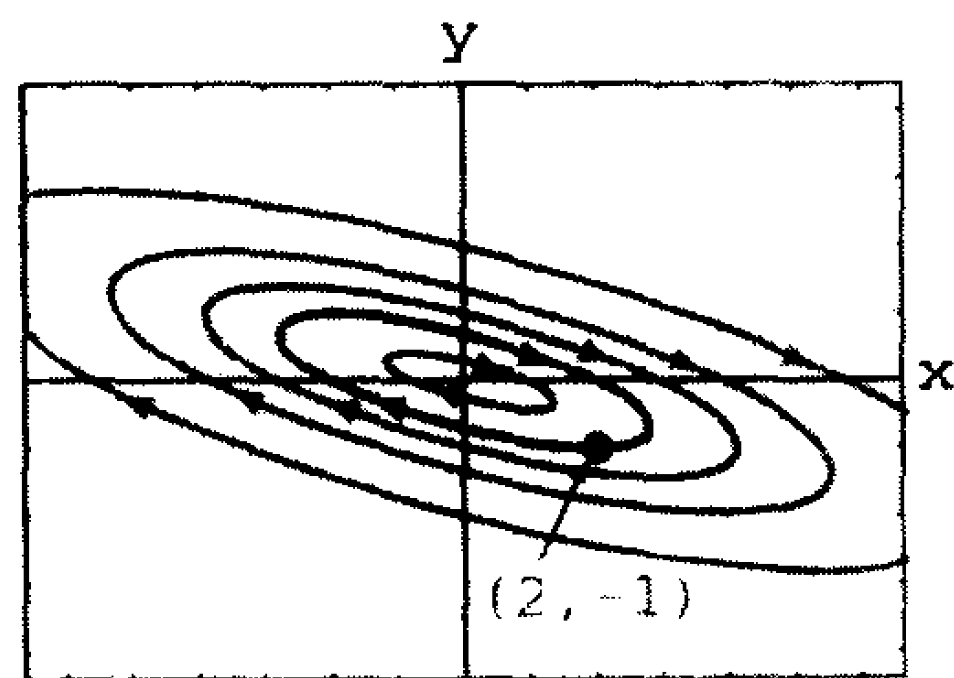


图 8.4 方程组(26)的相图

■

注 本节我们已经专门分析了齐次一阶线性方程组的标准型 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 但动态物理系统的数学模型常常是齐次二阶方程组，其标准型为 $\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 例如，7.6 节中的(1)所描述的双弹簧模型

$$\begin{aligned}m_1x''_1&=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)\\ m_2x''_2&=-k_2(x_2-x_1)\end{aligned}\tag{27}$$

可写为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y},$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-k_1-k_2 & k_2\\ k_2 & -k_2\end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}.$$

因为 $\mathbf{M}$ 是非退化的，我们可通过 $\mathbf{X}''=\mathbf{AX}$ 求解 $\mathbf{X}''$，其中 $\mathbf{A}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. 这样(27)就等价于

$$\mathbf{X}''=\begin{pmatrix}-\frac{k_1}{m_1}-\frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1}\\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2}\end{pmatrix}\mathbf{X}. \tag{28}$$

我们可以利用本节所涉及的两种方法求解这样的方程：

- 第一种，可以通过代换法将原方程组(27)转化为一阶方程组. 如果我们设 $x_1'=x_3$ 且 $x_2'=x_4$，则 $x_3'=x_1''$ 且 $x_4'=x_2''$，那么(27)就等价于一个由四个线性一阶微分方程组成的方程组：

$$\begin{aligned}x_1'&=x_3\\ x_2'&=x_4\\ x_3'&=-\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}\right)x_1+\frac{k_2}{m_1}x_2 \quad 或 \quad \mathbf{X}'=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\frac{k_1}{m_1}-\frac{k_2}{m_1}&\frac{k_2}{m_1}&0&0\\\frac{k_2}{m_2}&-\frac{k_2}{m_2}&0&0\end{pmatrix}\mathbf{X}. \qquad (29)\\ x_4'&=\frac{k_2}{m_2}x_1-\frac{k_2}{m_2}x_2\end{aligned}$$

通过求(29)式的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量，我们看到这个一阶方程组的解完全给出了系统的状态——即物体在 t 时刻相对于均衡点的位置(x_1和 x_2)及物体运动的速度(x_3和 x_4). 请参考练习 8.2 中的习题 48(a).

- 第二种，因为(27)描述的是无阻尼运动，所以可以肯定二阶方程组(28)有实数解且其形式为

$$\mathbf{X}=\mathbf{V}\cos\omega t \text{ 和 } \mathbf{X}=\mathbf{V}\sin\omega t, \tag{30}$$

其中 $\mathbf{V}$ 是常数列矩阵. 将(30)中的任一个函数代入 $\mathbf{X}''=\mathbf{AX}$ 得 $(\mathbf{A}+\omega^2)\mathbf{V}=\mathbf{0}$(证明之). 由本节中(3)的定义可知，$\lambda=-\omega^2$ 代表了一个特征值且 $\mathbf{V}$ 是相应于 $\mathbf{A}$ 的特征向量. 可以证明 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_i=-\omega_i^2$，$i=1$，2 都是负的，所以 $\omega_i=\sqrt{-\lambda_i}$ 为实数且代表了振动频率(请参考第 7.6 节中的(4)). 通过解的叠加得(28)的通解为

$$\begin{aligned}\mathbf{X}&=c_1\mathbf{V}_1\cos\omega_1 t+c_2\mathbf{V}_1\sin\omega_1 t+c_3\mathbf{V}_2\cos\omega_2 t+c_4\mathbf{V}_2\sin\omega_2 t\\&=(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t)\mathbf{V}_1+(c_3\cos\omega_2 t+c_4\sin\omega_2 t)\mathbf{V}_2,\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\mathbf{V}_1$和 $\mathbf{V}_2$分别是 $\mathbf{A}$ 相应于λ_1和λ_2的实特征向量.

推广(31)给出的结果. 如果$-\omega_1^2$，$-\omega_2^2$，…，$-\omega_n^2$分别是 $n\times n$ 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的不同的负特征值，且 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，…，$\mathbf{V}_n$是相应的实特征向量，则齐次二阶方程组 $\mathbf{X}''=\mathbf{AX}$ 有通解

$$X = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos\omega_i t + b_i \sin\omega_i t) V_i, \tag{32}$$

其中 a_i和 b_i代表任意常数. 请参考练习 8.2 中的习题 48(b)和本章末的项目模型.

练习 8.2

8.2.1 不同的实特征值

在习题 1～12 中求出给定方程组的通解.

1. $\frac{dx}{dt}=x+2y$

   $\frac{dy}{dt}=4x+3y$

2. $\frac{dx}{dt}=2x+2y$

   $\frac{dy}{dt}=x+3y$

3. $\frac{dx}{dt}=-4x+2y$

   $\frac{dy}{dt}=-\frac{5}{2}x+2y$

4. $\frac{dx}{dt}=-\frac{5}{2}x+2y$

   $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}x-2y$

5. $X'=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 8 & -12\end{pmatrix}X$

6. $X'=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}X$

7. $\frac{dx}{dt}=x+y-z$

   $\frac{dy}{dt}=2y$

   $\frac{dz}{dt}=y-z$

8. $\frac{dx}{dt}=2x-7y$

   $\frac{dy}{dt}=5x+10y+4z$

   $\frac{dz}{dt}=5y+2z$

9. $X'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}X$

10. $X'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}X$

11. $X'=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}X$

12. $X'=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 4 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}X$

在习题 13 和 14 中求解给定的初值问题.

13. $X'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}X$, $X(0)=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$

14. $X'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}X$, $X(0)=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$

计算机实验作业

在习题 15 和 16 中，用 CAS 或线性代数软件求出给定方程组的通解.

15. $X'=\begin{pmatrix}0.9 & 2.1 & 3.2\\ 0.7 & 6.5 & 4.2\\ 1.1 & 1.7 & 3.4\end{pmatrix}X$

16. $X'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1.8 & 0\\ 0 & 5.1 & 0 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3.1 & 4 & 0\\ -2.8 & 0 & 0 & 1.5 & 1\end{pmatrix}X$

17. (a)利用计算机软件绘出习题 5 中方程组的相图. 如果可能，像图 8.2 那样在相图中标出箭头和四条

射线.

(b)求出(a)中四条射线的笛卡儿方程.

(c)在方程组的相图中绘出特征向量.

18. 求出习题 2 和 4 中方程组的相图. 对每一个方程组，求出所有射线的轨迹并将其在相图中绘出.

8.2.2 重复的特征值

在习题 19～28 中求出给定方程组的通解.

19. $\frac{dx}{dt}=3x-y$

$\frac{dy}{dt}=9x-3y$

20. $\frac{dx}{dt}=-6x+5y$

$\frac{dy}{dt}=-5x+4y$

21. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

22. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}12 & -9\\ 4 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

23. $\frac{dx}{dt}=3x-y-z$

$\frac{dy}{dt}=x+y-z$

$\frac{dz}{dt}=x-y+z$

24. $\frac{dx}{dt}=3x+2y+4z$

$\frac{dy}{dt}=2x+2z$

$\frac{dz}{dt}=4x+2y+3z$

25. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}5 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

26. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

27. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

28. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

在习题 29 和 30 中求解给定的初值问题.

29. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}(0)=\begin{pmatrix}-1\\ 6\end{pmatrix}$

30. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$

31. 证明 5×5 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

有 5 重特征值 λ_1，并有 3 个相应于 λ_1 的线性无关特征向量.

计算机实验作业

32. 求出习题 20 和 21 中方程组的相图. 对每个方程组求出所有射线的轨迹并将其在相图中绘出.

8.2.3 复特征值

在习题 33～44 中求出给定方程组的通解.

33. $\frac{dx}{dt}=6x-y$

34. $\frac{dx}{dt}=x+y$

$\frac{dy}{dt}=5x+2y$

$\frac{dy}{dt}=-2x-y$

35. $\frac{dx}{dt}=5x+y$

$\frac{dy}{dt}=-2x+3y$

36. $\frac{dx}{dt}=4x+5y$

$\frac{dy}{dt}=-2x+6y$

37. $X'=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 5 & -4\end{pmatrix}X$

38. $X'=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 1 & -3\end{pmatrix}X$

39. $\frac{dx}{dt}=z$

$\frac{dy}{dt}=-z$

$\frac{dz}{dt}=y$

40. $\frac{dx}{dt}=2x+y+2z$

$\frac{dy}{dt}=3x+6z$

$\frac{dz}{dt}=-4x-3z$

41. $X'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}X$

42. $X'=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix}X$

43. $X'=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ -5 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}X$

44. $X'=\begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}X$

在习题45和46中求解给定的初值问题.

45. $X'=\begin{pmatrix}1 & -12 & -14\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}X$，$X(0)=\begin{pmatrix}4\\ 6\\ -7\end{pmatrix}$

46. $X'=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}X$，$X(0)=\begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}$

计算机实验作业

47. 求出习题36、37和38中方程组的相图.

48. (a)用注释中列出的第一种方法求解7.6节中的(2)，即用4个线性方程构成的一阶方程组表出(2). 利用CAS或线性代数软件求出4×4矩阵的特征值和特征向量. 然后在得到的通解中应用初值条件求出7.6节中的(4).

(b)用注释中列出的第二种方法求解7.6节中的(2)，即用两个线性方程构成的二阶方程组表出(2). 假设解的形式为 $X=V\sin\omega t$ 和 $X=V\cos\omega t$. 求出2×2矩阵的特征值和特征向量. 与(a)相同，求出7.6节中的(4).

讨论题

49. 求解以下线性方程组：

(a) $X'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X$　　(b) $X'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}X$

求出每个方程组的相图. 在每个相图中，直线 $y=-x$ 的几何意义是什么？

50. 考虑习题31中给出的5×5矩阵. 不利用矩阵方法，求解方程组 $X'=AX$，但用矩阵符号写出通解. 以所求的通解为基础，讨论如何利用本节的矩阵方法求解方程组. 给出求解方法.

51. 例6中所得曲线的笛卡儿方程是由线性方程组解的参数方程定义的，求出笛卡儿方程. 找到在图8.4中定义的过点(2，−1)的曲线. [提示：计算 x^2、y^2 以及 xy.]

52. 考虑在习题47中得到的相图. 在什么情况下，有复特征值的2×2齐次线性方程组的相图由一族封闭

曲线组成？由一族螺旋曲线组成？在什么情况下，原点(0，0)为排斥子？吸引子？

8.3 常数变易法

在 2.3 节和 4.6 节中我们通过常数变易法求出了非齐次线性微分方程的特解，这种方法可以推广到线性微分方程组中．在讨论非齐次线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{F}$ 的矩阵形式的常数变易法之前，我们先来看看相应于齐次方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$ 解向量的一个特殊矩阵.

基本矩阵 如果 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，…，$\mathbf{X}_n$是齐次线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$ 在区间 I 上的基本解组，那么它在该区间上的通解为 $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+\cdots+c_n\mathbf{X}_n$或

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\vdots\\x_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1x_{11}+c_2x_{12}+\cdots+c_nx_{1n}\\c_1x_{21}+c_2x_{22}+\cdots+c_nx_{2n}\\\vdots\\c_1x_{n1}+c_2x_{n2}+\cdots+c_nx_{nn}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

(1)中的最后一个矩阵是由一个 $n\times n$ 矩阵和 $n\times 1$ 矩阵相乘得到的．也就是说，通解(1)可写成乘积形式

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{C}$ 是 $n\times 1$ 列向量，c_1，c_2，…，c_n为任意常数，而 $n\times n$ 矩阵的每列由方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$ 的解向量组成，

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2n}\\&\vdots&&\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix},$$

这个 $n\times n$ 矩阵称为方程组在该区间上的*基本矩阵*(fundamental matrix).

在后面的讨论中，我们将用到基本矩阵的两个性质：

- 基本矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是非退化的.
- 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$ 的基本矩阵，那么

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t). \tag{3}$$

回顾定理 8.3 中的(9)，可发现 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)$与朗斯基行列式 $W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_n)$是相同的．所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$在区间 I 上线性无关的列向量保证了对区间上的每个 t 都有 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0$ 成立．因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是非退化的，所以对所有 t 都存在逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$．(3)的结果可由 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的每一列都是$\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$ 的解向量这一事实立即得到.

常数变易法 与 4.6 节中的分析过程类似，我们想问是否可以用一个函数列矩阵来代替(2)中的常数矩阵 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{U}(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_n(t)\end{pmatrix}\text{使得 }\mathbf{X}_p=\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{U}(t) \tag{4}$$

是非齐次方程组

$$X' = AX + F(t). \tag{5}$$

的特解.

根据乘积的求导法则，(4)的第二个表达式的导数为

$$X'_p = \Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t). \tag{6}$$

注意(6)中乘积的顺序是非常重要的，因为$U(t)$是一个列矩阵，乘积$U'(t)\Phi(t)$和$U(t)\Phi'(t)$是没有定义的. 将(4)和(6)代入(5)得

$$\Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t). \tag{7}$$

现在若用(3)代替$\Phi'(t)$，则(7)变成

$$\Phi(t)U'(t) + A\Phi(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t)$$

或

$$\Phi(t)U'(t) = F(t). \tag{8}$$

在(8)式两边同乘以$\Phi^{-1}(t)$得

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t),\text{所以 } U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)\mathrm{d}t.$$

因为$X_p = \Phi(t)U(t)$，所以(5)的特解为

$$X_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

为计算(9)中列矩阵$\Phi^{-1}(t)F(t)$的不定积分，我们对其每个元素积分. 所以方程组(5)的通解为$X = X_c + X_p$或

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)\mathrm{d}t. \tag{10}$$

注意在求积分$\int \Phi^{-1}(t)F(t)\mathrm{d}t$时我们无须使用积分常数. 这个原因与 4.6 节中对常数变易法的讨论一样. 请参考 4.6 节的例 2.

例 1 常数变易法

求出非齐次方程组

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \tag{11}$$

在区间$(-\infty, +\infty)$上的通解.

解 首先我们求解齐次方程组

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X. \tag{12}$$

其系数矩阵的特征方程为

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0.$$

所以特征值为$\lambda_1 = -2$和$\lambda_2 = -5$. 利用通常的方法，分别求出相应于λ_1和λ_2的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

则方程组(11)的解向量为

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}\\\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\text{和}\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-5t}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-5t}\\-2\mathrm{e}^{-5t}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{X}_1$中的元素构成了$\boldsymbol{\Phi}(t)$中的第一行，$\boldsymbol{X}_2$中的元素构成了$\boldsymbol{\Phi}(t)$中的第二行. 所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-5t}\\\mathrm{e}^{-2t}&-2\mathrm{e}^{-5t}\end{pmatrix}\text{和}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}&\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\\\frac{1}{3}\mathrm{e}^{5t}&-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{5t}\end{pmatrix}.$$

由(9)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_p=\boldsymbol{\Phi}(t)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-5t}\\\mathrm{e}^{-2t}&-2\mathrm{e}^{-5t}\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}&\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\\\frac{1}{3}\mathrm{e}^{5t}&-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3t\\\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-5t}\\\mathrm{e}^{-2t}&-2\mathrm{e}^{-5t}\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}2t\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}\\t\mathrm{e}^{5t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-5t}\\\mathrm{e}^{-2t}&-2\mathrm{e}^{-5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}\\\frac{1}{5}t\mathrm{e}^{5t}-\frac{1}{25}\mathrm{e}^{5t}-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\\\frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以由(10)得，(11)在给定区间上的通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-5t}\\\mathrm{e}^{-2t}&-2\mathrm{e}^{-5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\\\frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\\&=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-5t}+\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}t-\begin{pmatrix}\frac{27}{50}\\\frac{21}{50}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

■

初值问题 (5)在某区间上的通解可写成另一种形式：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s)\mathrm{d}s,\tag{13}$$

其中t和t_0是区间上的点. 这一形式在求解有附带初值条件$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$的(5)时比较有用，因为这样选择积分上下限会使得$t=t_0$时，特解变为0. 将$t=t_0$代入(13)得$\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{\Phi}(t_0)\boldsymbol{C}$，由此可得$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{X}_0$. 将最后这个结果代入(13)，就得到初值问题的解为

$$X = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)X_0 + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s. \tag{14}$$

注 当列矩阵 $F(t)$ 中的元素是常数、多项式、指数函数、正余弦函数，或这些函数的有限次和和积时，我们也可以利用待定系数法(undetermined coefficient)求出非齐次线性方程组 $X'=AX+F$ 的特解 X_p. 我们并没有详细阐述针对线性方程组的这一方法，因为这一方法并不是4.4节中讨论的方法的简单推广. 请参考练习8.3中的习题23～26和习题28.

练习 8.3

在习题1～20中，用常数变易法求解给定的方程组.

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x-3y+4$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-2y-1$

2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3x-2y+4t$

3. $X'=\begin{pmatrix}3 & -5\\ \frac{3}{4} & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t/2}$

4. $X'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\sin 2t\\ 2\cos 2t\end{pmatrix}e^{2t}$

5. $X'=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}$

6. $X'=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2\\ e^{-3t}\end{pmatrix}$

7. $X'=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 1 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}t$

8. $X'=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 1 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}e^{-t}\\ te^{t}\end{pmatrix}$

9. $X'=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$

10. $X'=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

11. $X'=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\sec t\\ 0\end{pmatrix}$

12. $X'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}e^{t}$

13. $X'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}e^{t}$

14. $X'=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 8 & -6\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\dfrac{e^{-2t}}{t}$

15. $X'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ \sec t\tan t\end{pmatrix}$

16. $X'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\ \cot t\end{pmatrix}$

17. $X'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\csc t\\ \sec t\end{pmatrix}e^{t}$

18. $X'=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\tan t\\ 1\end{pmatrix}$

19. $X'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}e^{t}\\ e^{2t}\\ te^{3t}\end{pmatrix}$

20. $X'=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ t\\ 2e^{t}\end{pmatrix}$

在习题21和22中利用(14)求解给定的初值问题.

21. $X'=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}4e^{2t}\\ 4e^{4t}\end{pmatrix}$，$X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

22. $X'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1/t\\ 1/t\end{pmatrix}$，$X(1)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

在习题23～26中，通过将 X_p 代入给定的方程组，确定特解中的系数. 求出方程组的通解.

23. $X'=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$；$X_p=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$

24. $X'=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}6t\\ -10t+4\end{pmatrix}$；$X_p=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}$

25. $X'=\begin{pmatrix}4 & \frac{1}{3}\\ 9 & 6\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-3\\ 10\end{pmatrix}e^t$；$X_p=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}e^t$

26. $X'=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\sin t\\ -2\cos t\end{pmatrix}$；$X_p=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\sin t$

27. 如图 8.5 所示，该电路中关于电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$的微分方程组为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(R_1+R_2)/L_2 & R_2/L_2\\ R_2/L_1 & -R_2/L_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E/L_2\\ 0\end{pmatrix}.$$

如果 $R_1=8\Omega$，$R_2=3\Omega$，$L_1=1\text{h}$，$L_2=1\text{h}$，$E(t)=100\sin t\text{V}$，$i_1(0)=0$，且 $i_2(0)=0$，利用常数变易法求解方程组.

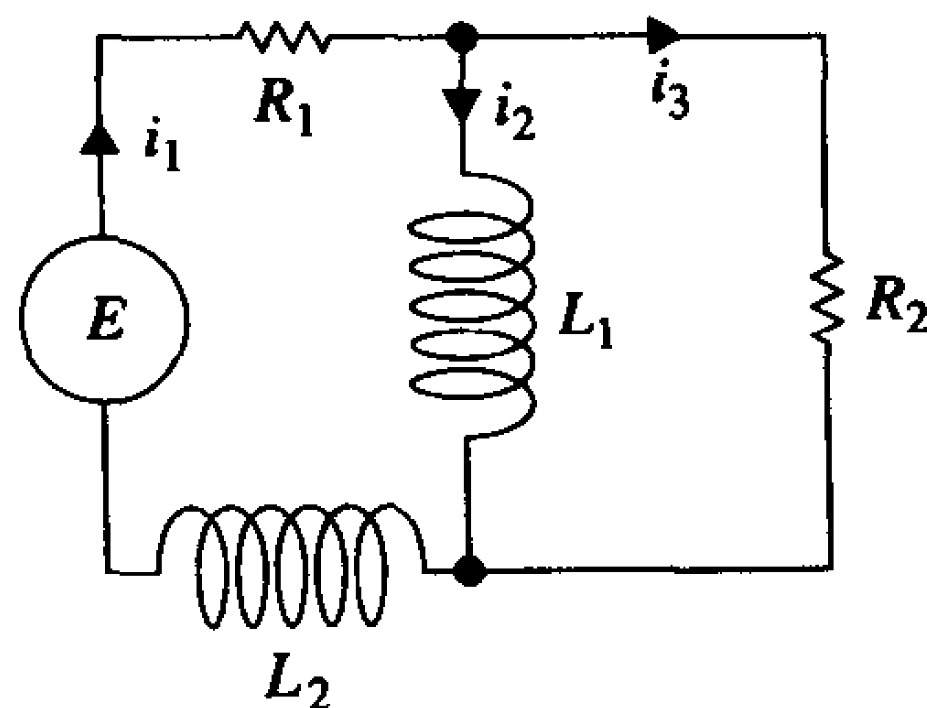


图 8.5

讨论题

28. (a)类似于习题 23，我们推测非齐次方程组 $X'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}$有以常数为元素的特解向量.

然而，我们可以证明这个方程组并没有形如 $X_p=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}$，$a_1$和 b_1为常数的解. 习题 23 与本题给出的方程组有什么不同?

(b)根据 4.4 节的求解过程，特解可能会是怎样的形式? 检验所得的推测，求出(a)中方程组的特解 X_p.

计算机实验作业

29. 当 A 是 3×3(或者更大)矩阵时，利用常数变易法人工求解非齐次线性方程组 $X'=AX+F(t)$几乎是不可能完成的任务. 考虑方程组

$$X'=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}te^t\\ e^{-t}\\ e^{2t}\\ 1\end{pmatrix}$$

(a)利用 CAS 或线性代数软件求出系数矩阵的特征值和特征向量.

(b)构造基本矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$并用计算机求出 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$.

(c)利用计算机计算 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)F(t)$、$\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)F(t)dt$、$\boldsymbol{\Phi}(t)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)F(t)dt$、$\boldsymbol{\Phi}(t)C$和 $\boldsymbol{\Phi}(t)C+\boldsymbol{\Phi}(t)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)F(t)dt$，其中 C 为常数列矩阵,其元素为常数 c_1、c_2、c_3 和 c_4.

(d)将计算机输出的通解改写为 $X=X_c+X_p$的形式，其中 $X_c=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+c_4X_4$.

8.4 矩阵指数

利用矩阵，我们可以用一种完全不同的方式求解线性一阶微分方程组. 回顾简单的线性一阶微分方程 $x'=ax$(其中 a 为常数)，其通解为 $x=ce^{at}$. 自然地，我们会问是否可以定义一个矩阵指数 e^{At}使得 e^{At}为方程组 $X'=AX$ 的解.

齐次方程组 现在我们来讨论是否可以定义一个矩阵指数 e^{At}使得

$$X=e^{At}C \tag{1}$$

为齐次方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的解．这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵，且 $\boldsymbol{C}$ 是 $n\times 1$ 列矩阵，其元素为任意常数．注意到在(1)中我们希望 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 是 $n\times n$ 矩阵，所以用 $\boldsymbol{C}$ 左乘 $e^{\boldsymbol{A}t}$．完全搞清矩阵指数的含义和相关理论需要全面的矩阵代数知识，一种定义 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的方法是使用标量指数函数 e^{at} 的幂级数表达式：

$$e^{at}=1+at+a^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+a^k\frac{t^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\frac{t^k}{k!},\tag{2}$$

(2)中的级数对所有的 t 收敛．利用这个级数，用单位阵 $\boldsymbol{I}$ 代替 1，并用 $n\times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代替常数 a，就得到关于 $n\times n$ 矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的定义．

定义 8.4　矩阵指数

对于任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{k!}.\tag{3}$$

可以证明(3)中给出的级数对所有的 t 值收敛于一个 $n\times n$ 矩阵．另外有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2)$ 等等．

$e^{\boldsymbol{A}t}$ 的微分　矩阵指数的微分类似于标量指数函数的微分性质 $\frac{d}{dt}e^{at}=ae^{at}$，只是稍有变化：

$$\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}.\tag{4}$$

我们对(3)逐项微分得：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}&=\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{k!}+\cdots\right]=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3t^2+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right]=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}.\end{aligned}$$

由(4)可以证明，对于所有 $n\times 1$ 常数向量 $\boldsymbol{C}$，(1)是 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的解：

$$\boldsymbol{X}'=\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}.$$

$e^{\boldsymbol{A}t}$ 是基本矩阵　如果我们用符号 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 表示矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$，那么(4)等价于矩阵微分方程 $\boldsymbol{\Psi}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}(t)$（请参考 8.3 节中的(3)式）．进一步，由定义 8.4 立即可得 $\boldsymbol{\Psi}(0)=e^{\boldsymbol{A}0}=\boldsymbol{I}$，所以 $\det\boldsymbol{\Psi}(0)\neq 0$．上述两个性质足以得出结论：$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的基本矩阵．

非齐次方程组　在 2.4 节的(4)式中，我们看到一个线性一阶微分方程 $x'=ax+f(t)$（a 为常数）的通解可表述为

$$x=x_c+x_p=ce^{at}+e^{at}\int_{t_0}^{t}e^{-as}f(s)ds.$$

对于非齐次线性一阶微分方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵，可以证明其通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_c+\boldsymbol{X}_p=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}+e^{\boldsymbol{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{F}(s)ds.\tag{5}$$

因为矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 是基本矩阵，所以它总是非退化的且 $e^{-\boldsymbol{A}s}=(e^{\boldsymbol{A}s})^{-1}$．实际上，$e^{-\boldsymbol{A}s}$ 可通过在

e^{At}中用$-s$替换t得到.

计算 e^{At} (3)中e^{At}的定义当然可以用来计算e^{At}. 但在实践中e^{At}的元素是关于t的幂级数，所以(3)的使用受到了限制. 于是我们自然想到是否能有简单易行的方法，将这些级数定义为封闭形式的函数. 请参考练习 8.4 中的习题 1～4. 幸运的是我们还有很多种其他方法用于计算e^{At}；接下来我们讨论如何利用拉普拉斯变换.

利用拉普拉斯变换 在(5)中我们看到$\mathbf{X}=e^{At}$是$\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$的解. 因为$e^{A0}=\mathbf{I}$，所以$\mathbf{X}=e^{At}$也是初值问题

$$\mathbf{X}'=\mathbf{AX},\quad \mathbf{X}(0)=\mathbf{I} \tag{6}$$

的解. 若$\mathbf{x}(s)=\mathscr{L}\{\mathbf{X}(t)\}=\mathscr{L}\{e^{At}\}$，则(6)的拉普拉斯变换为

$$s\mathbf{x}(s)-\mathbf{X}(0)=\mathbf{Ax}(s)\text{ 或 }(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}(s)=\mathbf{I}.$$

在最后一个等式两边同时乘以$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$得$\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{I}=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$，也就是说

$$\mathscr{L}\{e^{At}\}=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\text{ 或 }e^{At}=\mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}. \tag{7}$$

例 1 **矩阵指数**

对于$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$，利用拉普拉斯变换计算$e^{At}$.

解 首先我们计算矩阵$s\mathbf{I}-\mathbf{A}$并求它的逆：

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}s-1 & 1\\ -2 & s+2\end{pmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s-1 & 1\\ -2 & s+2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{s+2}{s(s+1)} & \dfrac{-1}{s(s+1)}\\ \dfrac{2}{s(s+1)} & \dfrac{s-1}{s(s+1)}\end{pmatrix}.$$

然后我们将最后一个矩阵中的元素分解成部分分式：

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{s+1} & -\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s+1}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

由(7)可得(8)的拉普拉斯逆变换，因此就得到了预期的结果，

$$e^{At}=\begin{pmatrix}2-e^{-t} & -1+e^{-t}\\ 2-2e^{-t} & -1+2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

■

计算机应用 对那些重视求解速度的人来说，可以在计算机软件的帮助下使用某些命令来计算e^{At}. 例如，为计算方阵$\mathbf{A}t$的矩阵指数，我们可以使用 Mathematica 中的 **MatrixExp[A t]** 函数、Maple 中的 **exponential(A，t)** 命令或 MATLAB 中的 **expm(At)** 函数. 请参考练习 8.4 中的习题 27 和 28.

练习 8.4

在习题 1 和 2 中，利用(3)计算e^{At}和e^{-At}.

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

在习题 3 和 4 中，利用(3)计算 e^{At}.

3. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$　　4. $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\5&1&0\end{pmatrix}$

在习题 5～8 中，利用(1)求出给定方程组的通解.

5. $X'=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}X$　　6. $X'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X$

7. $X'=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}X$　　8. $X'=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\5&1&0\end{pmatrix}X$

在习题 9～12 中，利用(5)求出给定方程组的通解.

9. $X'=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$　　10. $X'=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}t\\e^{4t}\end{pmatrix}$

11. $X'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$　　12. $X'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\cosh t\\\sinh t\end{pmatrix}$

13. 在习题 7 中令初值条件为 $X(0)=\begin{pmatrix}1\\-4\\6\end{pmatrix}$，解之.

14. 在习题 9 中令初值条件为 $X(0)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，解之.

在习题 15～18 中，用例 1 中的方法计算系数矩阵的 e^{At}. 利用(1)求给定方程组的通解.

15. $X'=\begin{pmatrix}4&3\\-4&-4\end{pmatrix}X$　　16. $X'=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}X$

17. $X'=\begin{pmatrix}5&-9\\1&-1\end{pmatrix}X$　　18. $X'=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-2\end{pmatrix}X$

设 P 表示这样一个矩阵，其每列 K_1，K_2，…，K_n 是 $n\times n$ 矩阵 A 相应于不同特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 的特征向量，可以证明 $A=PDP^{-1}$，这里 D 被定义为

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}. \tag{9}$$

在习题 19 和 20 中对于给定的矩阵证明以上结果.

19. $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&6\end{pmatrix}$　　20. $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

21. 设 $A=PDP^{-1}$，其中 D 如(9)所定义. 利用(3)证明 $e^{At}=Pe^{Dt}P^{-1}$.

22. 利用(3)证明

$$e^{Dt}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2 t}&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&e^{\lambda_n t}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 如(9)所定义.

在习题 23 和 24 中利用习题 19～22 的结果求解给定的方程组.

23. $\boldsymbol{X}' - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

24. $\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

讨论题

25. 回顾关于(7)中结果的讨论，矩阵 $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 总存在逆矩阵吗？请讨论之. [提示：如果 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$，那么 s 应该为何值？请参考附录 B 中的(9).]

26. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂零的(nilpotent)，如果存在某整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是幂零的. 讨论为什么当 $\boldsymbol{A}$ 是幂零的时，计算 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 会相对容易一些. 利用(1)计算 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 并求解 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

计算机实验作业

27. (a)利用(1)求 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$ 的通解. 利用 CAS 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$，然后利用计算机求系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量，并用 8.2 节中的方法构造它的通解. 最后，使两种通解的形式一致.

    (b)利用(1)求 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$ 的通解. 利用 CAS 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$. 对于复数的输出结果，利用软件进行化简；例如，在 Mathematica 中，如果 **m=MatrixExp[A t]**有复数元素，那么可以用命令 **Simplify [Complex Expand[m]]**.

28. 利用(1)求 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$ 的通解. 利用 MATLAB 或 CAS 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

第 8 章复习题

在习题 1 和 2 中填空.

1. 当 $k=$________时，向量 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}-\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解.

2. 当 $c_1=$________且 $c_2=$________时，向量 $\boldsymbol{X}=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-9t}+c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}e^{7t}$ 是初值问题 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解.

3. 考虑线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$. 不要求解方程组，确定

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}_4=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

中哪个向量是系数矩阵的特征向量. 方程组相应于这个特征向量的解是什么?

4. 考虑含有两个微分方程的线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为实系数矩阵. 如果已知 $\lambda_1=1+2\mathrm{i}$ 是一个特征值且相应的特征向量为 $\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，那么方程组的通解是什么?

在习题 5～14 中求解给定的线性方程组.

5. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+y$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x$

6. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-4x+2y$

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-4y$

7. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

8. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

9. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

10. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$

11. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 0 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}2\\ 16t\end{pmatrix}$

12. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^t\tan t\end{pmatrix}$

13. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}1\\ \cot t\end{pmatrix}$

14. $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}$

15. (a)考虑由 3 个一阶微分方程组成的线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$，其中系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 3\\ 3 & 5 & 3\\ -5 & -5 & -3\end{pmatrix}$$

已知 $\lambda=2$ 是一个二重特征值. 不要利用特殊公式(如 8.2 节中的(12))，求方程组相应于这一特征值的两个不同解.

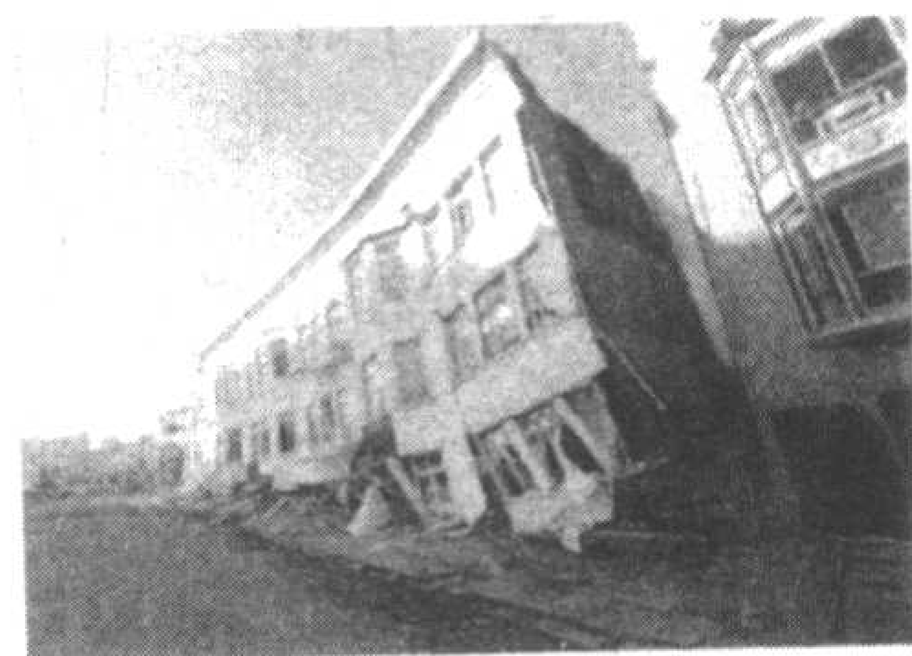
(b)利用(a)中的过程求解 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$.

16. 证明对于任意常数 c_1 和 c_2，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$ 是线性方程组

$$\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$$

的解. 徒手绘出方程组的相图.

项目模型：多层建筑在地震中的震动



在洛杉矶 Loma Prieta 地震中的房屋倒塌

剧烈地震显然对建筑物有破坏作用. 例如，著名的 1906 年洛杉矶地震，严重破坏了整座城市. 更近一些，在同样的地区发生了 Loma Prieta 地震，很多美国人都亲历了这场地震，因为当时正在电视直播在洛杉矶进行的 1989 年棒球联赛.

楼房地基位移模型 在这个项目中，我们想建立地震对多

层建筑的影响模型，并用数学方法求解及解释．我们假设一幢楼房的第 i 层质量为 m_i，且相邻的楼层用类似于弹簧的弹性材料连接．典型地，一幢大楼的连接材料是具有很好弹性的钢制材料．每一个连接物在该层相对于其他层发生偏移时都对其施加回复力．我们假设虎克定律在这里适用，第 i 层与第 $i+1$ 层之间的正比例常数为 k_i，即这两层之间的回复力为

$$F = k_i(x_{i+1} - x_i),$$

其中 x_i 代表第 i 层相对平衡位置的水平位移，而 $x_{i+1}-x_i$ 为第 $i+1$ 层相对于第 i 层的位移．我们假设第一层与地面也有同样的关系，其正比例常数为 k_0．图 1 给出了一个 n 层楼房的模型，而图 2 给出了第 i 层的受力情况．我们可以对楼房的每一层应用牛顿第二定律 $F=ma$，得到以下线性微分方程组：

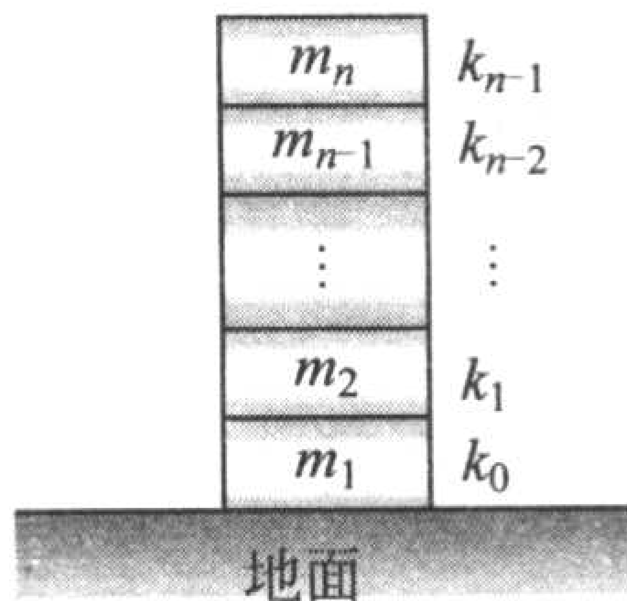


图 1

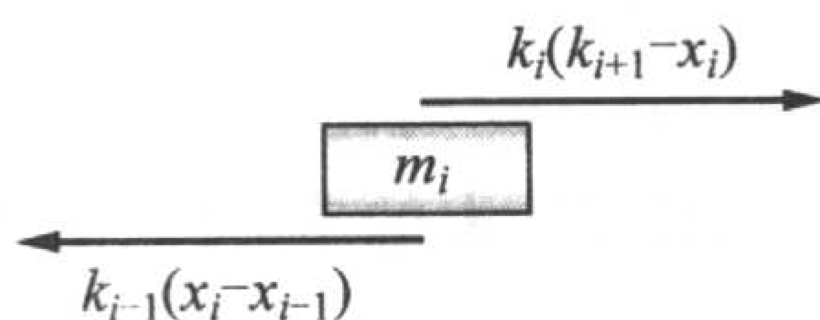


图 2

$$\begin{aligned} m_1 x''_1 &= -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 x''_2 &= -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ m_n x''_n &= -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{aligned} . \tag{1}$$

例 1　两层楼房

作为一个简单例子，考虑一幢两层楼房，每层质量为 $m=5\ 000\text{kg}$，其回复力的正比例常数为 $k=10\ 000\text{kg/s}^2$．微分方程组(1)简化为

$$\begin{aligned} x''_1 &= -4x_1 + 2x_2 \\ x''_2 &= 2x_1 - 2x_2. \end{aligned} \tag{2}$$

这个二阶方程组可用 4.8 节或 8.2 节给出的方法求解．(2)的振荡解为

$$x_1(t) = c_1\cos\omega_1 t + c_2\sin\omega_1 t + c_3\cos\omega_2 t + c_4\sin\omega_2 t \tag{3}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(4-\omega_1^2)c_1\cos\omega_1 t + \frac{1}{2}(4-\omega_1^2)c_2\sin\omega_1 t + \frac{1}{2}(4-\omega_2^2)c_3\cos\omega_2 t + \frac{1}{2}(4-\omega_2^2)c_2\sin\omega_2 t$$

我们将具体的求解过程留给读者来完成． ■

“相关练习”的习题 1 中要求求出 ω_1 和 ω_2 的值．

利用矩阵

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} -(k_0+k_1) & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_1 & -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} & -k_{n-1} \end{pmatrix},$$

(1)中的方程组可写成

$$\boldsymbol{MX}''=\boldsymbol{KX}. \tag{4}$$

$n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别被称为楼房的质量矩阵(mass matrix)和刚度矩阵(stiffness matrix). 注意矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是一对角阵，其对角线上第 i 个元素为楼房第 i 层的质量. 因为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆[㊀]为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2^{-1} & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n^{-1} \end{pmatrix},$$

这样我们得到矩阵形式的齐次二阶方程组的标准型

$$\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{AX}. \tag{5}$$

(5)中的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值表示楼房在地震中的坚固程度. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为负且不相同. 楼房的固有频率是特征值相反数的平方根. 如果 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值，则 $\omega_i=\sqrt{-\lambda_i}$ 是第 i 个频率，$i=1, 2, \cdots, n$. 在地震中，第一层受到巨大的水平方向的力. 如果这个力是振荡的，比如 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{G}\cos\gamma t$，其中 $\boldsymbol{G}$ 为常数列矩阵，那么楼房可能发生巨大位移，尤其是当力 $\boldsymbol{F}$ 的频率 γ 接近楼房的某个固有频率 ω_i 的时候. 这使我们想起了 5.1.3 节中的共振现象.

例 2　10 层楼房

假设有幢 10 层的楼房，每层质量为 10 000kg 且每个 k_i 的值为 5 000kg/s². 因为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 都是 10×10 的，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也是 10×10 的，借助 CAS 我们求得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

㊀ 请参考附录 B 中练习的习题 56.

再利用CAS求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i，λ_i 的值及相应的频率 $\omega_i=\sqrt{-\lambda_i}$ 和周期 $T_i=2\pi/\omega_i$（单位为s）在表1中列出.

表 1

λ_i	−1.956	−1.826	−1.623	−1.365	−1.075	−0.777	−0.500	−0.267	−0.099	−0.011
ω_i	1.399	1.351	1.274	1.168	1.037	0.881	0.707	0.517	0.315	0.105
T_i	4.491	4.651	4.932	5.379	6.059	7.132	8.887	12.153	19.947	59.840

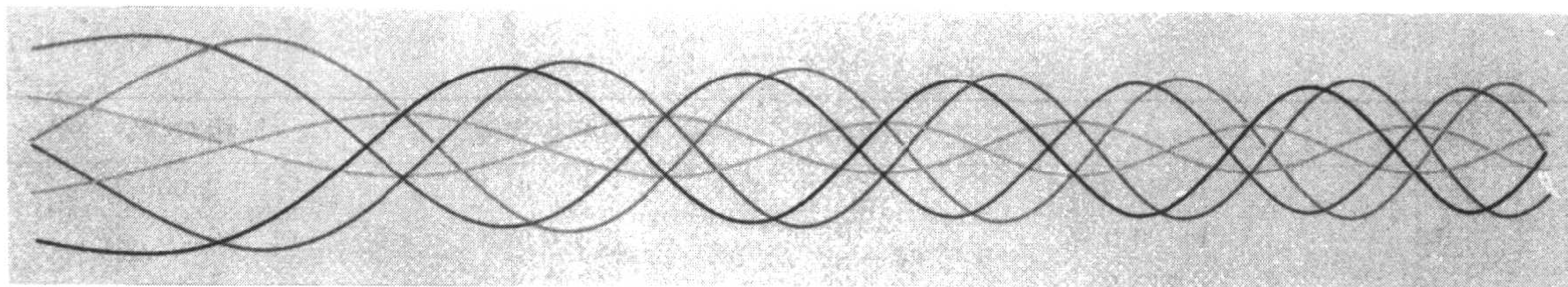
从表格的最后一行中我们可以看出，周期为2～3s的地震不会使这幢楼房陷入共振的危险. 请参考相关练习中的习题2. ■

相关练习

1. (a)利用4.8节中的消元法求解方程组(2). 求出频率 ω_1 和 ω_2 的精确值.
   (b)利用8.2节的注释中讨论的一种或两种方法求解方程组(2). 利用CAS或线性代数的软件求出特征值和特征向量.
2. 考虑例2中的10层楼房. 假设刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 乘以10，通过重新构造例2中的表格，说明典型的周期为2～3s的地震更可能对这样的楼房造成破坏.
3. 考虑校园内最高的楼房. 合理假设每层的质量和楼层之间的正比例常数. 如果读者觉得做这样的假设很困难，那么可以使用前面例子中的数据.
   (a)求出矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{A}$.
   (b)求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及其振荡频率和周期. 这幢楼房在一般的周期大小为2s的中度地震中安全吗?
   (c)如果在楼房刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 上乘以10，那么这幢楼房在周期为2s的地震中还安全吗? 请参考习题2. 刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 乘上什么值以后会使得整个建筑变得不安全.
4. 求解初值问题 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)$，$\boldsymbol{X}(0)=0$，$\boldsymbol{X}'(0)=0$，其中 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{G}\cos\gamma t$，$\boldsymbol{G}=E\boldsymbol{B}$，$E=10\,000\text{lb}$ 为地震施于楼房底层力的振幅，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

$\gamma=3$ 是地震的频率（一个典型的地震频率），$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 是习题3(a)中所用的. 请参考8.2节和8.3节的注释及练习8.3中的习题23～26. 利用CAS或线性代数软件进行所有的矩阵计算.



气体微分方程的数值解曲线；见图 6.1 和图 9.2

第 9 章 常微分方程的数值解

不是每个微分方程都有解. 但是，有些时候即使可以证明微分方程的解存在，我们也可能写不出显式解或隐式解. 在很多情况下，我们只能求得解的近似值. 正如 2.6 节所述，如果解存在，那么它表示笛卡儿平面上的一个点集合. 本章我们继续 2.6 节的基本思想，构造出微分方程的一些算法，以得到精确解曲线上点坐标的近似值.

本章我们讨论的中心主要是一阶初值问题 $dy/dx=f(x, y)$，$y(x_0)=y_0$. 在 4.9 节中我们看到，一阶方程的数值解法可以扩展到一阶方程组上，因此我们也可以通过把高阶微分方程写成一阶微分方程组的形式，来求解高阶微分方程的近似解. 本章最后给出了求解线性二阶边界值问题近似解的方法.

9.1 欧拉方法与误差分析

在 2.6 节中，我们给出了求形如 $y'=f(x, y)$，$y(x_0)=y_0$ 的一阶初值问题近似解的一个最简单的例子. 回顾欧拉方法最主要的部分是公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n), \tag{1}$$

这里 f 是从微分方程 $y'=f(x, y)$ 中得到的. 由(1)式的递归方法可以得到解曲线的连续“切线”在 x_1，x_2，x_3，…或 $x_n=x_0+nh$ 处对应的 y 坐标 y_1，y_2，y_3，…，h 为常数也是 x_n 和 x_{n+1}之间的步长. 可以用 y_1，y_2，y_3，…来近似初值问题的解 $y(x)$在 x_1，x_2，x_3，…处的值. 但是(1)式这种简化形式的近似值过于粗糙.

一个比较 在练习 2.6 的习题 4 中，要求用欧拉方法求初值问题 $y'=2xy$，$y(1)=1$ 的解在 $y(1.5)$处的近似值. 读者应该可以得到解析解 $y=e^{x^2-1}$ 以及类似于表 9.1 和表 9.2 中所给的数值.

表 9.1 欧拉方法，$h=0.1$

x_n	y_n	真值	绝对误差	%相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.10	1.200 0	1.233 7	0.033 7	2.73
1.20	1.464 0	1.552 7	0.088 7	5.71
1.30	1.815 4	1.993 7	0.178 4	8.95
1.40	2.287 4	2.611 7	0.324 4	12.42
1.50	2.927 8	3.490 3	0.562 5	16.12

表 9.2 欧拉方法，$h=0.05$

x_n	y_n	真值	绝对误差	%相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.05	1.100 0	1.107 9	0.007 9	0.72
1.10	1.215 5	1.233 7	0.018 2	1.47
1.15	1.349 2	1.380 6	0.031 4	2.27
1.20	1.504 4	1.552 7	0.048 3	3.11
1.25	1.684 9	1.755 1	0.070 2	4.00
1.30	1.895 5	1.993 7	0.098 2	4.93
1.35	2.141 9	2.276 2	0.134 3	5.90
1.40	2.431 1	2.611 7	0.180 6	6.92
1.45	2.771 4	3.011 7	0.240 3	7.98
1.50	3.173 3	3.490 3	0.317 1	9.08

在这种情况下，令步长 $h=0.1$，$y(1.5)$近似值的相对误差大于 16%是不可接受的. 把计算量加大一倍，可令步长 $h=0.05$ 以提高精度.

数值方法的误差 在选择和使用数值方法解初值问题时，我们必须意识到各种可能的误差来源. 各种不断传递的误差会降低近似计算的精度，以致使近似计算显得毫无意义. 另一方面，基于数值方法的计算，没有必要要求非常高的精度，那样只会耗费资源，增加复杂度.

误差的一个来源是计算过程中产生的*舍入误差*(round-off error). 这个误差的来源是因为任何计算器或计算机只能利用有限位数来存储数据. 这里只是为了说明这个情况，假定一个 10 进制的计算器只能存储 4 位数字，因此在计算器中 1/3 表示为 0.333 3，1/9 表示为 0.111 1. 若我们用这个计算器计算当 $x=0.3334$ 时$(x^2-1/9)/(x-1/3)$的值，则可以得到

$$\frac{(0.3334)^2-0.1111}{0.3334-0.3333}=\frac{0.1112-0.1111}{0.3334-0.3333}=1.$$

然而，利用代数知识可以得到

$$\frac{x^2-1/9}{x-1/3}=\frac{(x-1/3)(x+1/3)}{x-1/3}=x+\frac{1}{3},$$

因此，当 $x=0.3334$ 时，$(x^2-1/9)/(x-1/3)\approx 0.3334+0.3333=0.6667$. 这个例子说明舍入误差的影响是很大的，使用时必须要多加注意. 减少舍入误差影响的一种方法是使数值计算量减到最少. 另一种计算机技术是使用双精度十进制数表示结果. 一般来说，舍入误差是不可预测并且是很难分析的，所以在接下来的误差分析中我们将忽略它. 我们将集中分析用公式或四则运算求解近似值时所产生的误差.

欧拉方法的截断误差 在由(1)所产生的序列值 y_1，y_2，y_3，…中，通常 y_1的值和精确解在 x_1处的值即 $y_1(x)$不一致，因为四则运算只给出了解的直线近似. 请参考图 2.30. 这种误差称为*局部截断误差*(local truncation error)、*公式误差*(formula error)，或*离散误差*(discretization error). 每一步都会产生截断误差；也就是说若假设 y_n是精确值，那么 y_{n+1}将会包括局部截断误差.

为了推导欧拉方法局部误差的计算公式，我们使用带余项的泰勒公式. 如果函数 $y(x)$ 有 $k+1$ 阶导数，这些导数在一个包含 a 和 x 的开区间上是连续的，那么

$$y(x)=y(a)+y'(a)\frac{x-a}{1!}+\cdots+y^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+y^{(k+1)}(c)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

其中 c 是 a 和 x 之间的某个点. 令 $k=1$，$a=x_n$，$x=x_{n+1}=x_n+h$，可以得到

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)\frac{h}{1!}+y''(c)\frac{h^2}{2!}$$

或

$$y(x_{n+1})=\underbrace{y_n+hf(x_n,\ y_n)}_{y_{n+1}}+y''(c)\frac{h^2}{2!}.$$

欧拉方法(1)是上一个公式中去除最后一项的公式；因此，y_{n+1} 的局部截断误差为

$$y''(c)\frac{h^2}{2!},\quad 其中\ x_n<c<x_{n+1}.$$

c 的值通常是未知的(理论上讲是存在的)，所以准确的误差是不能计算出来的，但是误差的绝对值的上界为

$$M\frac{h^2}{2!},其中\ M=\max_{x_n<x<x_{n+1}}|y''(x)|.$$

在讨论由数值方法产生的误差时，使用记号 $O(h^n)$ 是有帮助的. 为了定义这个概念，令 $e(h)$ 表示依赖于 h 的数值误差. 如果存在常数 C 和一个正整数 n 使得 $|e(h)|\leqslant Ch^n$ 在 h 充分小时成立，那么 $e(h)$ 称为是 h^n 阶的，用符号 $O(h^n)$ 来表示. 因此欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$. 我们注意到，一般来说如果数值方法中的 $e(h)$ 是 h^n 阶的，并且当 h 取一半时，新的误差近似于 $C(h/2)^n=Ch^n/2^n$；也就是说误差通过因子 $1/2^n$ 减少了.

例 1　局部截断误差的误差界

求用欧拉方法求解 $y'=2xy$，$y(1)=1$ 时产生的局部截断误差的误差界.

解　从解 $y=e^{x^2-1}$，我们可以得到 $y''=(2+4x^2)e^{x^2-1}$，因此局部截断误差为

$$y''(c)\frac{h^2}{2}=(2+4c^2)e^{(c^2-1)}\frac{h^2}{2},$$

这里 c 是 x_n 和 x_n+h 之间的一个值. 特别地，$h=0.1$ 时，我们可以用 1.1 代替 y_1 中的 c，然后求得其局部截断误差的上界为：

$$[2+(4)(1.1)^2]e^{((1.1)^2-1)}\frac{(0.1)^2}{2}=0.042\ 2.$$

从表 9.1 中我们可以看到，第一次计算后的误差为 0.033 7，比上界值小.

类似地，我们可以用 1.5 代替 c(这个 c 值给出了每步 $y''(c)$ 的最大值，不过可能对前几步来说有点过大)，得到表 9.1 前五步中任何一步的局部截断误差. 计算后得到

$$[2+(4)(1.5)^2]e^{((1.5)^2-1)}\frac{(0.1)^2}{2}=0.192\ 0 \qquad (2)$$

作为每步局部截断误差的上界. ■

注意，若例 1 中的 h 取一半 0.05 时，误差界为 0.048 0，大约只有(2)的四分之一. 这和预测的一样，因为欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$.

在以上的分析中，我们假设在计算 y_{n+1} 时 y_n 的值是精确的，这并不是因为它包含了前一步的局部截断误差. y_{n+1} 中的总误差是前面步骤中的误差的积累值. 这个总的误差称为**全局截断误差**(global truncation error). 全局误差的完整分析超出了本书讨论的范围，但是可以证明欧拉方法的全局误差是 $O(h)$.

我们期望对于欧拉方法来说，如果步长减半，则误差也近似减半. 这个结论在表 9.1 和表 9.2 中给出，在这两个表中，步长为 $h=0.1$ 时，在 $x=1.50$ 处的误差是 0.562 5，$h=0.05$ 时误差是 0.317 1，近似减半.

一般地，可以证明如果求微分方程数值解的方法有局部误差 $O(h^{\alpha+1})$，那么全局误差为$O(h^{\alpha})$.

本节余下来的部分以及下一节我们将学习一个比欧拉方法明显精确的方法.

改进的欧拉方法 用公式

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \tag{3}$$

定义的数值方法一般称为**改进的欧拉方法**(improved Euler's method)，其中

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{4}$$

为了用(3)式计算 y_{n+1}，$n=0, 1, 2, \cdots$，我们必须在做每一步时先用欧拉方法(4)得到初始估计值 y_{n+1}^*. 例如，令(4)中的 $n=0$，可以得到 $y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$，则利用(3)式可知 $y_1 = y_0 + h\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$，其中 $x_1 = x_0 + h$. 这些方程非常容易识别. 在图 9.1 中，观察到 $m_0 = f(x_0, y_0)$ 和 $m_1 = f(x_1, y_1^*)$ 分别是通过点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1^*) 的直线的斜率. 利用这些斜率，可以得到 $m_{\text{ave}} = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$，我们可以得到与之平行的虚线的斜率. 用第一步，而不是进一步沿着通过 (x_0, y_0) 且斜率为 $f(x_0, y_0)$ 的直线一直到用欧拉方法得到 y 坐标为 y_1^* 的点，我们用通过 (x_0, y_0) 且斜率为 m_{ave} 的虚线来代换，直到到达 x_1. 从图像来看，y_1 是 y_1^* 的改进.

一般来说，改进的欧拉方法是**预测真值法**(predictor-corrector method)的一个特例. 由(4)给出的 y_{n+1}^* 的值可以预测 $y(x_n)$ 的值，但是公式(3)所定义的 y_{n+1} 的值修正了这个估计.

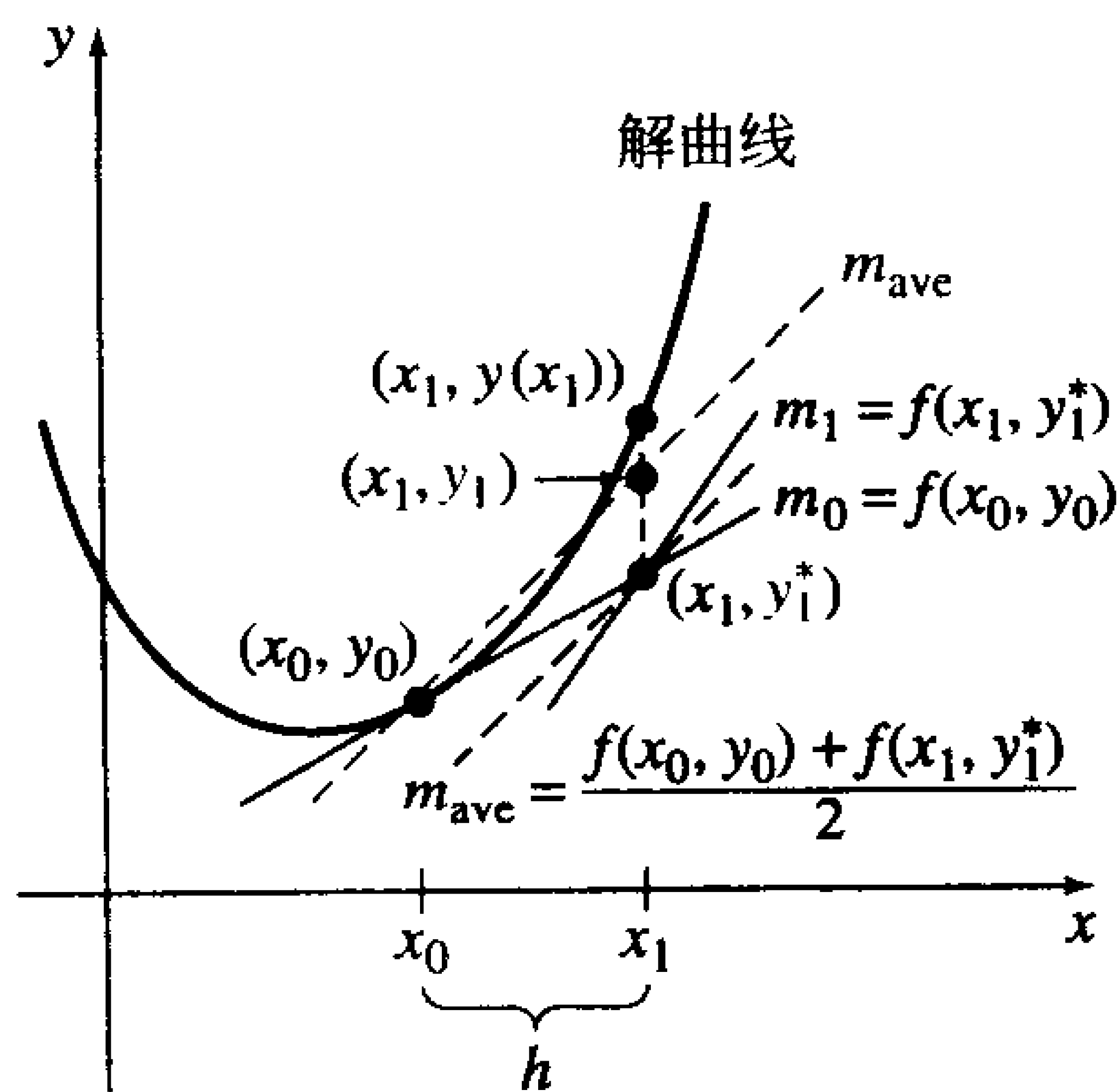


图 9.1

例 2 **改进的欧拉方法**

利用改进的欧拉方法可以得到 $y(1.5)$ 的近似值，作为初值问题 $y' = 2xy$，$y(1) = 1$. 比较 $h=0.1$ 和 $h=0.05$ 的结果.

解 令 $x_0 = 1$，$y_0 = 1$，$f(x_n, y_n) = 2x_ny_n$，$n=0$，$h=0.1$，我们先计算(4)：

$$y_1^* = y_0 + (0.1)(2x_0y_0) = 1 + (0.1)2(1)(1) = 1.2.$$

在(3)中令 $x_1 = 1 + h = 1 + 0.1 = 1.1$，可以得到

$$y_1 = y_0 + (0.1)\frac{2x_0y_0 + 2x_1y_1^*}{2} = 1 + (0.1)\frac{2(1)(1) + 2(1.1)(1.2)}{2} = 1.232.$$

对 $h=0.1$ 和 $h=0.05$ 的比较值分别列在表 9.3 和表 9.4 中.

表 9.3 改进的欧拉方法，$h=0.1$

x_n	y_n	真值	绝对误差	%相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.10	1.232 0	1.233 7	0.001 7	0.14
1.20	1.547 9	1.552 7	0.004 8	0.31
1.30	1.983 2	1.993 7	0.010 6	0.53
1.40	2.590 8	2.611 7	0.020 9	0.80
1.50	3.450 9	3.490 4	0.039 4	1.13

表 9.4 改进的欧拉方法，$h=0.05$

x_n	y_n	真值	绝对误差	%相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.05	1.107 7	1.107 9	0.000 2	0.02
1.10	1.233 2	1.233 7	0.000 4	0.04
1.15	1.379 8	1.380 6	0.000 8	0.06
1.20	1.551 4	1.552 7	0.001 3	0.08
1.25	1.753 1	1.755 1	0.002 0	0.11
1.30	1.990 9	1.993 7	0.002 9	0.14
1.35	2.272 1	2.276 2	0.004 1	0.18
1.40	2.606 0	2.611 7	0.005 7	0.22
1.45	3.003 8	3.011 7	0.007 9	0.26
1.50	3.479 5	3.490 4	0.010 8	0.31

■

这里提醒一句. 我们不能先计算出所有的 y_n^* 值，然后把这些值代入公式(3). 换句话说，我们不能利用表 9.1 中的数据得到表 9.3 中的数据. 为什么不能?

改进的欧拉方法的截断误差 改进的欧拉方法的局部截断误差是 $O(h^3)$. 这个结果的偏差类似于欧拉方法局部截断误差的偏差. 因为改进的欧拉方法的局部截断误差是 $O(h^3)$，所以全局截断误差为 $O(h^2)$. 这一点可以从例 2 中看到：当步长减半，从 $h=0.1$ 减到 $h=0.05$ 后，在 $x=1.50$ 的绝对误差从 0.039 4 减到 0.010 8，减少了大约 $(1/2)^2=1/4$.

练习 9.1

在习题 1～10 中，给出了初值条件，用改进的欧拉方法求所给函数的近似值，精确到小数点后四位. 第一次用 $h=0.1$，第二次用 $h=0.05$.

1. $y'=2x-3y+1$，$y(1)=5$；$y(1.5)$
2. $y'=4x-2y$，$y(0)=2$；$y(0.5)$
3. $y'=1+y^2$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
4. $y'=x^2+y^2$，$y(0)=1$；$y(0.5)$
5. $y'=e^{-y}$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
6. $y'=x+y^2$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
7. $y'=(x-y)^2$，$y(0)=0.5$；$y(0.5)$
8. $y'=xy+\sqrt{y}$，$y(0)=1$；$y(0.5)$

9. $y'=xy^2-\frac{y}{x}$，$y(1)=1$；$y(1.5)$

10. $y'=y-y^2$，$y(0)=0.5$；$y(0.5)$

11. 考虑初值问题 $y'=(x+y-1)^2$，$y(0)=2$. 利用改进的欧拉方法求解在 $x=0.5$ 处的近似值，分别令 $h=0.1$ 和 $h=0.05$. 比较每一步所得的近似值和由解析解所得的精确值.

12. 尽管从微分方程中看不出来，但是微分方程的解在我们希望求解 $y(x)$ 的 x 点附近可能有很坏的性质. 数值方法在这点处可能会给出差异很大的结果. 令 $y(x)$ 是初值问题 $y'=x^2+y^3$，$y(1)=1$ 的解.



(a)用数值求解程序绘出解在[1，1.4]上的图形.

(b)令步长 $h=0.1$，比较由欧拉方法和改进的欧拉方法得到的 $y(1.4)$ 的近似值.

13. 考虑初值问题 $y'=2y$，$y(0)=1$. 其解析解为 $y=e^{2x}$.

(a)用单步法和欧拉方法求出 $y(0.1)$ 的近似值.

(b)求 y_1 局部截断误差的误差界.

(c)把 y_1 的精确误差与上面所得的误差界加以比较.

(d)用两步法和欧拉方法求出 $y(0.1)$ 的近似值.

(e)通过比较(a)和(b)中的误差，证明欧拉方法的全局截断误差为 $O(h)$.

14. 用改进的欧拉方法再做一次习题 13. 它的全局截断误差为 $O(h^2)$.

15. 令初值问题为 $y'=x-2y$，$y(0)=1$，再做一次习题 13. 解析解为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^{-2x}$.

16. 用改进的欧拉方法重做习题 15. 它的全局误差为 $O(h^2)$.

17. 考虑初值问题 $y'=2x-3y+1$，$y(1)=5$. 它的解析解为 $y(x)=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+\frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$.

(a)找出一个包含 c 和 h 的公式，表示出欧拉方法中第 n 步所得的全局截断误差.

(b)令步长 $h=0.1$，找出在求解 $y(1.5)$ 近似值的过程中每一步所得局部截断误差的边界.

(c)令欧拉方法中 $h=0.1$，$h=0.05$，求 $y(1.5)$ 的近似值. 请参考练习 2.6 的习题 1.

(d)计算(c)中的误差，并证明欧拉方法的全局误差为 $O(h)$.

18. 用改进的欧拉方法再做一次习题 17，这个方法的全局截断误差为 $O(h^2)$. 请参考习题 1. 读者可能需要保留四位以上的小数才能看到降低误差阶的效果.

19. 令初值问题为 $y'=e^{-y}$，$y(0)=0$. 其解析解为 $y(x)=\ln(x+1)$. 求 $y(0.5)$ 的近似值. 请参考练习 2.6 的习题 5.

20. 用全局误差为 $O(h^2)$ 的改进的欧拉方法再做一次习题 19. 请参考习题 5. 读者可能需要保留四位以上的小数才能看到降低误差阶的效果.

讨论题

21. 回答接在本节例 2 后面第三句话后的"为什么不能?"

9.2 龙格-库塔法

也许解初值问题 $y'=f(x, y)$，$y(x_0)=y_0$ 近似解的最流行的也是最精确的一种数值方法是*四阶龙格-库塔法*(fourth-order Runge-Kutta method). 恰如其名，有解不同阶的龙格-库塔法. 这些方法可以用带余项函数为 $y(x)$ 的泰勒级数的展开推得.

一阶龙格-库塔法 在上一节中，我们看到，如果函数 $y(x)$ 有 $k+1$ 阶导数，这些导数在一个含有 a 和 x 的开区间上连续，那么可以记

$$y(x)=y(a)+y'(a)\frac{x-a}{1!}+y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+y^{(k+1)}(c)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

其中 c 是 a 和 x 之间的某个数. 如果用 x_n 代替 a，用 $x_{n+1}=x_n+h$ 代替 x，那么上述公式可以写为

$$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y^{(k)}(x_n)+\cdots+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(c),$$

这里 c 是 x_n 和 x_{n+1} 之间的某个数. 在这种情况下，当 $k=1$ 和余项 $\frac{h^2}{2}y''(c)$ 很小时，我们可以得到一个很熟悉的公式

$$y_{n+1}=y_n+hy'_n=y_n+hf(x_n,y_n).$$

换言之，基本欧拉方法也就是一阶龙格-库塔法(first-order Runge-Kutta procedure).

二阶龙格-库塔法　现在考虑二阶龙格-库塔法(second-order Runge-Kutta procedure). 这个方法需要确定常数 a、b、α 和 β，因此这个公式为

$$y_{n+1}=y_n+ak_1+bk_2,\tag{1}$$

其中

$$k_1=hf(x_n,y_n),$$
$$k_2=hf(x_n+\alpha h,y_n+\beta k_1),$$

这和二阶泰勒多项式是一致的. 可以证明，只要常数满足

$$a+b=1,b\alpha=\frac{1}{2},b\beta=\frac{1}{2},\tag{2}$$

就有上式成立. 这是一个由含四个未知量的三个方程组成的方程组，它有无穷多个解. 注意到当 $a=b=1/2$，$\alpha=\beta=1$ 时，(1)式变为改进的欧拉公式. 因为这个公式和二阶泰勒多项式是一致的，这个方法的局部截断误差是 $O(h^3)$，全局截断误差为 $O(h^2)$.

注意到(1)中的和式 ak_1+bk_2 是 k_1 和 k_2 的加权平均，因为 $a+b=1$. k_1 和 k_2 是解曲线 $y(x)$ 在区间 x_n 到 x_{n+1} 上两个不同点处的斜率的近似值.

四阶龙格-库塔法　四阶龙格-库塔法(fourth-order Runge-Kutta procedure)需要求下面公式中的常数

$$y_{n+1}=y_n+ak_1+bk_2+ck_3+dk_4,$$

其中

$$k_1=hf(x_n,y_n),$$
$$k_2=hf(x_n+\alpha_1h,y_n+\beta_1k_1),$$
$$k_3=hf(x_n+\alpha_2h,y_n+\beta_2k_1+\beta_3k_2),$$
$$k_4=hf(x_n+\alpha_3h,y_n+\beta_4k_1+\beta_5k_2+\beta_6k_3),$$

它和四阶泰勒多项式是一致的. 这些常数可以通过含有 13 个变量 11 个方程的方程组解出. 这些常数最常使用的值是从下面的公式中求出的：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$k_1=hf(x_n,y_n),$$

$$k_2=hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \tag{3}$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

请读者仔细阅读公式中的(3)；注意到 k_2 依赖于 k_1，k_3 依赖于 k_2，k_4 依赖于 k_3. 同时，k_2 和 k_3 是近似解在 x_n 和 x_{n+1} 之间中点处的斜率的近似值.

例 1 龙格-库塔法

当 $h=0.1$ 时，用龙格-库塔法求解 $y(1.5)$ 的近似值，$y(1.5)$ 是 $y'=2xy$，$y(1)=1$ 的解.

解 出于举例的目的，我们计算 $n=0$ 时的情形. 由(3)式可以求出

$$k_1 = (0.1)f(x_0, y_0) = (0.1)(2x_0y_0) = 0.2,$$
$$k_2 = (0.1)f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.2)\right)$$
$$= (0.1)2\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1)\right)\left(y_0 + \frac{1}{2}(0.2)\right) = 0.231,$$
$$k_3 = (0.1)f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.231)\right)$$
$$= (0.1)2\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1)\right)\left(y_0 + \frac{1}{2}(0.231)\right) = 0.234\ 255,$$
$$k_4 = (0.1)f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.234\ 255)$$
$$= (0.1)2(x_0 + 0.1)(y_0 + 0.234\ 255) = 0.271\ 536\ 1$$

同时，因为

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1 + \frac{1}{6}(0.2 + 2(0.231) + 2(0.234\ 255) + 0.271\ 536\ 1) = 1.233\ 674\ 35\ .$$

余下的计算结果在表 9.5 中给出，其结果四舍五入到四位小数.

表 9.5 龙格-库塔法，h=0.1

x_n	y_n	真值	绝对误差	%相对误差
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.10	1.233 7	1.233 7	0.000 0	0.00
1.20	1.552 7	1.552 7	0.000 0	0.00
1.30	1.993 7	1.993 7	0.000 0	0.00
1.40	2.611 6	2.611 7	0.000 1	0.00
1.50	3.490 2	3.490 4	0.000 1	0.00

■

仔细观察表 9.5，说明为什么四阶龙格-库塔法如此流行. 若四位小数的精确度足够满足我们的需要，那就没有必要用更小的步长了. 表 9.6 比较了用欧拉方法、改进的欧拉方法以及四阶龙格-库塔法解初值问题 $y'=2xy$，$y(1)=1$ 的结果.（请参考表 9.1 和表 9.3.）

表 9.6　$y'=2xy$，$y(1)=1$

几种方法的比较，$h=0.1$					几种方法的比较，$h=0.05$				
x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格-库塔法	真值	x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格-库塔法	真值
1.00	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.00	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.10	1.200 0	1.232 0	1.233 7	1.233 7	1.05	1.100 0	1.107 7	1.107 9	1.107 9
1.20	1.464 0	1.547 9	1.552 7	1.552 7	1.10	1.215 5	1.233 2	1.233 7	1.233 7
1.30	1.815 4	1.983 2	1.993 7	1.993 7	1.15	1.349 2	1.379 8	1.380 6	1.380 6
1.40	2.287 4	2.590 8	2.611 6	2.611 7	1.20	1.504 4	1.551 4	1.552 7	1.552 7
1.50	2.927 8	3.450 9	3.490 2	3.490 4	1.25	1.684 9	1.753 1	1.755 1	1.755 1
					1.30	1.895 5	1.990 9	1.993 7	1.993 7
					1.35	2.141 9	2.272 1	2.276 2	2.276 2
					1.40	2.431 1	2.606 0	2.611 7	2.611 7
					1.45	2.771 4	3.003 8	3.011 7	3.011 7
					1.50	3.173 3	3.479 5	3.490 3	3.490 4

龙格-库塔法的截断误差　因为(3)中的第一个方程和四阶泰勒多项式是一致的，所以该方法的局部截断误差为

$$y^{(5)}(c)\frac{h^5}{5!}\quad 或\quad O(h^5),$$

全局截断误差为 $O(h^4)$. 现在很明显地可以看出为什么这个方法叫做*四阶龙格-库塔法*.

例 2　局部截断误差和全局截断误差

把四阶龙格-库塔法的局部和全局截断误差应用于 $y'=2xy$，$y(1)=1$.

解　对已知解 $y(x)=e^{x^2-1}$ 求微分，可以得到

$$y^{(5)}(c)\frac{h^5}{5!}=(120c+160c^3+32c^5)e^{c^2-1}\frac{h^5}{5!}. \tag{4}$$

令 $c=1.5$，由(4)式可以得到当 $h=0.1$ 时，每步的截断误差为 0.000 28. 注意表 9.5 中 y_1 的精确误差比这个值小得多.

表 9.7 给出了初值问题在 $x=1.5$ 处解的近似值，它可以由四阶龙格-库塔法得到. 通过计算精确解在 $x=1.5$ 处的值，我们可以求出这些近似值的误差. 因为这个方法非常精确，所以在数值解中必须要用多位小数才能看出当步长减少一半时的效果. 注意到当 h 减半时，h 从 0.1 减少到 0.05，误差减少到原误差的 $2^4=16$ 分之一，这和我们预料的一样.

表 9.7　龙格-库塔法

h	近似解	误差
0.1	3.49 021 064	$1.323\,210\,889\times10^{-4}$
0.05	3.49 033 382	$9.137\,760\,898\times10^{-6}$

■

自适应方法 我们已经看到，数值方法的精确度可以通过减小步长 h 来提高. 当然，这种提高精确度的方法是有代价的，它增加了计算机运行的时间，并且增大了产生舍入误差的可能性. 一般来讲，为了在期望的范围内保持某种截断误差，可能在求近似解的区间上有一些步长相对比较大的子区间和一些步长相对比较小的子区间. 使用可变步长的数值方法称为自适应方法(adaptive method). 在这些求微分方程近似解的方法中，最流行的一种是龙格-库塔-费尔贝格法(Runge-Kutta-Fchlberg algorithm).

练习 9.2

1. 利用四阶龙格-库塔法求初值问题

$$y' = (x + y - 1)^2, \quad y(0) = 2$$

在 $x=0.5$ 处的近似值，$h=0.1$，结果保留四位小数. 把近似值和练习 9.1 中习题 11 的精确值加以比较.

2. 解(2)中的方程，设 $a=1/4$. 用二阶龙格-库塔法求习题 1 中初值问题在 $x=0.5$ 处的近似解，结果保留四位小数. 把近似值和练习 9.1 中习题 11 的精确值加以比较.

在习题 3～12 中，给定初值问题，用龙格-库塔法求解所给函数值的近似值，$h=0.1$，结果保留四位小数.

3. $y'=2x-3y+1$，$y(1)=5$；$y(1.5)$
4. $y'=4x-2y$，$y(0)=2$；$y(0.5)$
5. $y'=1+y^2$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
6. $y'=x^2+y^2$，$y(0)=1$；$y(0.5)$
7. $y'=e^{-y}$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
8. $y'=x+y^2$，$y(0)=0$；$y(0.5)$
9. $y'=(x-y)^2$，$y(0)=0.5$；$y(0.5)$
10. $y'=xy+\sqrt{y}$，$y(0)=1$；$y(0.5)$
11. $y'=xy^2-\dfrac{y}{x}$，$y(1)=1$；$y(1.5)$
12. $y'=y-y^2$，$y(0)=0.5$；$y(0.5)$

13. 若空气阻力与瞬时速率的平方成正比，则从高为 h 的地方落下的质点 m 的速度 v 为

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, k > 0,$$

令 $v(0)=0$，$k=0.125$，$m=5$ slug，$g=32\text{ft/s}^2$.

(a)用龙格-库塔法求落体在 $t=5$s 时的速度的近似值，$h=1$.


(b)用数值求解程序绘出初值问题解的图像.

(c)用分离变量法解初值问题，并求出 $v(5)$的精确值.

14. 一个描述细菌群落(B. dendroides)所占面积 A(单位为 cm^2)的数学模型为

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).^{\ominus}$$

设初始面积为 0.24cm^2.

(a)用龙格-库塔法完成下面的表格，$h=0.5$.

t(天)	1	2	3	4	5
A(观察值)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A(近似值)					


(b)用数值求解程序绘出初值问题解的图像. 从图像中估计 $A(1)$、$A(2)$、$A(3)$、$A(4)$和 $A(5)$的值.

⊖ 见 V. A. Kostitzin, *Mathematical Biology*(London: Harrap, 1939).

(c)用变量分离法解初值问题，并计算 $A(1)$、$A(2)$、$A(3)$、$A(4)$、$A(5)$的值.

15. 考虑初值问题

$$y' = x^2 + y^3, y(1) = 1.$$

(请参考练习 9.1 的习题 12.)

(a)比较步长分别为 $h=0.1$ 和 $h=0.5$ 时用龙格-库塔法得到的结果，求解区间为[1, 1.4].


(b)用数值求解程序绘出初值问题在区间[1, 1.4]上的图像.

16. 考虑初值问题 $y'=2y$, $y(0)=1$. 解析解为 $y(x)=e^{2x}$.

(a)用单步法和四阶龙格-库塔法求 $y(0.1)$的近似值.

(b)求 y_1 局部截断误差的误差界.

(c)比较 y_1 的实际误差和前面所得到的误差界.

(d)用两步法和四阶龙格-库塔法求 $y(0.1)$的近似值.

(e)通过比较(a)和(d)中的误差，证明四阶龙格-库塔法的全局截断误差为 $O(h^4)$.

17. 用初值问题 $y'=-2y+x$, $y(0)=1$ 代替习题 16 中的初值问题，再解一次. 其解析解为 $y(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^{-2x}$.

18. 考虑初值问题 $y'=2x-3y+1$, $y(1)=5$. 解析解为 $y(x)=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+\frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$.

(a)找出一个包含 c 和 h 的公式，表示出四阶龙格-库塔法中第 n 步所得的局部截断误差.

(b)若 $h=0.1$，找出在求解 $y(1.5)$近似值过程中每步局部截断误差的误差界.

(c)若依次令 $h=0.1$，$h=0.05$，用四阶龙格-库塔法求 $y(1.5)$的近似值. 请参考习题 3. 读者可能需要保留六位以上的小数才能看出减小步长的效果.

19. 用初值问题 $y'=e^{-y}$, $y(0)=0$ 代替习题 18 中的初值问题，再解一次. 解析解为 $y(x)=\ln(x+1)$. 求 $y(0.5)$的近似值. 请参考习题 7.

讨论题

20. 在解初值问题 $y'=f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$时，函数 f 的计算次数是衡量数值方法计算复杂度的一个指标. 求出欧拉方法、改进的欧拉方法以及龙格-库塔法每步计算中需要计算 f 的次数. 考虑一些特殊的情况，当计算的复杂度可比时比较这些方法的精确度.

计算机实验作业

21. 解[a, b]上的初值问题的龙格-库塔法会产生一个有限点的集合，这些点用来近似精确解图像上的点. 为了把这个离散点集扩展到区间[a, b]上所有近似解的点，我们可以使用插值函数(interpolating function). 大多数计算机代数系统支持这种函数，它适用于给定的数据，并且假设点之间都是平滑的. 这些插值函数可能是多项式或使之平滑的多项式集合. 在 Mathematica 中，命令 **y=Interpolation[data]** 可以用来得到点 **data**={{x_0, y_0}, {x_1, y_1}, …, {x_n, y_n}}的插值函数. 可以像处理计算机代数系统中的内置函数那样来处理插值函数 **y[x]**.

(a)求初值问题 $y'=-y+10\sin 3x$, $y(0)=0$ 在区间[0, 2]上的精确解. 绘出这个解的图形并求出它的正根.

(b)利用四阶龙格-库塔法求(a)中初值问题的近似解，$h=0.1$. 得出一个插值函数并绘出它的图像. 求插值函数在区间[0, 2]上的正根.

9.3 多步法

欧拉方法、改进的欧拉方法以及龙格-库塔法都是单步法(single-step method)的特例. 在这些方法中，每一个连续值 y_{n+1} 都仅仅是基于其之前的值 y_n 来计算的. 另一方面，多步法(multistep method)或连续法(continuing method)使用了前面几步的值来计算 y_{n+1}. 可以用很多多步计算公式来求解微分方程的近似解. 因为本书不是专门讨论数值问题的专著，所以这里我们只考虑一种方法，比如改进的欧拉方法，它是一种预测真值法；它其实就是用来预测 y_{n+1}^* 值的一个公式，我们用这个值来预测真值 y_{n+1}.

亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法 最流行的一种多步法是四阶亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法(Adams-Bashforth/Adams-Moulton Method). 这个方法中的预测值用亚当斯-巴什福思公式得到

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}), \tag{1}$$

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y'_{n-2} = f(x_{n-2}, y_{n-2})$$

$$y'_{n-3} = f(x_{n-3}, y_{n-3})$$

这里 $n \geqslant 3$. 然后把 y_{n+1}^* 的值代入亚当斯-莫尔顿修正子

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}), \\ y'_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^*). \end{aligned} \tag{2}$$

注意到用公式(1)求 y_4 的值，需要知道 y_0、y_1、y_2 和 y_3 的值. 当然，y_0 的值是已给的初始条件. 因为亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法的局部截断误差是 $O(h^5)$，所以通常用具有相同误差性质的方法来计算 y_1、y_2 和 y_3 的值，比如四阶龙格-库塔法.

例 1 **亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法**

令 $h=0.2$，用亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法求

$$y' = x + y - 1, y(0) = 1$$

的解 $y(0.8)$ 的近似值.

解 令步长为 $h=0.2$，则 $y(0.8)$ 可以用 y_4 来近似. 第一步我们使用 $x_0=0$，$y_0=1$，$h=0.2$ 的龙格-库塔法，解得

$$y_1 = 1.021\,400\,00, y_2 = 1.091\,817\,96, y_3 = 1.222\,106\,46.$$

可以得到 $x_0=0$，$x_1=0.2$，$x_2=0.4$，$x_3=0.6$，$f(x, y)=x+y-1$，求得

$$\begin{aligned} y'_0 &= f(x_0, y_0) = (0) + (1) - 1 = 0, \\ y'_1 &= f(x_1, y_1) = (0.2) + (1.021\,400\,00) - 1 = 0.221\,400\,00, \\ y'_2 &= f(x_2, y_2) = (0.4) + (1.091\,817\,96) - 1 = 0.491\,817\,96, \\ y'_3 &= f(x_3, y_3) = (0.6) + (1.222\,106\,46) - 1 = 0.822\,106\,46. \end{aligned}$$

用上述值预测值(1)为

$$y_4^* = y_3 + \frac{0.2}{24}(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0') = 1.425\ 359\ 75.$$

为了使用修正子(2)，首先得到

$$y_4' = f(x_4, y_4^*) = 0.8 + 1.425\ 359\ 75 - 1 = 1.225\ 359\ 75.$$

最后，由(2)可得

$$y_4 = y_3 + \frac{0.2}{24}(9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') = 1.425\ 527\ 88.$$ ■

请读者证明例 1 中 $y(0.8)$的精确值为 $y(0.8)=1.425\ 540\ 93$.

数值方法的稳定性 在使用数值方法的时候，必须要考虑的一个问题是初值问题近似解求解方法的稳定性. 简单地讲，若初始条件发生微小变动，计算结果也仅仅发生微小的变动，那么这种数值方法称为是*稳定的*(stable). 若初始条件发生微小变动引起计算结果发生较大的变动，那么这种数值方法称为是*不稳定的*(unstable). 考虑稳定性之所以是重要的，是因为数值方法从第一步开始往后的每一步，都是一个新的初值问题，这些初值问题的初始条件是前一步的近似解. 由于舍入误差的存在，这些值相对解的真值而言几乎总有一些小的差别. 除了舍入误差，另一个较普遍的误差源是初始条件本身；在物理应用中，测量所得的数据经常是不准确的.

对于特定类型初值问题的数值解，检验不稳定性的一种方法是比较步长不断减小时所得的近似解. 如果数值方法是不稳定的，那么误差会随着步长的减小而增加. 另一种检验稳定性的方法是观察当初值条件有微小变动时解会如何变化(例如，把 $y(0)=1$ 变为 $y(0)=0.999$).

关于稳定性更多更详尽的讨论，请参考数值分析的课本. 一般地，本章我们所讨论的所有这些方法都有很好的稳定性.

多步法的优缺点 对于求微分方程数值解方法的选择有很多地方要考虑. 单步法，特别是龙格-库塔法因为具有很高的精确度和容易编程的特点，所以经常用它来进行计算. 然而，这种方法的一个主要缺点是微分方程的右边在每一步都要进行大量的运算. 例如，四阶龙格-库塔法每步需要对四个函数进行计算. 另一方面，如果这些函数在前一步已经计算过并且已储存起来，那么多步法在每一步只需要对一个函数进行计算. 这会导致计算机在存储和读取上耗费大量的时间.

例如，用 n 步四阶龙格-库塔法解 $y'=f(x, y)$，$y(x_0)=y_0$需要对 $4n$ 个函数进行计算. 在四阶龙格-库塔法开始时，需要用亚当斯-巴什福思多步法对 16 个函数进行计算，对 n 步亚当斯-巴什福思方法需要计算 $n-4$ 个函数，这个方法总共需要计算 $n+12$ 个函数. 一般来说，亚当斯-巴什福思多步法需要计算的函数数量比四阶龙格-库塔法需要计算的函数数量多四分之一. 如果 $f(x, y)$的计算非常复杂，则多步法具有更高的效率.

多步法的另一个问题是亚当斯-莫尔顿修正公式在每一步中应该重复使用多少次. 每次使用修正子都需要额外计算一个函数值，因此其精确度的提高是以失去多步法的优点为代价的. 在实践中，修正子每计算一次，如果 y_{n+1}的值变动很大，那么整个问题应该用更小的步长重新计算. 这就是可变步长方法的基本思想，但对这个方法的讨论超出了本书的范围.

练习 9.3

1. 求例 1 中初值问题的精确解. 把 $y(0.2)$、$y(0.4)$、$y(0.6)$、$y(0.8)$的精确值和近似值 y_1、y_2、y_3、y_4 加以比较.

 2. 给亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法编一个计算机程序.

在习题 3 和 4 中，利用亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法求 $y(0.8)$的近似值，其中 $y(x)$是所给初值问题的解. 用龙格-库塔法计算 y_1、y_2和 y_3，$h=0.2$.

3. $y'=2x-3y+1$，$y(0)=1$
4. $y'=4x-2y$，$y(0)=2$

在习题 5～8 中，利用亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法求 $y(1.0)$的近似值，其中 $y(x)$是所给初值问题的解. 用龙格-库塔法计算 y_1、y_2和 y_3，依次令 $h=0.2$，$h=0.1$.

5. $y'=1+y^2$，$y(0)=0$
6. $y'=y+\cos x$，$y(0)=1$
7. $y'=(x-y)^2$，$y(0)=0$
8. $y'=xy+\sqrt{y}$，$y(0)=1$

9.4 高阶微分方程与方程组

在 2.6 节和本章前三节中，我们集中讨论了求解一阶初值问题 $dy/dx=f(x, y)$，$y(x_0)=y_0$ 近似解的数值技巧. 为了求二阶初值问题的近似解，正如已经在 4.9 节中所讨论的，我们必须把二阶微分方程写成由两个一阶微分方程组成的方程组. 因此，我们把二阶微分方程写成正规型(请参考 1.1 节)，用 x、y 和 y'表示 y''.

二阶初值问题 二阶初值问题

$$y'' = f(x,y,y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0 \tag{1}$$

可以写为一阶微分方程组的初值问题. 如果令 $y'=u$，那么(1)中的微分方程可以写为方程组

$$\begin{aligned} y' &= u, \\ u' &= f(x,y,u). \end{aligned} \tag{2}$$

因为 $y'(x_0)=u(x_0)$，所以(2)相应的初始条件是 $y(x_0)=y_0$，$u(x_0)=u_0$. 可以用特定的数值方法求出微分方程组(2)中每个一阶微分方程特解的数值. 例如，用欧拉方法(Euler's method)解方程组(2)可以得到

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n, \\ u_{n+1} &= u_n + hf(x_n,y_n,u_n), \end{aligned} \tag{3}$$

但用四阶龙格-库塔法(fourth-order Runge-Kutta method)得到的是

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$m_1 = hu_n, \qquad k_1 = hf(x_n,\ y_n,\ u_n),$$

$$m_2 = h\left(u_n+\frac{1}{2}k_1\right), \qquad k_2 = hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}m_1,\ u_n+\frac{1}{2}k_1\right),$$

$$m_3 = h\left(u_n+\frac{1}{2}k_2\right), \qquad k_3 = hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}m_2,\ u_n+\frac{1}{2}k_2\right),$$

$$m_4 = h(u_n+k_3), \qquad k_4 = hf(x_n+h,\ y_n+m_3,\ u_n+k_3).$$

一般地，利用代换 $y=u_1$，$y'=u_2$，$y''=u_3$，…，$y^{(n-1)}=u_n$，我们可以把 n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 写为 n 个一阶方程的方程组.

例 1　欧拉方法

用欧拉方法求 $y(0.2)$ 的近似值，这里 $y(x)$ 是初值问题

$$y''+xy'+y=0, y(0)=1, y'(0)=2. \tag{5}$$

的解.

解　做代换 $y'=u$，方程等价于方程组

$$y'=u,$$
$$u'=-xu-y.$$

因此，由(3)可得

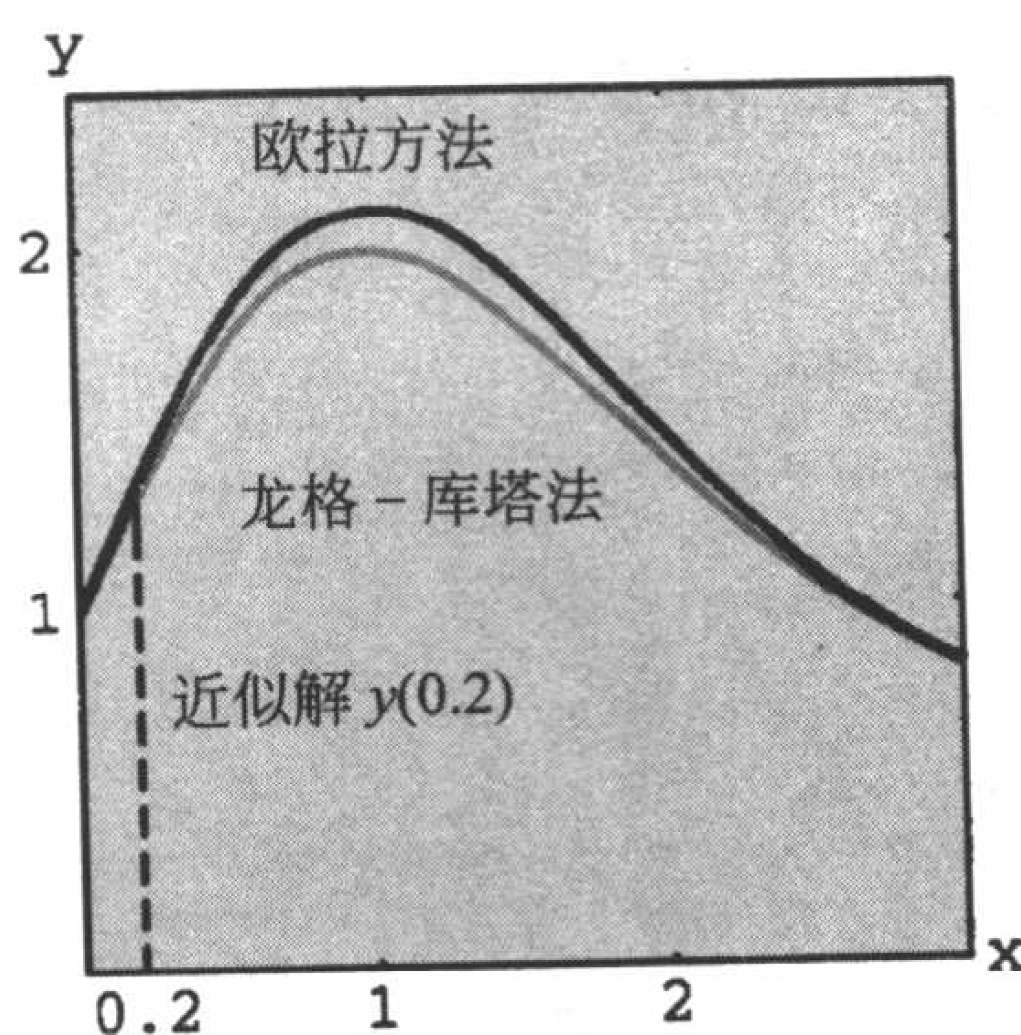
$$y_{n+1}=y_n+hu_n,$$
$$u_{n+1}=u_n+h[-x_nu_n-y_n].$$

令步长 $h=0.1$，$y_0=1$，$u_0=2$，我们可得

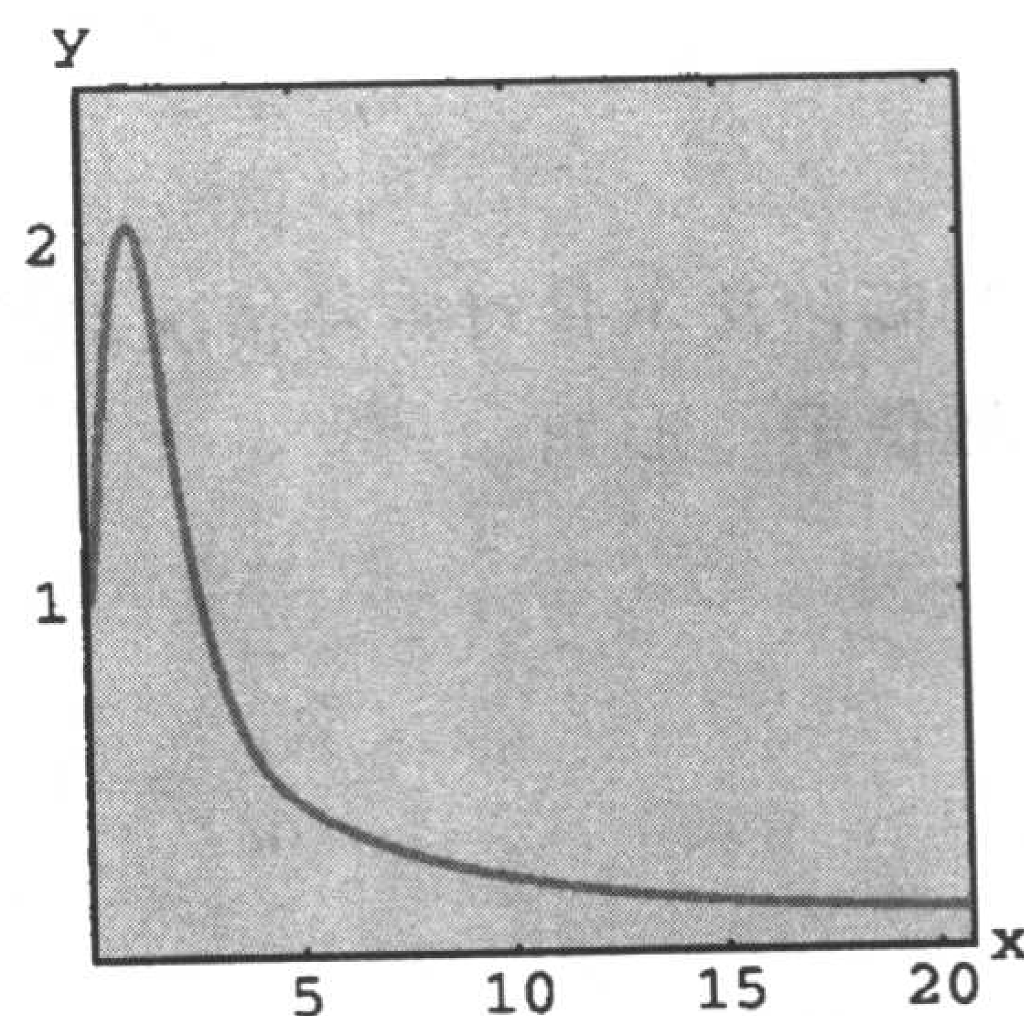
$$y_1=y_0+(0.1)u_0=1+(0.1)2=1.2,$$
$$u_1=u_0+(0.1)[-x_0u_0-y_0]=2+(0.1)[-(0)(2)-1]=1.9,$$
$$y_2=y_1+(0.1)u_1=1.2+(0.1)(1.9)=1.39,$$
$$u_2=u_1+(0.1)[-x_1u_1-y_1]=1.9+(0.1)[-(0.1)(1.9)-1.2]=1.761.$$

换言之，$y(0.2)\approx 1.39$，$y'(0.2)\approx 1.761$. ■

用绘图工具，我们可以比较在区间[0, 3]上由欧拉方法($h=0.1$)和四阶龙格-库塔法($h=0.1$)得到的(5)的解曲线图像，如图 9.2(a)所示. 由图 9.2(b)可知，(4)的解 $y(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时，有 $y(x)\to 0$.



a) 欧拉方法和龙格-库塔法



b) 龙格-库塔法

图　9.2

如果需要，我们可以用 6.1 节中介绍的方法得到微分方程(5)的两个幂级数形式的解. 但是如果这个方法不能说明微分方程有初等形式的解，那么我们只能用部分和近似求出 $y(0.2)$.

回顾 6.1.1 节中气体微分方程 $y''+xy=0$ 的无穷级数解，它没有显示出图 6.1 中的解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 有不稳定的性质. 那些图像，以及本章首页气体方程的六个特解的图像可以在数值求解程序中使用四阶龙格-库塔法得到，令步长 $h=0.1$.

方程组降阶为一阶方程组 用类似于刚才讨论的方法解二阶微分方程，我们经常先解出每个因变量的高阶导数，然后再对低阶导数做适当的代换，最后把高阶微分方程化为一阶微分方程组.

例 2 把方程组改写为一阶方程组

把

$$x''-x'+5x+2y''=e^t$$
$$-2x+y''+2y=3t^2$$

改写为一阶微分方程组.

解 把方程组写为

$$x''+2y''=e^t-5x+x',$$
$$y''=3t^2+2x-2y,$$

然后在第二个方程的两端同时乘以 2，两式相减消去 y''. 可以得到

$$x''=-9x+4y+x'+e^t-6t^2.$$

因为方程组的第二个方程中 y 的高阶导数总是可以用方程的其余项表示，所以我们现在引进一个新的变量. 若令 $x'=u$，$y'=v$，则 x'' 和 y'' 分别可以写为

$$u'=x''=-9x+4y+u+e^t-6t^2,$$
$$v'=y''=2x-2y+3t^2.$$

则原方程组可以写为下面的形式

$$x'=u,$$
$$y'=v,$$
$$u'=-9x+4y+u+e^t-6t^2,$$
$$v'=2x-2y+3t^2.$$

■

例 2 所示的降阶法不是对每种情况都适用的.

方程组的数值解 形如

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$\frac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

方程组的解可以用适合方程组的欧拉方法、龙格-库塔法或亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法来求解. 例如，使用四阶龙格-库塔法求解方程组

$$\begin{aligned} x'&=f(t,x,y),\\ y'&=g(t,x,y),\\ x(t_0)&=x_0,y(t_0)=y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

和下面的形式类似

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}(m_1+2m_2+2m_3+m_4),$$
$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \tag{7}$$

其中

$$m_1=hf(t_n,x_n,y_n),\qquad k_1=hg(t_n,x_n,y_n),$$
$$m_2=hf\left(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}m_1,y_n+\frac{1}{2}k_1\right),\qquad k_2=hg\left(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}m_1,y_n+\frac{1}{2}k_1\right),$$
$$m_3=hf\left(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}m_2,y_n+\frac{1}{2}k_2\right),\qquad k_3=hg\left(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}m_2,y_n+\frac{1}{2}k_2\right), \tag{8}$$
$$m_4=hf(t_n+h,x_n+m_3,y_n+k_3),\qquad k_4=hg(t_n+h,x_n+m_3,y_n+k_3).$$

例 3　龙格-库塔法

考虑初值问题

$$x'=2x+4y,$$
$$y'=-x+6y,$$
$$x(0)=-1,\quad y(0)=6.$$

用四阶龙格-库塔法求 $x(0.6)$ 和 $y(0.6)$ 的近似值. 比较当步长 $h=0.2$ 和 $h=0.1$ 时的结果.

解　我们给出了步长 $h=0.2$ 时 x_1 和 y_1 的计算结果. 其中 $f(t, x, y)=2x+4y$，$g(t, x, y)=-x+6y$，$t_0=0$，$x_0=-1$，$y_0=6$，由(8)可得

$$m_1=hf(t_0,x_0,y_0)=0.2f(0,-1,6)=0.2[2(-1)+4(6)]=4.400\,0,$$
$$k_1=hg(t_0,x_0,y_0)=0.2g(0,-1,6)=0.2[-1(-1)+6(6)]=7.400\,0,$$
$$m_2=hf\left(t_0+\frac{1}{2}h,x_0+\frac{1}{2}m_1,y_0+\frac{1}{2}k_1\right)=0.2f(0.1,1.2,9.7)=8.240\,0,$$
$$k_2=hg\left(t_0+\frac{1}{2}h,x_0+\frac{1}{2}m_1,y_0+\frac{1}{2}k_1\right)=0.2g(0.1,1.2,9.7)=11.400\,0,$$
$$m_3=hf\left(t_0+\frac{1}{2}h,x_0+\frac{1}{2}m_2,y_0+\frac{1}{2}k_2\right)=0.2f(0.1,3.12,11.7)=10.608\,0,$$
$$k_3=hg\left(t_0+\frac{1}{2}h,x_0+\frac{1}{2}m_2,y_0+\frac{1}{2}k_2\right)=0.2g(0.1,3.12,11.7)=13.416\,0,$$
$$m_4=hf(t_0+h,x_0+m_3,y_0+k_3)=0.2f(0.2,8,20.216)=19.376\,0,$$
$$k_4=hg(t_0+h,x_0+m_3,y_0+k_3)=0.2g(0.2,8,20.216)=21.377\,6.$$

因此，由(7)可得

$$x_1=x_0+\frac{1}{6}(m_1+2m_2+2m_3+m_4)$$
$$=-1+\frac{1}{6}(4.4+2(8.24)+2(10.608)+19.376\,0)=9.245\,3,$$
$$y_1=y_0+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$
$$=6+\frac{1}{6}(7.4+2(11.4)+2(13.416)+21.377\,6)=19.068\,3,$$

这里同前面一样，计算结果四舍五入到四位小数．这些值给出了近似值 $x_1 \approx x(0.2)$，$y_1 \approx y(0.2)$．接下来用计算机得到的值在表 9.8 和表 9.9 中给出．

表 9.8　龙格-库塔法，$h=0.2$

m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4	t_n	x_n	y_n
								0.00	−1.000 0	6.000 0
4.400 0	8.240 0	10.608 0	19.376 0	7.400 0	11.400 0	13.416 0	21.377 6	0.20	9.245 3	19.068 3
18.952 7	31.156 4	37.887 0	63.684 8	21.032 9	31.757 3	36.971 6	57.821 4	0.40	46.032 7	55.120 3
62.509 3	97.786 3	116.006 3	187.366 9	56.937 8	84.849 5	98.068 8	151.419 1	0.60	158.943 0	150.819 2

表 9.9　龙格-库塔法，$h=0.1$

m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4	t_n	x_n	y_n
								0.00	−1.000 0	6.000 0
2.200 0	3.160 0	3.456 0	4.872 0	3.700 0	4.700 0	4.952 0	6.325 6	0.10	2.384 0	10.888 3
4.832 1	6.574 2	7.077 8	9.587 0	6.294 6	7.941 3	8.348 2	10.595 7	0.20	9.337 9	19.133 2
9.520 8	12.582 1	13.425 8	17.760 9	10.546 1	13.233 9	13.887 2	17.535 8	0.30	22.554 1	32.853 9
17.652 4	22.909 0	24.305 5	31.655 4	17.456 9	21.811 4	22.854 9	28.739 3	0.40	46.510 3	55.442 0
31.478 8	40.349 6	42.638 7	54.920 2	28.614 1	35.624 5	37.284 0	46.720 7	0.50	88.572 9	93.300 6
54.634 8	69.402 9	73.124 7	93.410 7	46.523 1	57.748 2	60.377 4	75.437 0	0.60	160.756 3	152.002 5

■

读者可以证明例 3 中的初值问题的解为 $x(t)=(26t-1)e^{4t}$，$y(t)=(13t+6)e^{4t}$．从这些方程中我们可以看到精确值是 $x(0.6)=160.938\,4$，$y(0.6)=152.119\,8$．如图 9.3 所示，解在 $t=0$ 临域内的图像可以在数值求解程序中用龙格-库塔法得到，步长 $h=0.1$．

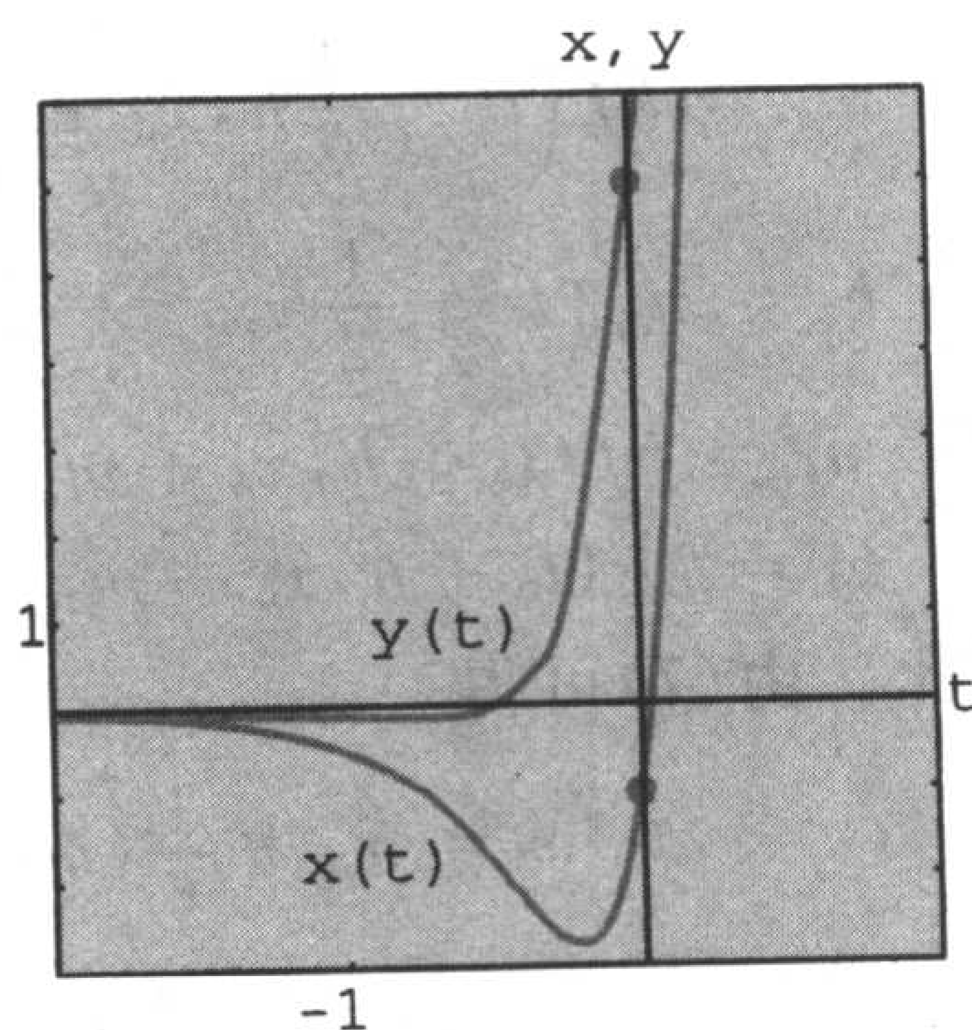


图　9.3

总之，欧拉方法适用于一般的方程组(6)：

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n).$$

练习 9.4

1. 用欧拉方法求 $y(0.2)$的近似解，其中 $y(x)$是初值问题
$$y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 1.$$
的解．$h=0.1$．求这个问题的精确解，并且把 $y(0.2)$的精确值与 y_2加以比较．

2. 用欧拉方法求 $y(1.2)$的近似解，其中 $y(x)$是初值问题
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\quad y(1) = 4,\quad y'(1) = 9,$$
的解，这里 $x>0$，$h=0.1$．求这个问题的精确解，并且把 $y(1.2)$的精确值与 y_2加以比较．

3. 用龙格-库塔法解习题 1，依次令 $h=0.2$，$h=0.1$.

4. 用龙格-库塔法解习题 2，依次令 $h=0.2$，$h=0.1$.

5. 用龙格-库塔法求 $y(0.2)$的近似值，其中 $y(x)$是初值问题

$$y''-2y'+2y=e^{t}\cos t,y(0)=1,y'(0)=2.$$

的解．依次令 $h=0.2$，$h=0.1$.

6. $E=100\mathrm{V}$，$R=10\Omega$，$L=1\mathrm{h}$，如图 9.4 所示，电路中的电流 $i_1(t)$和 $i_3(t)$的微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-20i_1+10i_3+100$$

$$\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}=10i_1-20i_3,$$

其中 $i_1(0)=0$，$i_3(0)=0$. 用龙格-库塔法求 $i_1(t)$和 $i_3(t)$在 $t=0.1$，0.2，0.3，0.4，0.5 处的近似值．令$h=0.1$．用数值求解程序绘出解 $i_1(t)$和 $i_3(t)$在区间 $0\leqslant t\leqslant 5$ 上的图形．用图形说明当 $t\to+\infty$时，$i_1(t)$和 $i_3(t)$的性态是怎样的.

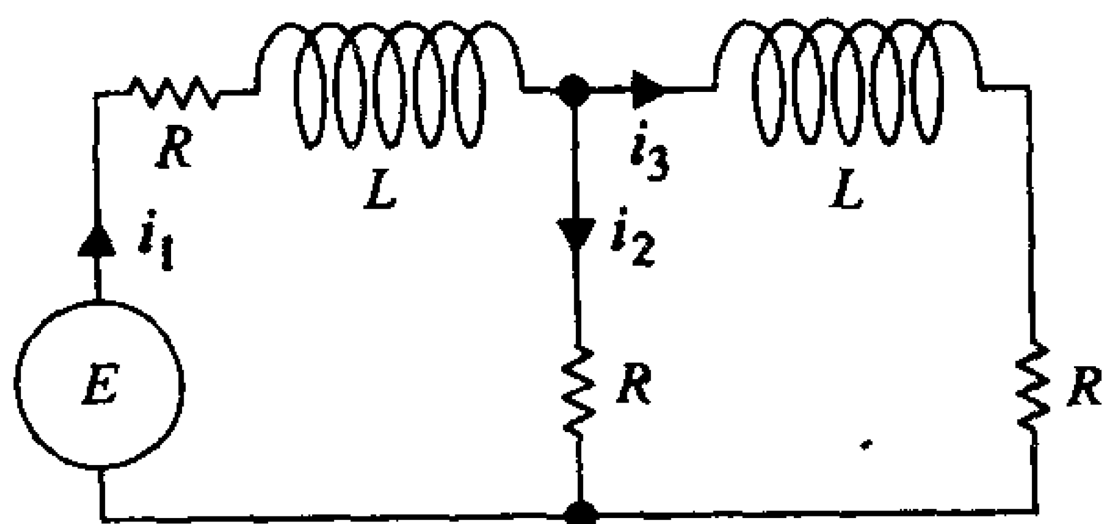


图　9.4

在习题 7～12 中，用龙格-库塔法求 $x(0.2)$和 $y(0.2)$的近似值．比较 $h=0.2$ 和 $h=0.1$ 时所得的结果．用数值求解程序绘出解在 $t=0$ 临域上的图像，$h=0.1$.

7. $x'=2x-y$
   $y'=x$
   $x(0)=6$，$y(0)=2$

8. $x'=x+2y$
   $y'=4x+3y$
   $x(0)=1$，$y(0)=1$

9. $x'=-y+t$
   $y'=x-t$
   $x(0)=-3$，$y(0)=5$

10. $x'=6x+y+6t$
    $y'=4x+3y-10t+4$
    $x(0)=0.5$，$y(0)=0.2$

11. $x'+4x-y'=7t$
    $x'+y'-2y=3t$
    $x(0)=1$，$y(0)=-2$

12. $x'+y'=4t$
    $-x'+y'+y=6t^2+10$
    $x(0)=3$，$y(0)=-1$

9.5　二阶边界值问题

在 9.1～9.3 节中，我们考虑了求解一阶初值问题 $y'=f(x,\ y)$，$y(x_0)=y_0$ 近似解的技巧．在 9.4 节中，我们用这些近似方法求解二阶初值问题 $y''=f(x,\ y,\ y')$，$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=u_0$所改写的一阶微分方程组．现在我们来看两种求解二阶边界值问题 $y''=f(x,\ y,\ y')$，$y(a)=\alpha$，$y(b)=\beta$ 近似解的方法．和二阶初值问题的求解过程不同，解二阶边界值问题不需要把微分方程写成方程组的形式.

有限差分近似　函数 $y(x)$在点 a 处的泰勒级数展开式为

$$y(x)=y(a)+y'(a)\frac{x-a}{1!}+y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+y'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots.$$

如果令 $h=x-a$，那么上式也可以写为

$$y(x)=y(a)+y'(a)\frac{h}{1!}+y''(a)\frac{h^2}{2!}+y'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots.$$

在接下来的讨论中，为了方便，我们也把上面的表达式写为如下的两种形式：

$$y(x+h)=y(x)+y'(x)h+y''(x)\frac{h^2}{2}+y'''(x)\frac{h^3}{6}+\cdots, \tag{1}$$

$$y(x-h)=y(x)-y'(x)h+y''(x)\frac{h^2}{2}-y'''(x)\frac{h^3}{6}+\cdots. \tag{2}$$

若 h 很小，则可以忽略包括 h^4，h^5，…的项，因为这些值很小可以不予考虑. 进一步，若我们忽略掉 h^2 或更高次的项，那么由(1)和(2)分别可以得到导数 $y'(x)$ 的如下近似：

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}[y(x+h)-y(x)] \tag{3}$$

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}[y(x)-y(x-h)]. \tag{4}$$

(1)和(2)相减可以得到

$$y'(x)\approx\frac{1}{2h}[y(x+h)-y(x-h)]. \tag{5}$$

另一方面，如果我们忽略 h^3 或更高次项，那么由(1)和(2)相加可以得到二阶导数 $y''(x)$ 的近似：

$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}[y(x+h)-2y(x)+y(x-h)]. \tag{6}$$

(3)、(4)、(5)和(6)式的右边称为*差商*(difference quotient). 表达式

$$y(x+h)-y(x),y(x)-y(x-h),\quad y(x+h)-y(x-h)$$

以及

$$y(x+h)-2y(x)+y(x-h)$$

称为*有限差分*(finite difference). 特别地，$y(x+h)-y(x)$ 称为*前向差分*(forward difference)，$y(x)-y(x-h)$ 称为*后向差分*(backward difference)，$y(x+h)-y(x-h)$ 和 $y(x+h)-2y(x)+y(x-h)$ 称为*中心差分*(central difference). (5)和(6)给出的结果可以看作是导数 y' 和 y'' 的*中心差分近似*(central difference approximation).

有限差分方法 现在考虑一个线性二阶边界值问题

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x),\quad y(a)=\alpha,y(b)=\beta. \tag{7}$$

假设 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 表示区间$[a, b]$上的一个矩形分割，也就是 $x_i=a+ih$，其中 $i=0, 1, 2, \cdots, n$，$h=(b-a)/n$. 下面给出的点

$$x_1=a+h,x_2=a+2h,\cdots,x_{n-1}=a+(n-1)h$$

称为区间$[a, b]$上的*内部网格点*(interior mesh point). 如果令

$$y_i=y(x_i),P_i=P(x_i),Q_i=Q(x_i),f_i=f(x_i),$$

并且如果(7)中的 y'' 和 y' 用中心差分的近似(5)和(6)代换，那么可得

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+P_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+Q_iy_i=f_i,$$

或化简后得

$$\left(1+\frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1}+(-2+h^2Q_i)y_i+\left(1-\frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1}=h^2f_i. \tag{8}$$

上面最后一个方程就是著名的*有限差分方程*(finite difference equation)，是微分方程的一种近似. 它使我们可以求得(7)式的解 $y(x)$ 在区间$[a, b]$上内部网格点 x_1，x_2，…，x_{n-1} 处的近似

值. 令(8)中的 i 在 1, 2, …, $n-1$ 上取值, 可得到关于 $n-1$ 个未知量 y_1, y_2, …, y_{n-1} 的 $n-1$ 个方程. 请记住我们已经知道 y_0 和 y_n 的值, 因为它们可由边界条件 $y_0=y(x_0)=y(a)=\alpha$ 和 $y_n=y(x_n)=y(b)=\beta$ 给出.

在例 1 中, 我们考虑了一个边界值问题, 使之可以把所得的近似解与用显式解所得到的精确解加以比较.

例 1　有限差分法的使用

令 $n=4$, 利用差分方程(8)去近似边界值问题

$$y''-4y=0, y(0)=0, y(1)=5.$$

解　和(8)式比较后我们可以看出, $P(x)=0$, $Q(x)=-4$, $f(x)=0$, $h=(1-0)/4=1/4$. 因此差分方程为

$$y_{i+1}-2.25y_i+y_{i-1}=0. \tag{9}$$

内部格点为 $x_1=0+1/4$, $x_2=0+2/4$, $x_3=0+3/4$, $i=1, 2, 3$, 由(9)式可得相应于 y_1、y_2 和 y_3 的方程组:

$$\begin{aligned} y_2-2.25y_1+y_0&=0,\\ y_3-2.25y_2+y_1&=0,\\ y_4-2.25y_3+y_2&=0. \end{aligned}$$

代入边界条件 $y_0=0$, $y_4=5$, 则上述方程组变为

$$\begin{aligned} -2.25y_1+y_2&=0,\\ y_1-2.25y_2+y_3&=0,\\ y_2-2.25y_3&=-5. \end{aligned}$$

解方程组可以得到 $y_1=0.7256$, $y_2=1.6327$, $y_3=2.9479$.

所给微分方程的通解为 $y=c_1\cosh 2x+c_2\sinh 2x$. 条件 $y(0)=0$ 意味着 $c_1=0$. 由另一个边界条件可得 c_2. 用这种方法可以得到边界值问题的一个显式解为 $y(x)=(5\sinh 2x)/\sinh 2$. 因此这个解在内部格点的精确值(四舍五入到四位小数)分别如下: $y(0.25)=0.7184$, $y(0.5)=1.6201$, $y(0.75)=2.9354$. ■

例 1 中的近似解可以用更小的 h 来提高其精度. 当然, 作为使用更小 h 的代价则是需要解更大规模的方程组. 请读者证明当 $h=1/8$ 时, $y(0.25)$、$y(0.5)$ 和 $y(0.75)$ 的近似值分别为 0.7202、1.6233 和 2.9386. 请参考练习 9.5 的习题 11.

例 2　有限差分法的使用

令 $n=10$, 利用差分方程(8)求

$$y''+3y'+2y=4x^2, y(1)=1, y(2)=6$$

解的近似值.

解　在本题中, 我们可以看到 $P(x)=3$, $Q(x)=2$, $f(x)=4x^2$, $h=(2-1)/10=0.1$, 因此(8)式可以写为

$$1.15y_{i+1}-1.98y_i+0.85y_{i-1}=0.04x_i^2. \tag{10}$$

内部格点为 $x_1=1.1$, $x_2=1.2$, $x_3=1.3$, $x_4=1.4$, $x_5=1.5$, $x_6=1.6$, $x_7=1.7$, $x_8=1.8$,

$x_9=1.9$. 对 $i=1, 2, \cdots, 9$, $y_0=1$, $y_{10}=6$，由(10)可得含有九个未知变量的九个方程：

$$\begin{aligned}
1.15y_2-1.98y_1 &= -0.8016,\\
1.15y_3-1.98y_2+0.85y_1 &= 0.0576,\\
1.15y_4-1.98y_3+0.85y_2 &= 0.0676,\\
1.15y_5-1.98y_4+0.85y_3 &= 0.0784,\\
1.15y_6-1.98y_5+0.85y_4 &= 0.0900,\\
1.15y_7-1.98y_6+0.85y_5 &= 0.1024,\\
1.15y_8-1.98y_7+0.85y_6 &= 0.1156,\\
1.15y_9-1.98y_8+0.85y_7 &= 0.1296,\\
-1.98y_9+0.85y_8 &= -6.7556.
\end{aligned}$$

我们可以借助计算机代数系统中的高斯消元法或相关的消元法解这个大型的方程组. 所得到的结果为 $y_1=2.4047$, $y_2=3.4432$, $y_3=4.2010$, $y_4=4.7469$, $y_5=5.1359$, $y_6=5.4124$, $y_7=5.6117$, $y_8=5.7620$, $y_9=5.8855$. ■

打靶法 另一种求解边界值问题 $y''=f(x, y, y')$, $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$ 近似解的方法称为*打靶法*(shooting method). 这个方法的起始点是用初值问题

$$y''=f(x,y,y'),y(a)=\alpha,y'(a)=m_1 \tag{11}$$

代替边界值问题. (11)中的 m_1 只是解曲线在已知点(a, $y(a)$)处的未知斜率的一种近似. 我们对(11)中的二阶方程应用一种逐步数值方法，以此来求解 $y(b)$的近似值 β_1. 如果 β_1 在预先给定的误差范围内和已给的值 $y(b)=\beta$ 一致，那么停止计算；否则重新计算，用另外一个不同的近似值 $y'(a)=m_2$，然后得到 $y(b)$的第二个近似值 β_2. 这种试错的方式可以不断地计算，或者说往后的斜率 m_3, m_4, …. 可以用某种系统化的方法加以调整；当(11)中的微分方程是线性方程时，线性插值是最为适用的方法. 这个过程类似于打靶(通过初始斜率的选择)，直到靶心 $y(b)$被击中. 请参考练习 9.5 的习题 14.

当然，这些数值方法的使用是基于边界值问题的解总存在这样的假设，但是这个假设不会总成立.

注 有限差分的近似方法可以扩展到已知边界上一阶导数的边界值问题，例如，$y''=f(x, y, y')$, $y'(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$. 请参考练习 9.5 的习题 13.

练习 9.5

在习题 1～10 中，用有限差分法和所给的 n 值求解边界值问题的近似解.

1. $y''+9y=0$, $y(0)=4$, $y(2)=1$; $n=4$
2. $y''-y=x^2$, $y(0)=0$, $y(1)=0$; $n=4$
3. $y''+2y'+y=5x$, $y(0)=0$, $y(1)=0$; $n=5$
4. $y''-10y'+25y=1$, $y(0)=1$, $y(1)=0$; $n=5$
5. $y''-4y'+4y=(x+1)e^{2x}$, $y(0)=3$, $y(1)=0$; $n=6$
6. $y''+5y'=4\sqrt{x}$, $y(1)=1$, $y(2)=-1$; $n=6$
7. $x^2y''+3xy'+3y=0$, $y(1)=5$, $y(2)=0$; $n=8$
8. $x^2y''-xy'+y=\ln x$, $y(1)=0$, $y(2)=-2$; $n=8$

9. $y''+(1-x)y'+xy=x$，$y(0)=0$，$y(1)=2$；$n=10$

10. $y''+xy'+y=x$，$y(0)=1$，$y(1)=0$；$n=10$

11. 在例 1 中，令 $n=8$，解之.

12. 在两个同心的、半径分别为 $r=1$ 和 $r=4$ 的球体之间，静电势由下式决定

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2du}{rdr}=0, u(1)=50, u(4)=100.$$

用本节的方法求边界值问题的近似解，$n=6$.

13. 考虑边界值问题 $y''+xy=0$，$y'(0)=1$，$y(1)=-1$.

(a)写出微分方程对应的差分方程. 证明对 $i=0, 1, 2, \cdots, n-1$，由差分方程可以得到 n 个方程，其中含有 $n+1$ 个未知量 y_{-1}，y_0，y_1，y_2，$\cdots$，y_{n-1}. 这里 y_{-1} 和 y_0 是未知的，因为 y_{-1} 表示 y 在外部点 $x=-h$ 处的近似值，y_0 不是 $x=0$ 处的值.

(b)利用中心差分(5)证明 $y_1-y_{-1}=2h$. 用这个方程把 y_{-1} 从(a)中的方程组中消去.

(c)利用(a)和(b)中的方程组求初始边界值问题的近似解，$n=5$.

计算机实验作业

14. 考虑边界值问题 $y''=y'-\sin(xy)$，$y(0)=1$，$y(1)=1.5$. 利用打靶法求这个问题的近似解.（精确近似值可以用数值技巧求得，即四阶龙格-库塔法，令 $h=0.1$；或者甚至更好的，如果有条件使用 CAS，比如 Mathematica 或 Maple，可以用其中的 **NDSolve** 函数.）

第 9 章复习题

在习题 1～4 中构造一个表格，比较用欧拉方法、改进的欧拉方法以及龙格-库塔法计算的 $y(x)$ 值. 计算保留四位小数. 依次令 $h=0.1$，$h=0.05$.

1. $y'=2\ln xy$，$y(1)=2$；
$y(1.1)$，$y(1.2)$，$y(1.3)$，$y(1.4)$，$y(1.5)$

2. $y'=\sin x^2+\cos y^2$，$y(0)=0$；
$y(0.1)$，$y(0.2)$，$y(0.3)$，$y(0.4)$，$y(0.5)$

3. $y'=\sqrt{x+y}$，$y(0.5)=0.5$；
$y(0.6)$，$y(0.7)$，$y(0.8)$，$y(0.9)$，$y(1.0)$

4. $y'=xy+y^2$，$y(1)=1$；
$y(1.1)$，$y(1.2)$，$y(1.3)$，$y(1.4)$，$y(1.5)$

5. 用欧拉方法求 $y(0.2)$ 的近似值，其中 $y(x)$ 是初值问题 $y''-(2x+1)y=1$，$y(0)=3$，$y'(0)=1$ 的解. 先用单步法计算，令 $h=0.2$，再用两步法计算，令 $h=0.1$.

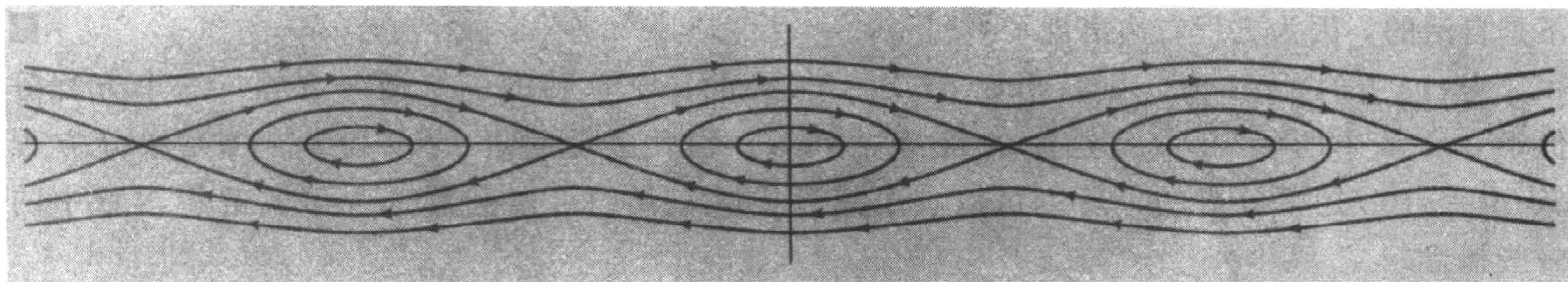
6. 用亚当斯-巴什福思/亚当斯-莫尔顿方法求 $y(0.4)$ 的近似值，其中 $y(x)$ 是初值问题 $y'=4x-2y$，$y(0)=2$ 的解. 用龙格-库塔法求 y_1、y_2 和 y_3 的值，$h=0.1$.

7. 用欧拉方法求 $x(0.2)$ 和 $y(0.2)$ 的近似值，其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是初值问题

$$x'=x+y$$
$$y'=x-y,$$
$$x(0)=1, y(0)=2.$$

的解，$h=0.1$.

8. 用有限差分法求边界值问题 $y''+6.55(1+x)y=1$，$y(0)=0$，$y(1)=0$ 的近似解，$n=10$.



非线性钟摆模型的相图；见图 10.28

第 10 章　平面自治方程组及稳定性

在第 8 章中，我们利用矩阵求解形如 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{F}(t)$ 的线性一阶微分方程组．当一个微分方程组不是线性时，通常不可能求出其初等函数解．在本章中我们将证明，首先通过分析方程组特殊的常数解，即临界点，然后寻找周期解，可以获得解在几何性质上的有用信息．我们还将通过一些物理学和生态学的例子介绍并阐述稳定性这一重要概念．

10.1　自治方程组、临界点及周期解

在 2.1 节中我们介绍了自治一阶微分方程、自治微分方程的临界点以及临界点的稳定性．早先对稳定性的考虑相当直观；现在我们给出这一概念的精确定义．为此需要研究由一阶微分方程组成的自治方程组．在本节我们将定义由两个一阶微分方程组成的自治方程组的临界点；自治方程组可以是线性或非线性的．

自治方程组　由一阶微分方程组成的方程组称为是*自治的*(autonomous)，如果它可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=g_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}&=g_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\\ &\ \ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}&=g_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n).\end{aligned}\tag{1}$$

注意独立变量 t 并没有显式地出现在每个微分方程的右边．请将(1)与 8.1 节中的(2)给出的一般方程组进行比较．

例 1　非自治方程组

微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1-3x_2+t^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=tx_1\sin x_2$$

不是自治的，因为方程右边出现了 t^2 和 tx_1. ■

当(1)中的 $n=1$ 时，则有形如 $dx/dt=g(x)$ 的一个单独的一阶微分方程. 这个方程等价于 2.1 节中的(1)，只是这里的符号 x 和 t 分别代表了那里的 y 和 x. 因为微分方程 $dx/dt=g(x)$ 是可分离的，所以可以求出其显式解，我们可以利用这一事实解释本章中的一些概念.

二阶微分方程组 任何一个二阶微分方程 $x''=g(x, x')$ 都可写为一个自治方程组. 如在 4.9 节中所做的，若令 $y=x'$，则 $x''=g(x, x')$ 变为 $y'=g(x, y)$. 这样二阶微分方程变为由两个一阶方程组成的方程组

$$x' = y,$$
$$y' = g(x,y).$$

例 2 钟摆的自治微分方程组

在 5.3 节的(6)中我们证明了钟摆的偏移角 θ 满足非线性二阶微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

若令 $x=\theta$，$y=\theta'$，则这个二阶微分方程可写成自治方程组

$$x' = y,$$
$$y' =-\frac{g}{l}\sin x.$$ ■

记号 如果 $\mathbf{X}(t)$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 分别表示列向量

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{X})=\begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix},$$

那么自治方程组(1)可简写为*列向量形式*(column vector form) $\mathbf{X}'=\mathbf{g}(\mathbf{X})$. 在 8.2 节中研究的齐次线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 是一种重要的特殊情况.

在本章中利用行向量简写(1)式也显得比较方便. 如果令

$$\mathbf{X}(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$$

和

$$\mathbf{g}(\mathbf{X})=(g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)),$$

那么自治方程组(1)也可简写为*行向量形式*(row vector form) $\mathbf{X}'=\mathbf{g}(\mathbf{X})$. 在后面的具体内容中我们会很清楚应该使用列向量还是行向量形式，所以就不区别 $\mathbf{X}$ 及 $\mathbf{X}$ 的转置 $\mathbf{X}^T$ 了. 特别地，当 $n=2$ 时，利用行向量可以很方便地将初值条件写成 $\mathbf{X}(0)=(x_0, y_0)$.

如果变量 t 表示时间，那么可以将微分方程组(1)看成*动力系统*(dynamical system)，且其解 $\mathbf{X}(t)$ 为 t 时刻的*系统状态*(state of the system)或*系统响应*(response of the system). 根据这些术语，当变化率 $\mathbf{X}'(t)$ 仅依赖于系统当前状态 $\mathbf{X}(t)$ 时，动力系统是自治的. 第 8 章中研究的方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{F}(t)$ 在 $\mathbf{F}(t)$ 为常数时就是自治的. 在 $n=2$ 或 3 的情况下，称方程组的解为

路径(path)或轨迹(trajectory)，因为可以将 $x=x_1(t)$，$y=x_2(t)$，$z=x_3(t)$作为一条曲线的参数方程.

向量场的解释 当 $n=2$ 时，(1)中的方程组被称为平面自治方程组(plane autonomous system)，可以将其写成

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,\ y)\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,\ y).\end{aligned} \tag{2}$$

向量 $\mathbf{V}(x,\ y)=(P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$在平面某区域内定义了一个向量场(vector field)，而方程组的解可解释为是质点通过该区域的路径. 更具体一些，令 $\mathbf{V}(x,\ y)=(P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$表示水流在$(x,\ y)$处的速度，并假设一个小物体(如软木塞)在位置$(x_0,\ y_0)$处放入水流. 如果 $\mathbf{X}(t)=(x(t),\ y(t))$表示物体在 t 时刻的位置，那么 $\mathbf{X}'(t)=(x'(t),\ y'(t))$就是速度向量$\boldsymbol{v}$. 当无外力影响且忽略摩擦力时，物体在 t 时刻的速度就是水流在位置 $\mathbf{X}(t)$的速度：

$$\mathbf{X}'(t)=\mathbf{V}(x(t),\ y(t))\ 或\ \begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x(t),\ y(t))\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x(t),\ y(t)).\end{aligned}$$

所以物体运动的路径就是方程组满足初值条件 $\mathbf{X}(0)=(x_0,\ y_0)$的解. 我们将经常用对平面自治方程组的这一简单解释来阐述一些新概念.

例 3 **向量场的平面自治方程组**

水流从一个半径为 1 的圆周围流过，形成一个稳定状态的向量场，可表述为

$$\mathbf{V}(x,\ y)=V_0\left(1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

其中 V_0是水流离圆较远时的速度. 如果一个小软木塞在$(-3,\ 1)$处释放，那么它的路径 $\mathbf{X}(t)=(x(t),\ y(t))$满足平面自治方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=V_0\left(1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),\\ \frac{dy}{dt}&=V_0\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right),\end{aligned}$$

初值条件为 $\mathbf{X}(0)=(-3,\ 1)$. 请参考图 10.1. ■

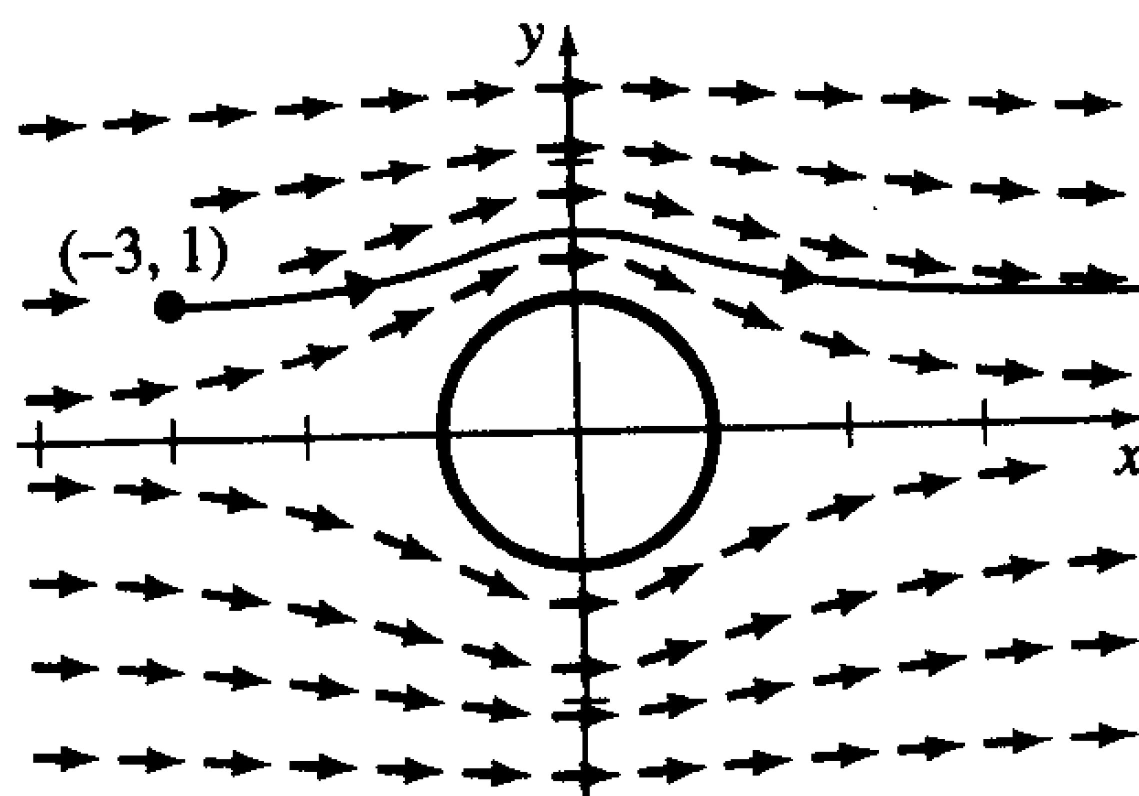


图 10.1

解的类型 如果 $P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$及其一阶偏导数 $\partial P/\partial x$、$\partial P/\partial y$、$\partial Q/\partial x$ 和 $\partial Q/\partial y$ 在平面的某区域 R 内连续，那么平面自治方程组(2)满足 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$的解唯一且属于以下三种基本类型之一：

(i)常数解(constant solution)$x(t)=x_0$，$y(t)=y_0$(或对所有的 t，$\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}_0$). 常数解称为临界点(critical point)或不动点(stationary point). 当质点处于临界点

$\mathbf{X}_0$(即 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$)处时，它会无限期地停留在那里. 因此常数解也称为均衡解(equilibrium solution). 注意到因为 $\mathbf{X}'(t)=\mathbf{0}$，所以临界点是代数方程组

$$\begin{cases} P(x, y)=0 \\ Q(x, y)=0 \end{cases}$$

的解.

(ⅱ)解 $x=x(t)$，$y=y(t)$定义了一段弧(arc)，即平面内不与自己相交的曲线. 所以图 10.2(a)中的曲线可作为平面自治方程组的解，而图 10.2(b)中的曲线则不行，因为它有两个始于交叉点 $\boldsymbol{P}$ 的解.

(ⅲ)周期解(periodic solution)$x=x(t)$，$y=y(t)$. 周期解也称为循环解(cycle). 若 p 是解的周期，则 $\mathbf{X}(t+p)=\mathbf{X}(t)$且曲线上处于 $\mathbf{X}_0$的质点将沿曲线运动并在 p 的整数倍时回到 X_0. 请参考图 10.3.

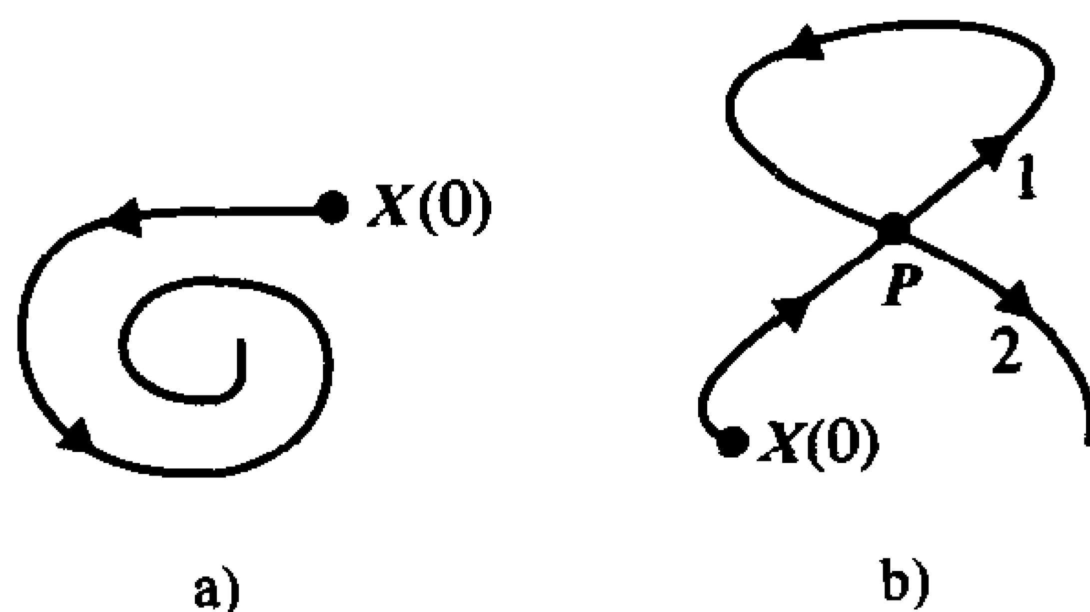


图 10.2

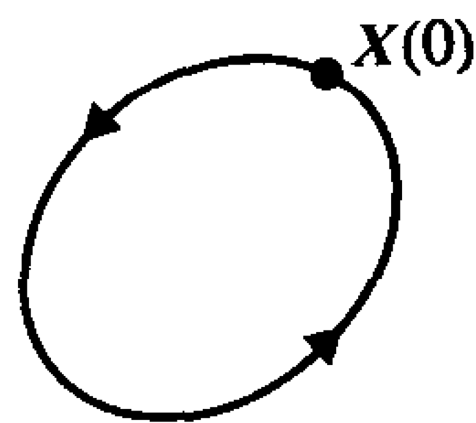


图 10.3

例 4 求临界点

求出以下各平面自治方程组的所有临界点：

(a) $\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=x-y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'=x^2+y^2-6 \\ y'=x^2-y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x'=0.01x(100-x-y) \\ y'=0.05y(60-y-0.2x) \end{cases}$.

解 通过令微分方程右边的部分为 0 可以求出临界点.

(a)方程组

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

的解构成了直线 $y=x$ 的所有点. 所以它有无限多个临界点.

(b)为求解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-6=0 \\ x^2-y=0 \end{cases}$$

的临界点，我们将第二个方程 $x^2=y$ 代入第一个方程得 $y^2+y-6=(y+3)(y-2)=0$. 若 $y=-3$，则 $x^2=-3$，无实数解. 若 $y=2$，则 $x=\pm\sqrt{2}$，所以临界点为 $(\sqrt{2},2)$ 和 $(-\sqrt{2},2)$.

(c)求(c)的临界点需要仔细考虑两种情况. 方程 $0.01x(100-x-y)=0$ 意味着

$$x=0 \text{ 或 } x+y=100 .$$

若 $x=0$，则将其代入 $0.05y(60-y-0.2x)=0$，得 $y(60-y)=0$，所以 $y=0$ 或 $y=60$. 这

种情况下(0，0)和(0，60)为临界点.

若 $x+y=100$，则 $0=y(60-y-0.2(100-y))=y(40-0.8y)$，所以 $y=0$ 或 $y=50$，这种情况下(100，0)和(50，50)为临界点. ■

当平面自治方程组是线性方程组时，可以利用第 8 章中的方法来求解.

例 5　求周期解

确定所给线性方程组是否有周期解：

(a) $\begin{cases} x'=2x+8y \\ y'=-x-2y \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=-\dfrac{1}{2}x+y \end{cases}$

在每种情况下给出满足 $\boldsymbol{X}(0)=(2,\ 0)$的解的图像.

解　(a)在 8.2 节的例 6 中我们利用特征值-特征向量方法证明了

$$\begin{cases} x=c_1(2\cos 2t-2\sin 2t)+c_2(2\cos 2t+2\sin 2t) \\ y=c_1(-\cos 2t)-c_2\sin 2t\ . \end{cases}$$

所以每个解都是周期性的且周期 $p=\pi$. 满足 $\boldsymbol{X}(0)=(2,\ 0)$的解为

$$x=2\cos 2t+2\sin 2t,\quad y=-\sin 2t.$$

由这个解可以生成如图 10.4(a)所示的椭圆图像.

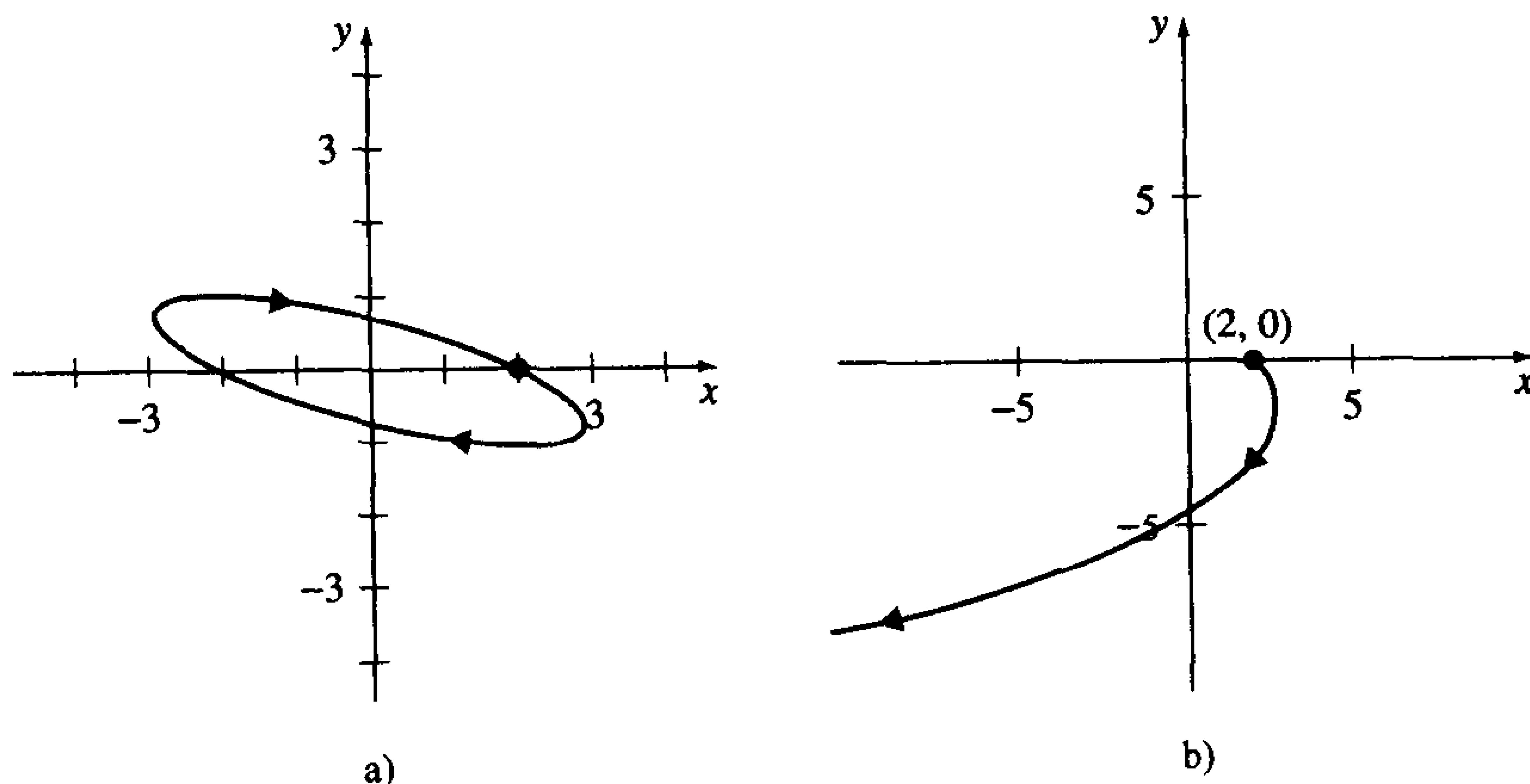


图　10.4

(b)利用特征值-特征向量方法，可得

$$x=2c_1e^t\cos t+2c_2e^t\sin t,\quad y=-c_1e^t\sin t+c_2e^t\cos t.$$

由于通解中出现了 e^t，所以没有周期解(即循环解). 满足 $\boldsymbol{X}(0)=(2,\ 0)$的解为

$$x=2e^t\cos t,\quad y=-e^t\sin t,$$

解曲线的图像如图 10.4(b)所示. ■

转换成极坐标　除了常数解外，通常无法求得非线性自治方程组解的显式表达式. 然而可以用极坐标求解一些非线性方程组. 由公式 $r^2=x^2+y^2$ 和 $\theta=\tan^{-1}(y/x)$，可得

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{r}\left(x\dfrac{dx}{dt}+y\dfrac{dy}{dt}\right)\\ \dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{r^2}\left(-y\dfrac{dx}{dt}+x\dfrac{dy}{dt}\right).\end{cases} \tag{3}$$

有时可以利用(3)式将直角坐标系下的平面自治方程组转换成极坐标系下相对简单一些的方程组.

例 6 转换成极坐标系

求出非线性平面自治方程组

$$\begin{cases}x'=-y-x\sqrt{x^2+y^2}\\ y'=x-y\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

满足初值条件 $\mathbf{X}(0)=(3,3)$ 的解.

解 将表达式中的 dx/dt 和 dy/dt 用(3)中的 dr/dt 和 $d\theta/dt$ 替换，可得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}[x(-y-xr)+y(x-yr)]=-r^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r^2}[-y(-y-xr)+x(x-yr)]=1.$$

因为(3，3)在极坐标系下的坐标为 $(3\sqrt{2},\pi/4)$，所以初值条件 $\mathbf{X}(0)=(3,3)$ 变为 $r(0)=3\sqrt{2}$ 和 $\theta(0)=\pi/4$. 利用变量分离法可求得方程组的解为

$$r=\frac{1}{t+c_1},\ \theta=t+c_2.$$

对于 $r\neq 0$(检验这一点)，应用初值条件得

$$r=\frac{1}{t+\sqrt{2}/6},\ \theta=t+\frac{\pi}{4}.$$

螺旋线 $r=\dfrac{1}{\theta+\sqrt{2}/6-\pi/4}$ 的图像如图 10.5 所示. ■

例 7 极坐标系中的解

一平面自治方程组在极坐标系下可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=0.5(3-r)\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1.\end{cases}$$

在直角坐标系下求出其满足 $\mathbf{X}(0)=(0,1)$ 和 $\mathbf{X}(0)=(3,0)$ 的解，并绘出其图像.

解 对 $dr/dt=0.5(3-r)$ 利用变量分离法，并对 $d\theta/dt$ 积分可求得解

$$r=3+c_1e^{-0.5t},\theta=t+c_2.$$

若 $\mathbf{X}(0)=(0,1)$，则 $r(0)=1$ 且 $\theta(0)=\pi/2$，因此有 $c_1=-2$，$c_2=\pi/2$. 解曲线为螺线 $r=3-2e^{-0.5(\theta-\pi/2)}$. 注意当 $t\to+\infty$ 时，θ 无限增大且 r 趋近于 3.

若 $\mathbf{X}(0)=(3,0)$，则 $r(0)=3$ 且 $\theta(0)=0$，所以 $c_1=c_2=0$，$r=3$，$\theta=t$. 所以 $x=r\cos\theta=3\cos t$，$y=r\sin\theta=3\sin t$，解是周期性的. 这个解构造了一个以(0，0)为中心，半径为 3 的圆. 这两个解的图像如图 10.6 所示. ■

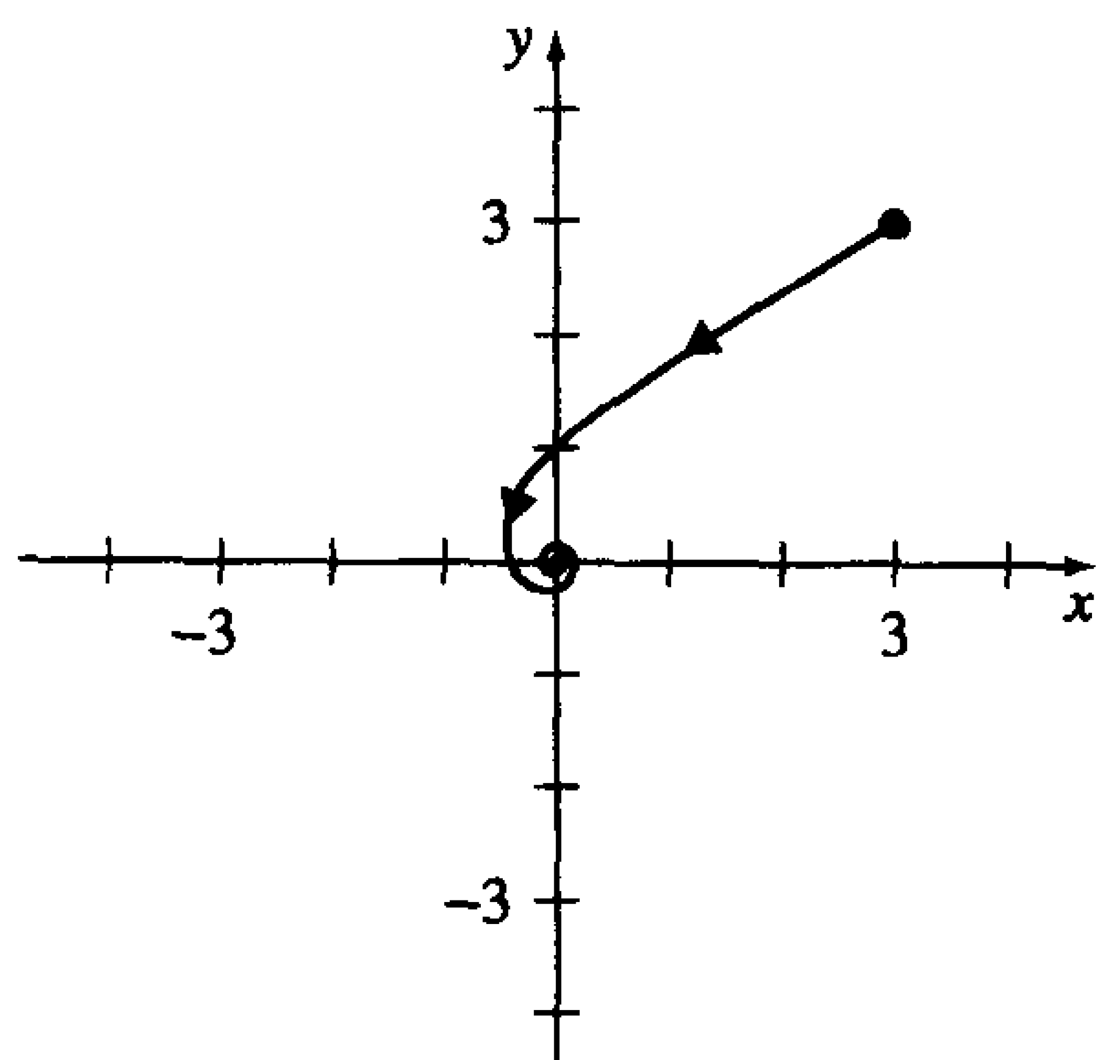


图 10.5

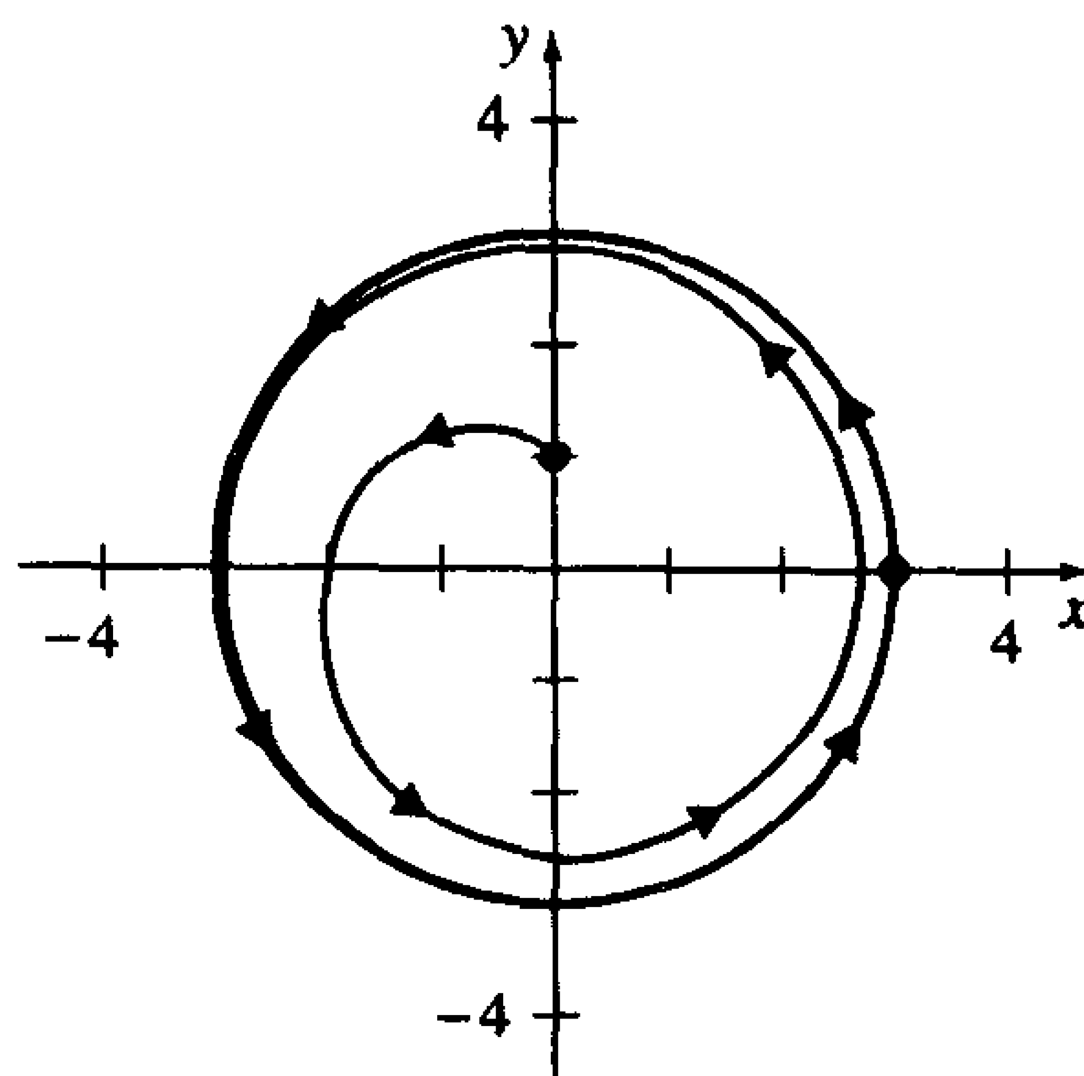


图 10.6

练习 10.1

在习题 1～6 中，将所给的非线性二阶微分方程改写为平面自治方程组. 求出所得方程组的所有临界点.

1. $x''+9\sin x=0$
2. $x''+(x')^2+2x=0$
3. $x''+x'(1-x^3)-x^2=0$
4. $x''+4\dfrac{x}{1+x^2}+2x'=0$
5. $x''+x=\varepsilon x^3$，$\varepsilon>0$
6. $x''+x-\varepsilon x|x|=0$，$\varepsilon>0$

在习题 7～16 中，求出所给平面自治方程组的所有临界点.

7. $x'=x+xy$
   $y'=-y-xy$
8. $x'=y^2-x$
   $y'=x^2-y$
9. $x'=3x^2-4y$
   $y'=x-y$
10. $x'=x^3-y$
    $y'=x-y^3$
11. $x'=x\left(10-x-\dfrac{1}{2}y\right)$
    $y'=y(16-y-x)$
12. $x'=-2x+y+10$
    $y'=2x-y-15\dfrac{y}{y+5}$
13. $x'=x^2e^y$
    $y'=y(e^x-1)$
14. $x'=\sin y$
    $y'=e^{x-y}-1$
15. $x'=x(1-x^2-3y^2)$
    $y'=y(3-x^2-3y^2)$
16. $x'=-x(4-y^2)$
    $y'=4y(1-x^2)$

在习题 17～22 中，所给线性方程组都来源于练习 8.2.

(a)求出通解并确定是否存在周期解.

(b)求出满足给定初值条件的解.

(c)借助图像计算器和计算机软件绘出(b)中解的图像并指出曲线运动的方向.

17. $x'=x+2y$
    $y'=4x+3y$，$\mathbf{X}(0)=(2,\ -2)$　　　　(练习 8.2，习题 1)
18. $x'=-6x+2y$
    $y'=-3x+y$，$\mathbf{X}(0)=(3,\ 4)$　　　　(练习 8.2，习题 6)
19. $x'=4x-5y$

$y'=5x-4y$，$\mathbf{X}(0)=(4,\ 5)$ （练习 8.2，习题 37）

20. $x'=x+y$

$y'=-2x-y$，$\mathbf{X}(0)=(-2,\ 2)$ （练习 8.2，习题 34）

21. $x'=5x+y$

$y'=-2x+3y$，$\mathbf{X}(0)=(-1,\ 2)$ （练习 8.2，习题 35）

22. $x'=x-8y$

$y'=x-3y$，$\mathbf{X}(0)=(2,\ 1)$ （练习 8.2，习题 38）

在习题 23～26 中，通过转换极坐标系求解所给的非线性平面自治方程组．描述满足所给初值条件的解的几何性质．

23. $x'=-y-x(x^2+y^2)^2$

$y'=x-y(x^2+y^2)^2$，$\mathbf{X}(0)=(4,\ 0)$

24. $x'=y+x(x^2+y^2)$

$y'=-x+y(x^2+y^2)$，$\mathbf{X}(0)=(4,\ 0)$

25. $x'=-y+x(1-x^2-y^2)$

$y'=x+y(1-x^2-y^2)$，$\mathbf{X}(0)=(1,\ 0)$，$\mathbf{X}(0)=(2,\ 0)$

[提示：得到的关于 r 的微分方程是一个伯努利微分方程．请参考 2.5 节．]

26. $x'=y-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(4-x^2-y^2)$

$y'=-x-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(4-x^2-y^2)$，$\mathbf{X}(0)=(1,\ 0)$，$\mathbf{X}(0)=(2,\ 0)$

如果平面自治方程组有周期解，那么在由这个解生成的曲线内至少存在一个临界点．在习题 27～30 中利用这一事实，并使用数值求解程序讨论周期解存在的可能性．

27. $x'=-x+6y$

$y'=xy+12$

28. $x'=-x+6xy$

$y'=-8xy+2y$

29. $x'=y$

$y'=y(1-3x^2-2y^2)-x$

30. $x'=xy$

$y'=-1-x^2-y^2$

31. 如果 $z=f(x,\ y)$ 是区域 R 内具有连续一阶偏导数的函数，那么在 R 内的流体 $\mathbf{V}(x,\ y)=(P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$ 可通过令 $P(x,\ y)=-\partial f/\partial y$ 和 $Q(x,\ y)=\partial f/\partial x$ 来定义．证明如果 $\mathbf{X}(t)=(x(t),\ y(t))$ 是平面自治方程组(2)的解，那么对于某个常数 c 有 $f(x(t),\ y(t))=c$ 成立．这样解曲线就在 f 的等量线上．[提示：利用链式法则计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t),\ y(t))$．]

10.2 线性方程组的稳定性

在 10.1 节中，注意到平面自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\end{cases}$$

引出了向量场 $\mathbf{V}(x,\ y)=(P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$，它的解 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ 可以解释为初始时刻位于点 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$ 的质点所经过的路径．如果 $\mathbf{X}_0$ 是临界点，那么质点保持不动．在本节中，我们将研究当 $\mathbf{X}_0$ 是方程组临界点邻域内的点时解的性态．

一些基本问题 假设 $\boldsymbol{X}_1$ 是自治方程组的临界点，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是方程组满足 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ 的解. 如果解是运动质点所通过的路径，那么当 $\boldsymbol{X}_0$ 在 $\boldsymbol{X}_1$ 的临域内时，我们对以下问题感兴趣：

（ⅰ）质点会回到临界点吗？更准确地说，是否有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_1$？

（ⅱ）如果质点不会回到临界点，那么它会在临界点周围运动还是会远离临界点？有另外几种可能，例如，质点围绕临界点做圆周运动，或会回到另一个临界点，或根本没有临界点，请参考图 10.7.

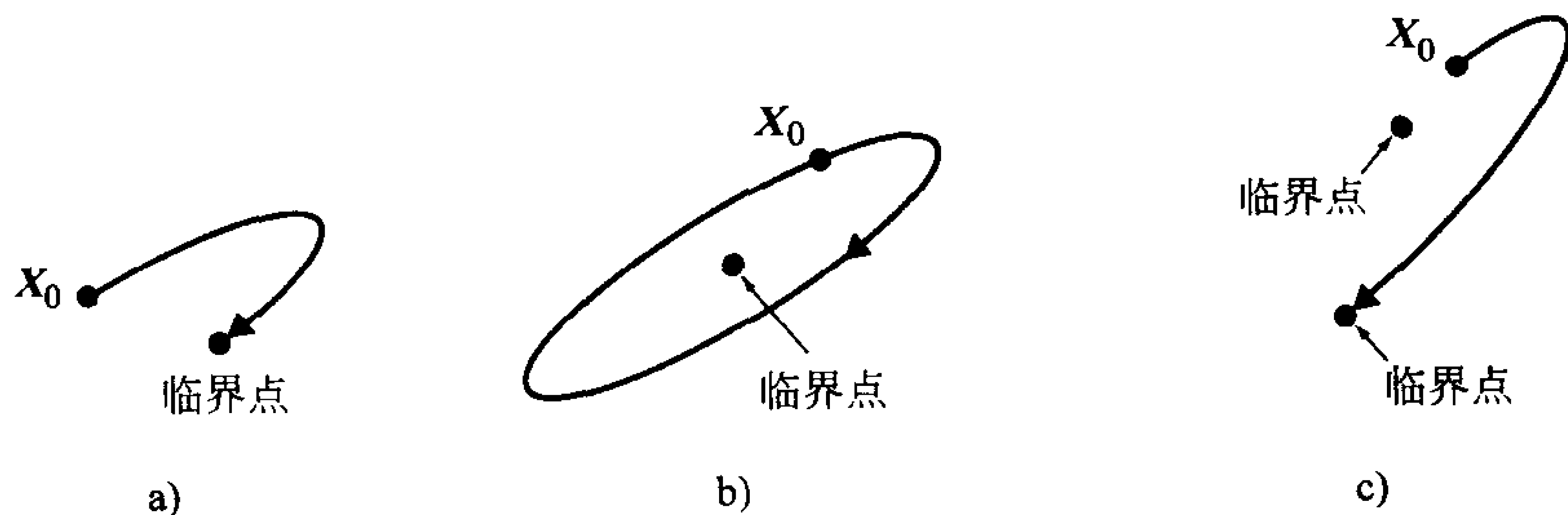


图 10.7

如果在临界点的某邻域内总会发生如图 10.7(a)或(b)的情况，则称该临界点是*局部稳定的*(locally stable). 然而如果在初值点 $\boldsymbol{X}_0$ 的任意邻域内，总会发生类似于(c)的情况，则称该临界点是*不稳定的*(unstable). 在 10.3 节中我们将研究非线性方程组的问题(ⅰ)和(ⅱ)，并给出更精确的概念.

稳定性分析 我们首先对线性平面自治方程组研究这两个稳定性问题，并为 10.3 节打下基础. 第 8 章中的解法使我们能够用系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量对

$$\begin{aligned} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{aligned} \tag{1}$$

的解进行几何性质的分析. 为确定 $\boldsymbol{X}_0=(0,\ 0)$ 是其唯一的临界点，假设行列式 $\Delta=ad-bc\neq0$. 若 $\tau=a+d$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的轨迹[⊖]，则特征方程 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ 可以写成

$$\lambda^2-\tau\lambda+\Delta=0.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=(\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta})/2$，根据 $\tau^2-4\Delta$ 为正、为负或等于 0 可分为三种情形. 在下一个例子中我们利用数值求解程序来研究解相应于这些情况的性质.

例 1 特征值与解的形状

求出线性方程组

$$\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=cx-y \end{cases}$$

⊖ 一般地，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 的轨迹是主对角线上元素之和.

的特征值. 考虑 c 的值, 利用数值求解程序研究当 $c=1/4$, 4, 0, 及 -9 的情况时, 解的图像.

解 系数矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ 的轨迹为 $\tau=-2$, 行列式 $\Delta=1-c$, 特征值为

$$\lambda=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1-c)}}{2}=-1\pm\sqrt{c}.$$

所以特征值的性质由 c 的符号决定.

若 $c=1/4$, 则有两个不同的负特征值 $\lambda=-1/2$ 和 $\lambda=-3/2$. 在图 10.8(a)中, 利用数值求解程序生成了相应于各个初值条件的解曲线或轨迹. 注意到除了图中黑线标出的轨迹外, 其他轨迹都按照固定的方向趋近于 **0**. 回顾第 8 章中 xy 平面内的轨迹集合, 或相平面(phase plane), 它称为方程组的相图(phase portrait).

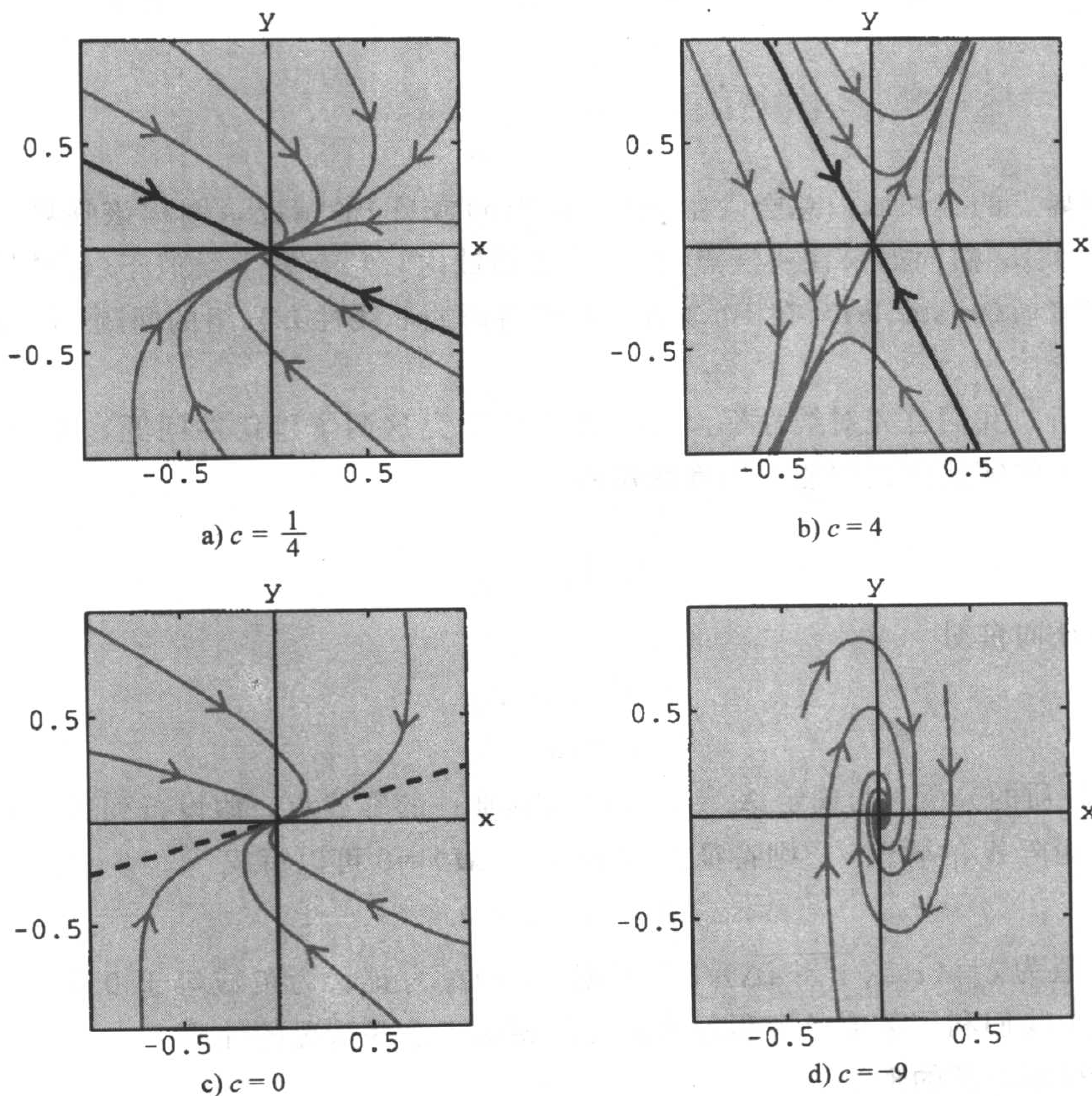


图 10.8

当 $c=4$ 时, 有异号特征值 $\lambda=1$ 和 -3, 这时出现一个有趣的现象. 除了图 10.8(b)中始于黑色直线上的解外, 其余轨迹都按照固定方向远离原点. 我们曾在图 8.2 所示的相图中看到过这样的现象. 读者可以利用数值求解程序验证这些结果.

若选择 $c=0$，则可以得到唯一的实特征值 $\lambda=-1$. 这种情况与 $c=1/4$ 的情况很类似，但也有明显的不同. 图 10.8(c)中的所有解曲线按一固定方向随着 t 的增大而趋近于 0.

最后，当 $c=-9$ 时，$\lambda=-1\pm\sqrt{-9}=-1\pm 3i$，特征值为一对实部为 -1 的共轭复数. 图 10.8(d)显示了螺线随着 t 的增大而趋近于原点. ■

例 1 的图 10.8 给出的 4 个相图中，轨迹的性态可以用第 8 章中的特征值-特征向量解法来解释.

情形 Ⅰ：不同的实特征值($\tau^2-4\Delta>0$)

根据 8.2 节中的定理 8.7，(1)的通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=c_1\boldsymbol{K}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{K}_2e^{\lambda_2 t}, \tag{2}$$

其中 λ_1 和 λ_2 为特征值，$\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 为相应的特征向量. 注意 $\boldsymbol{X}(t)$ 也可以写成

$$\boldsymbol{X}(t)=e^{\lambda_1 t}[c_1\boldsymbol{K}_1+c_2\boldsymbol{K}_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}]. \tag{3}$$

(a)两个特征值都为负($\tau^2-4\Delta>0$，$\tau<0$，且 $\Delta>0$)

稳定点($\lambda_2<\lambda_1<0$)：因为两个特征值都为负，由(2)可知 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{0}$. 若假设 $\lambda_2<\lambda_1$，则 $\lambda_2-\lambda_1<0$，所以 $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ 是指数递减函数. 所以由(3)知，当 t 的值很大时 $\boldsymbol{X}(t)\approx c_1\boldsymbol{K}_1e^{\lambda_1 t}$. 当 $c_1\neq 0$ 时，$\boldsymbol{X}(t)$ 会从由相应于 λ_1 的特征向量 $\boldsymbol{K}_1$ 决定的两个方向之一趋近于 $\boldsymbol{0}$. 如果 $c_1=0$，那么有 $\boldsymbol{X}(t)=c_2\boldsymbol{K}_2e^{\lambda_2 t}$，且 $\boldsymbol{X}(t)$ 沿特征向量 $\boldsymbol{K}_2$ 决定的直线趋近于 $\boldsymbol{0}$. 图 10.9 给出了原点周围解曲线的集合. 当两个特征值都为负时，相应的临界点称为稳定点(stable node).

(b)两个特征值都为正($\tau^2-4\Delta>0$，$\tau>0$，且 $\Delta>0$)

不稳定点($0<\lambda_2<\lambda_1$)：对这种情况的分析与(a)类似. 还是由(2)可得，$\boldsymbol{X}(t)$ 随着 t 的增加而无限增大. 进一步再假设 $\lambda_2<\lambda_1$，并利用(3)，$\boldsymbol{X}(t)$ 沿着由特征向量 $\boldsymbol{K}_1$ 决定的两个方向之一(当 $c_1\neq 0$ 时)或沿由特征向量 $\boldsymbol{K}_2$ 决定的直线(当 $c_1=0$ 时)变为无穷大. 图 10.10 给出了一个典型的解曲线集合. 当两个特征值都为正时，相应的临界点称为不稳定点(unstable node).

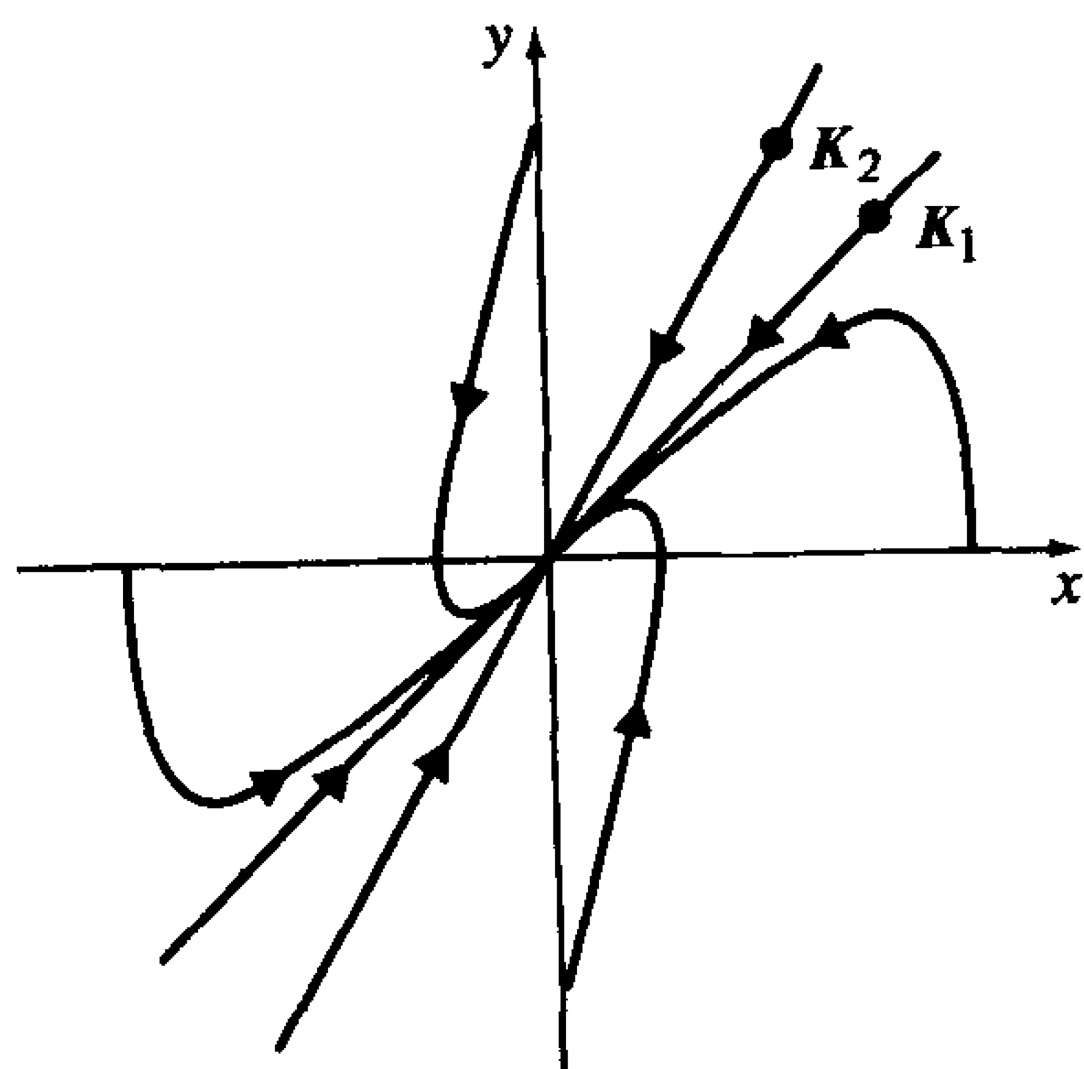


图 10.9 稳定点

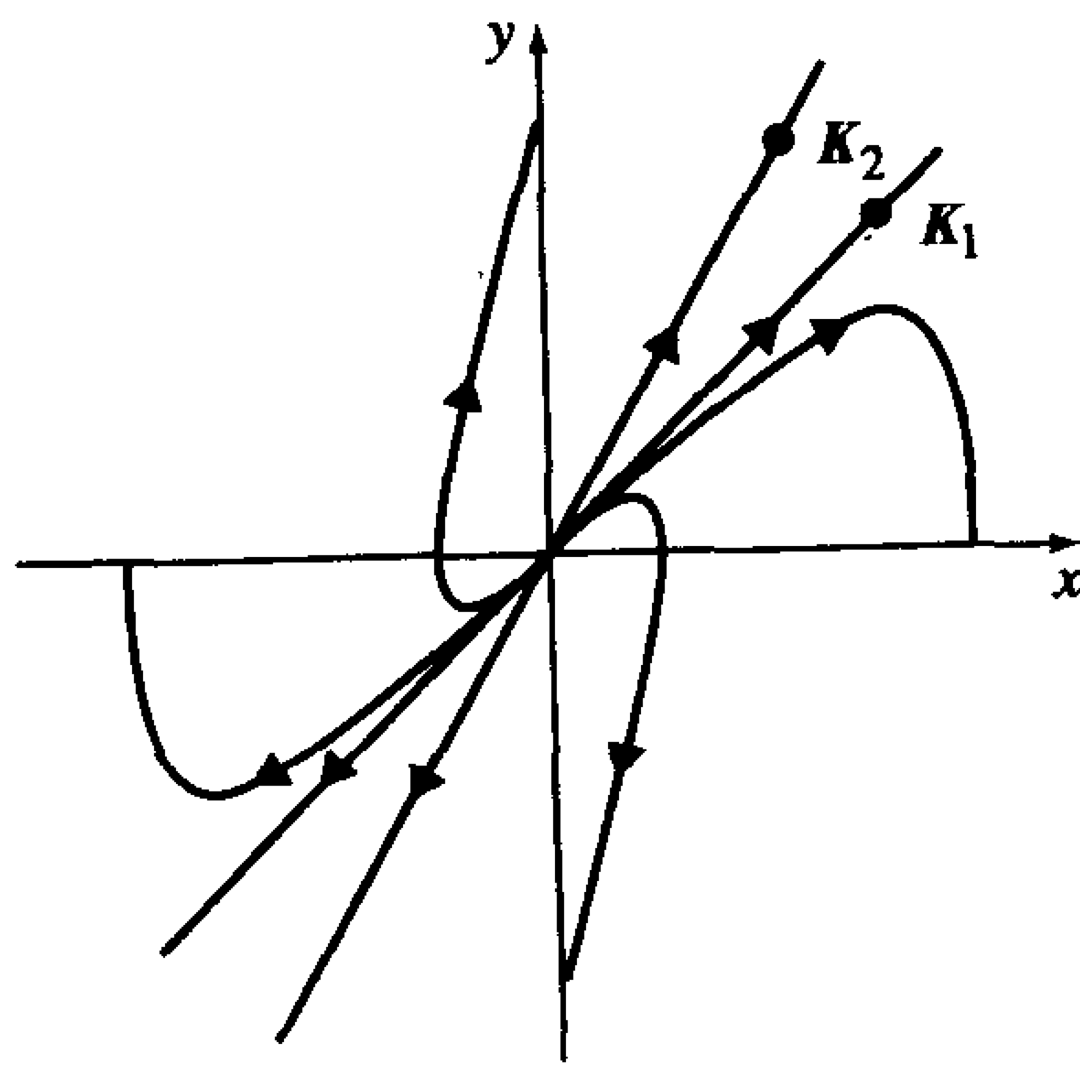


图 10.10 不稳定点

(c)特征值异号($\tau^2-4\Delta>0$ 且 $\Delta<0$)

鞍点($\lambda_2<0<\lambda_1$)：在这种情况下对解的分析除一点以外其余与(b)都相同. 当 $c_1=0$ 时，

$\mathbf{X}(t)=c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}$，因为 $\lambda_2<0$，所以 $\mathbf{X}(t)$ 会沿由特征向量 $\mathbf{K}_2$ 决定的直线而趋近于 $\mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{X}(0)$ 不在 $\mathbf{K}_2$ 决定的直线上，那么由 $\mathbf{K}_1$ 决定的直线是 $\mathbf{X}(t)$ 的渐近线. 因此，即使一些解随 t 的增加而趋于 $\mathbf{0}$，该临界点也是不稳定的. 这个不稳定临界点称为鞍点(saddle point). 请参考图 10.11.

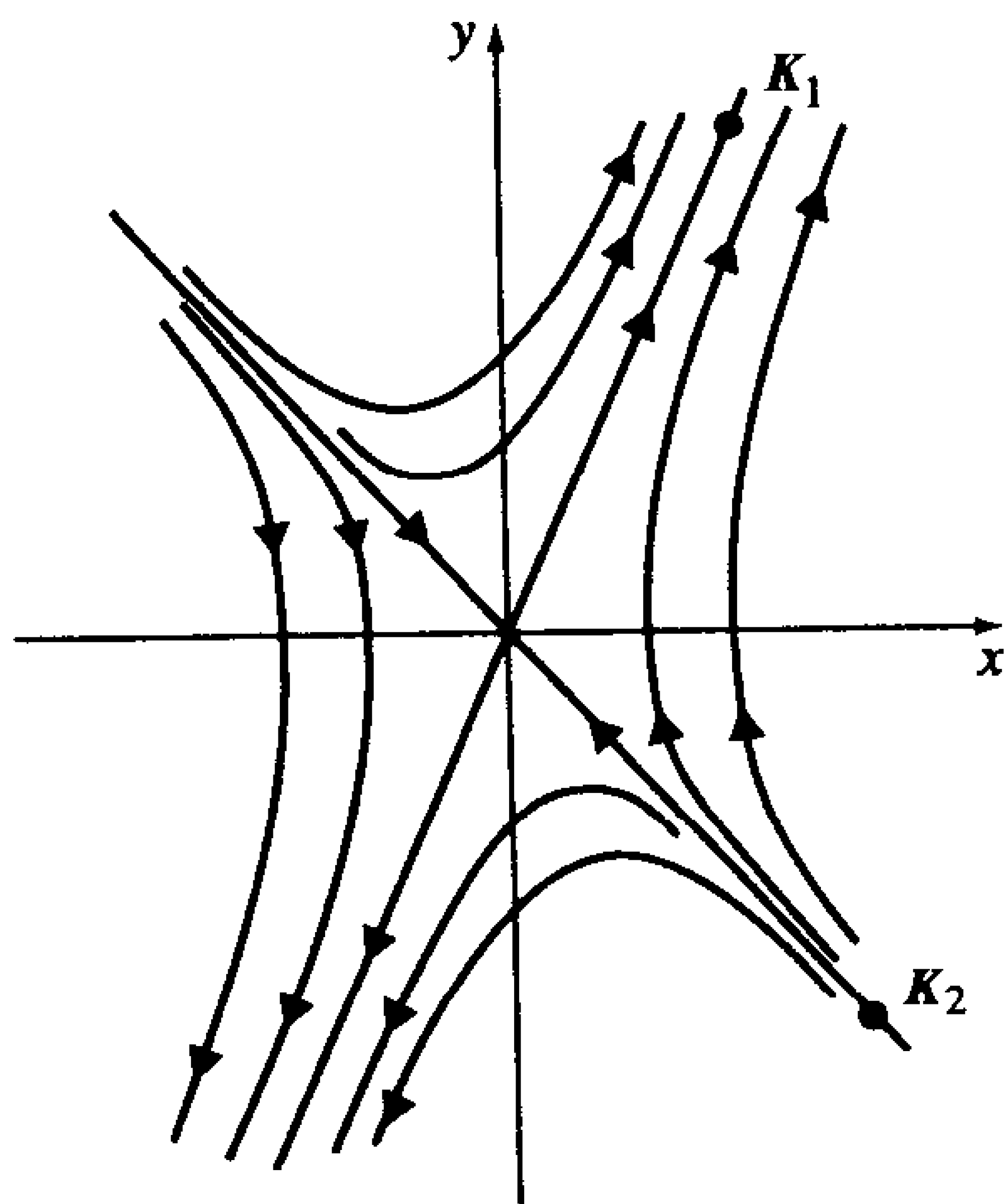


图 10.11 鞍点

例 2 不同的实特征值

确定临界点(0, 0)是以下每个线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 的稳定点、不稳定点还是鞍点.

(a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-10 & 6\\ 15 & -19\end{pmatrix}$

对于每种情况讨论解在(0, 0)邻域内的性质.

解 (a)因为轨迹 $\tau=3$，行列式 $\Delta=-4$，所以特征值为

$$\lambda=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(-4)}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=4,-1.$$

因为特征值异号，所以(0, 0)点为鞍点. 不难证明(请参考 8.2 节的例 1)相应于 $\lambda_1=4$ 和 $\lambda_2=-1$ 的特征向量分别为

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \text{ 和 } \mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

如果 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$ 在直线 $y=-x$ 上，那么 $\mathbf{X}(t)$ 趋近于 $\mathbf{0}$. 对其他初值条件，$\mathbf{X}(t)$ 会沿 $\mathbf{K}_1$ 确定的方向而趋向无限大. 也就是说，直线 $y=\frac{2}{3}x$ 是所有这些解曲线的渐近线. 请参考图 10.12.

(b)由 $\tau=-29$ 和 $\Delta=100$ 得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-4$ 和 $\lambda_2=-25$. 两个特征值都为负，所以(0, 0)点为稳定点. 因为相应于 $\lambda_1=-4$ 和 $\lambda_2=-25$ 的特征向量分别为

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ 和 } \mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix},$$

所以除了那些在 $\boldsymbol{K}_2$ 定义的直线 $y=-\frac{5}{2}x$ 上的解 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ 外，其余所有解都沿 $\boldsymbol{K}_1$ 确定的方向而趋近于 0. 请参考图 10.13.

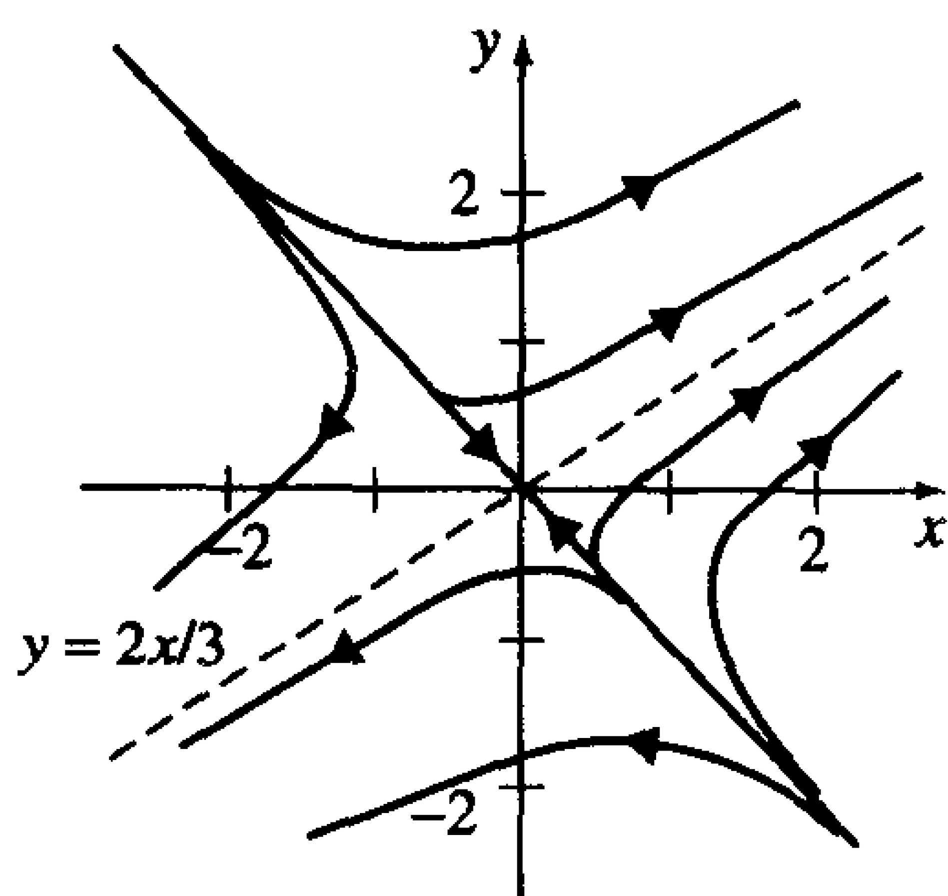


图 10.12

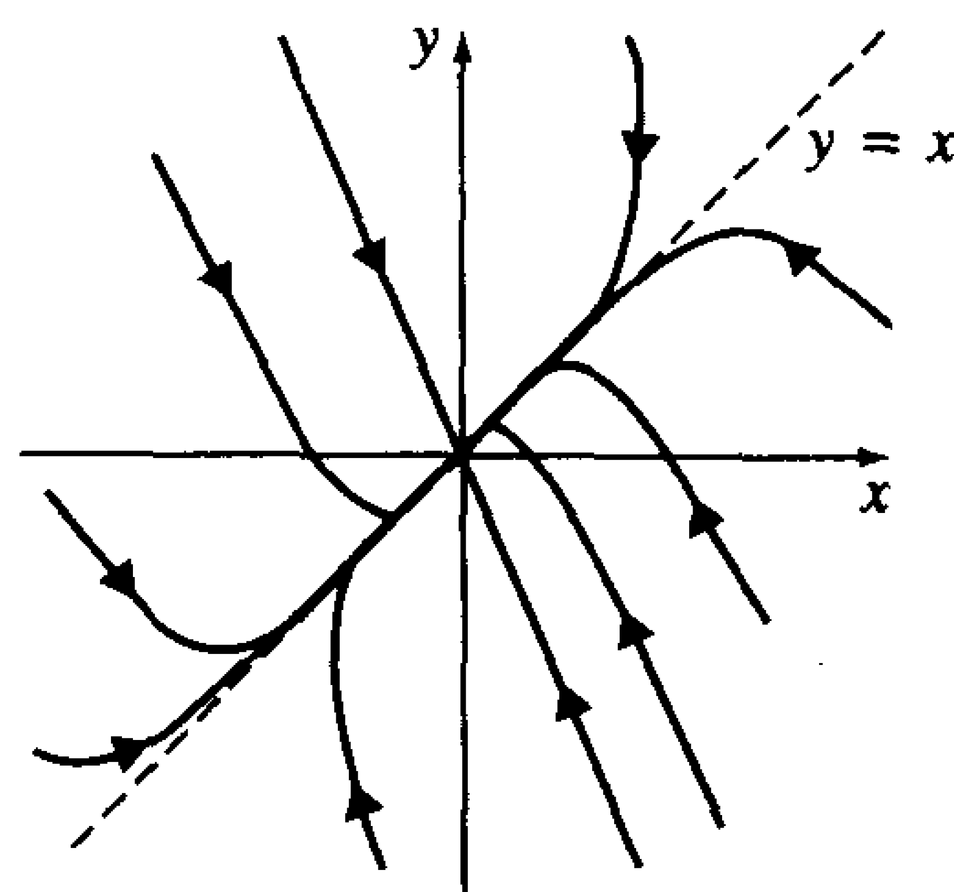


图 10.13

■

情形Ⅱ：重复的实特征值($\tau^2-4\Delta=0$)

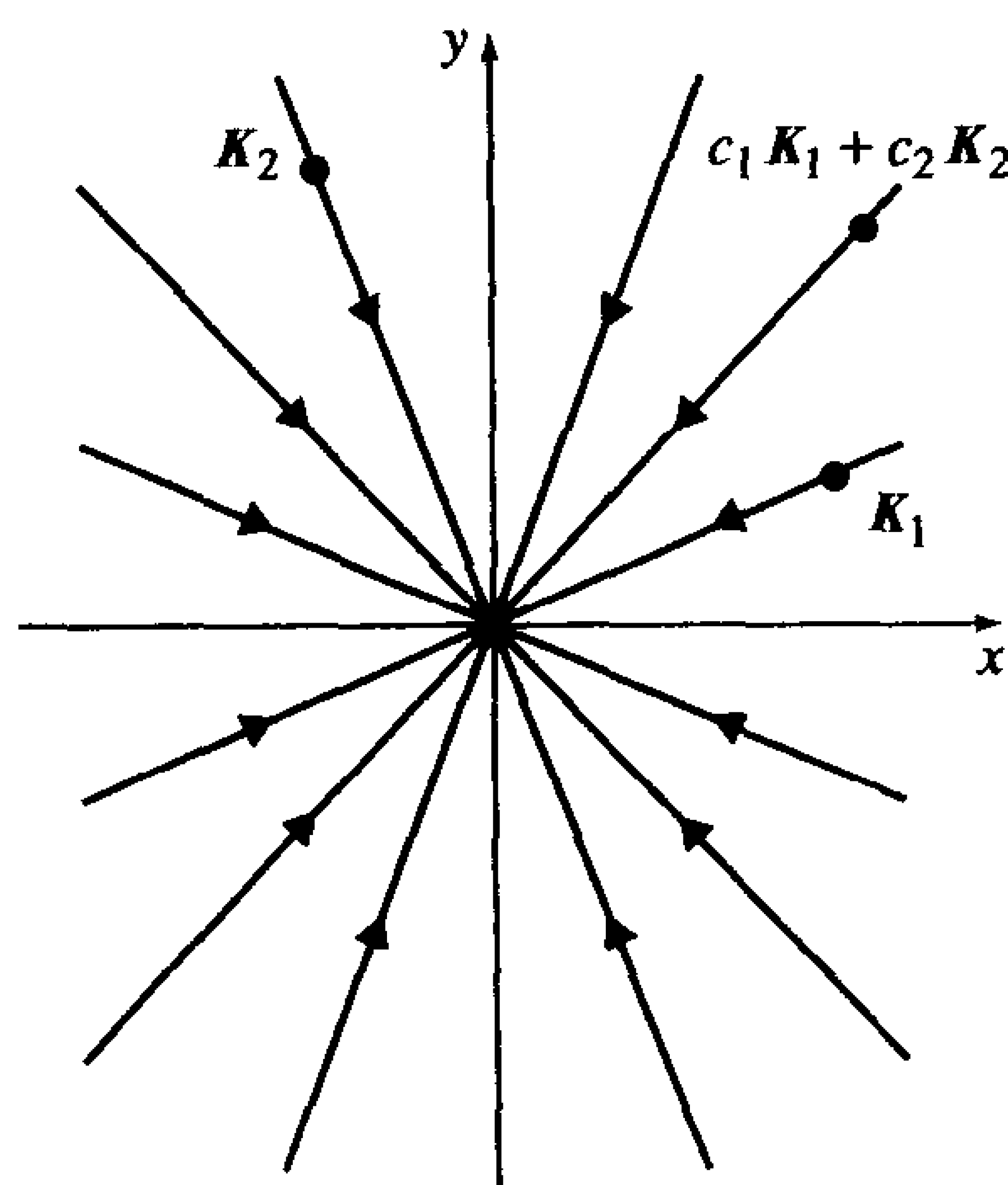
退化节点：回顾 8.2 节中通解取两种不同的形式之一，这取决于从重复特征值 λ_1 能找到一个还是两个线性无关的特征向量.

(a)两个线性无关的特征向量

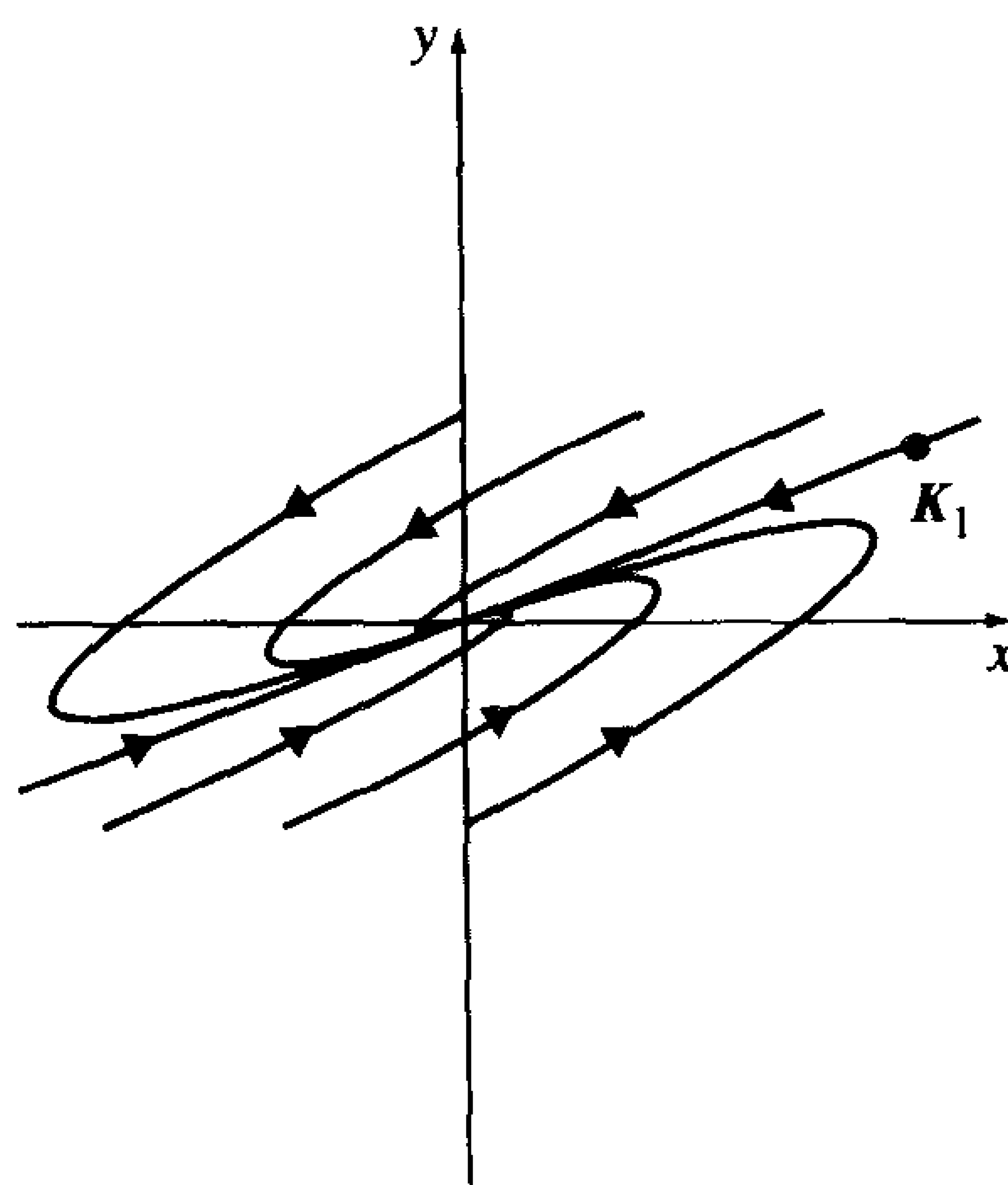
如果 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 是相应于 λ_1 的两个线性无关的特征向量，那么通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=c_1\boldsymbol{K}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{K}_2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=(c_1\boldsymbol{K}_1+c_2\boldsymbol{K}_2)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}.$$

若 $\lambda_1<0$，则 $\boldsymbol{X}(t)$ 沿着由向量 $c_1\boldsymbol{K}_1+c_2\boldsymbol{K}_2$ 决定的直线而趋近于 $\mathbf{0}$，且该临界点称为是退化稳定点(degenerate stable node)(请参考图 10.14(a)). 当 $\lambda_1>0$ 时图 10.14(a)中的箭头相反，且有退化不稳定点(degenerate unstable node).



a)



b)

图 10.14　退化稳定点

(b)线性无关的特征向量

如果仅存在一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{K}_1$，那么通解为

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1\boldsymbol{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(\boldsymbol{K}_1 t e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{P}e^{\lambda_1 t}) .$$

其中 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K}_1$（请参考 8.2 节中的(12)～(14)），解可以改写成

$$\boldsymbol{X}(t)=te^{\lambda_1 t}\left[c_2\boldsymbol{K}_1+\frac{c_1}{t}\boldsymbol{K}_1+\frac{c_2}{t}\boldsymbol{P}\right].$$

如果 $\lambda_1<0$，那么有 $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{\lambda_1 t} = 0$，$\boldsymbol{X}(t)$沿着由向量 $\boldsymbol{K}_1$决定的方向之一而趋近于 $\boldsymbol{0}$（请参考图 10.14(b)）. 该临界点也称为退化稳定点(degenerate stable node). 当 $\lambda_1>0$ 时，与图 10.14(b)所示的箭头方向相反. 由 $\boldsymbol{K}_1$决定的直线是所有解的渐近线. 该临界点也称为退化不稳定点(degenerate unstable node).

情形Ⅲ：复特征值($\tau^2-4\Delta<0$)

如果 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 和 $\bar{\lambda}_1=\alpha-i\beta$ 为复特征值且 $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{B}_1+i\boldsymbol{B}_2$ 为相应于 λ_1 的复特征向量，那么通解可写成 $\boldsymbol{X}(t)=c_1\boldsymbol{X}_1(t)+c_2\boldsymbol{X}_2(t)$，其中

$$\boldsymbol{X}_1(t)=(\boldsymbol{B}_1\cos\beta t-\boldsymbol{B}_2\sin\beta t)e^{\alpha t}, \quad \boldsymbol{X}_2(t)=(\boldsymbol{B}_2\cos\beta t+\boldsymbol{B}_1\sin\beta t)e^{\alpha t}.$$

请参考 8.2 节中的(23)和(24)式. 所以解也可以写为

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_{11}\cos\beta t + c_{12}\sin\beta t), y(t) = e^{\alpha t}(c_{21}\cos\beta t + c_{22}\sin\beta t), \tag{4}$$

的形式. 并且当 $\alpha=0$ 时有

$$x(t) = c_{11}\cos\beta t + c_{12}\sin\beta t, y(t) = c_{21}\cos\beta t + c_{22}\sin\beta t . \tag{5}$$

(a)纯虚数根($\tau^2-4\Delta<0$，$\tau=0$)

中心： 当 $\alpha=0$ 时，特征值为纯虚数，并由(5)可得，所有解的周期为 $p=2\pi/\beta$. 注意如果 c_{12}和 c_{21}恰好都为 0，那么(5)可简化为

$$x(t) = c_{11}\cos\beta t, \quad y(t) = c_{22}\sin\beta t,$$

它是椭圆 $x^2/c_{11}^2+y^2/c_{22}^2=1$ 的标准参数方程. 利用 $\sin^2\beta t+\cos^2\beta t=1$ 可以求出(4)中的 $\cos\beta t$ 和 $\sin\beta t$，可以证明所有解都是以原点为中心的椭圆. 临界点(0，0)称为中心(center)，图 10.15 给出了一个典型的解曲线集合. 椭圆围绕顺时针或逆时针方向运动.

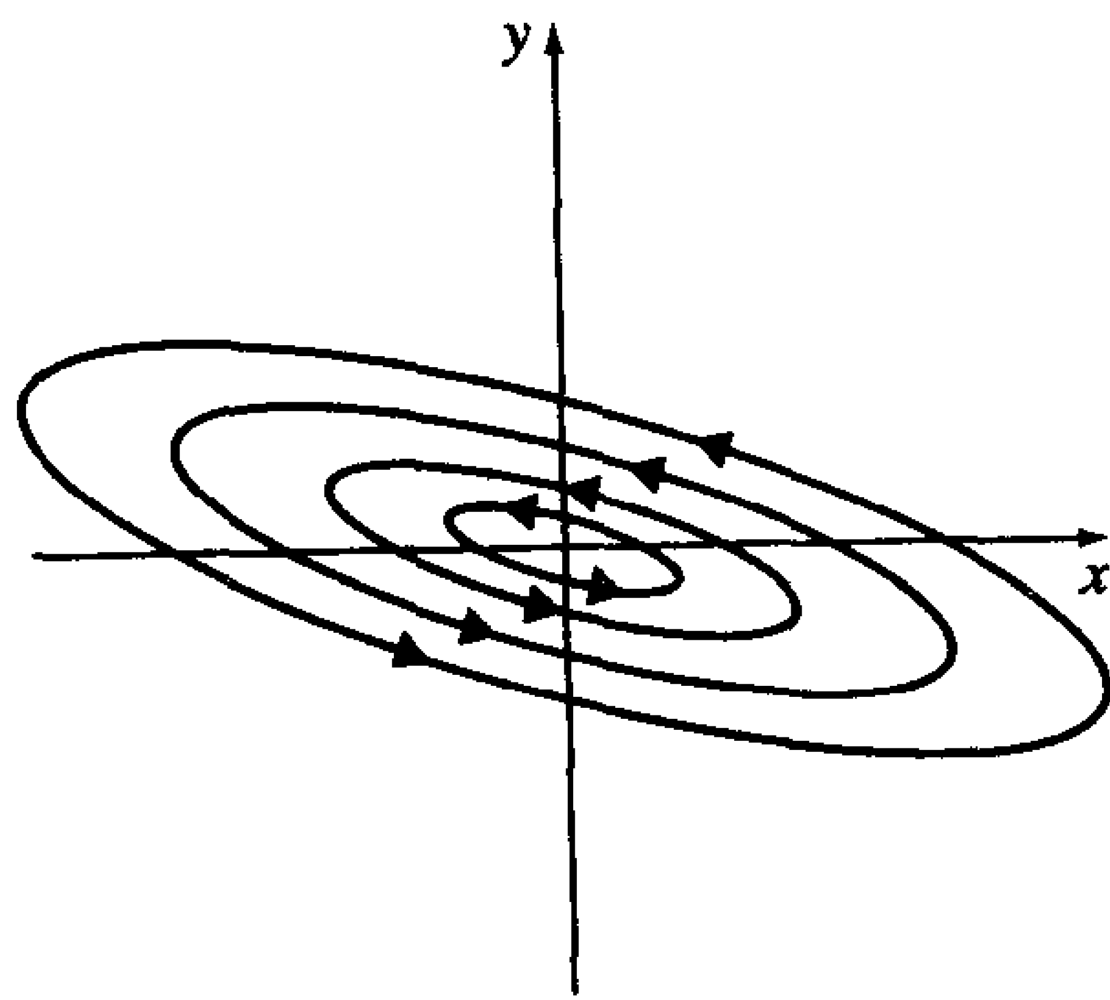


图 10.15 中心

(b)非零实部($\tau^2-4\Delta<0$，$\tau\neq0$)

螺旋点： 当 $\alpha\neq0$ 时，(4)中 $e^{\alpha t}$的影响与 5.1 节中阻尼运动分析里指数项的影响类似. 当 $\alpha<0$ 时，$e^{\alpha t}\to0$，且类似于椭圆的解以螺线方式趋近于原点. 该临界点称为稳定螺旋点(stable spiral point). 当 $\alpha>0$ 时，其影响相反，类似于椭圆的解以螺线方式远离原点，且该临界点称为不稳定螺旋点(unstable spiral point). 请参考图 10.16.

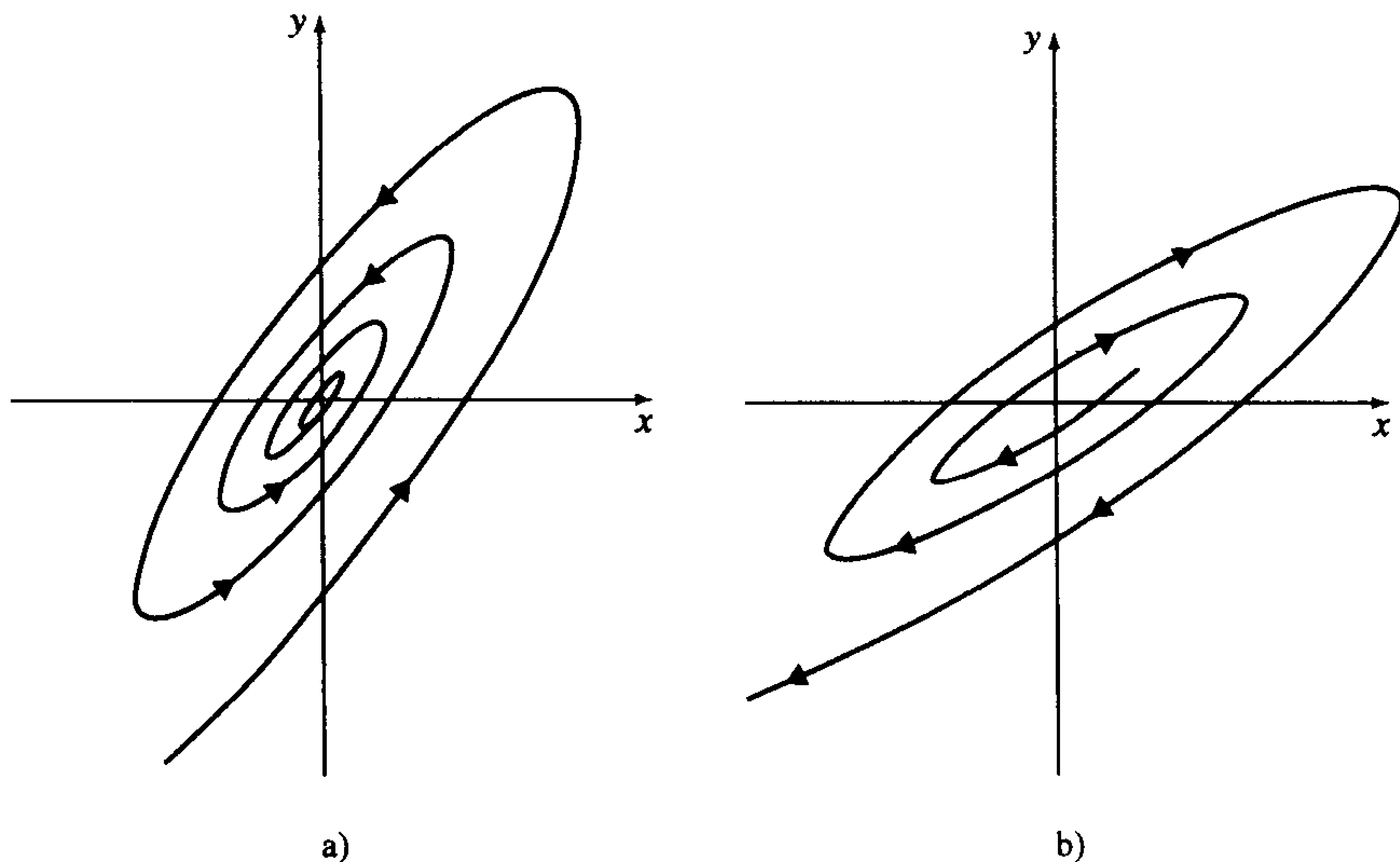


图 10.16 稳定和不稳定螺旋点

例 3 重复特征值及复特征值

确定临界点(0，0)在以下每个线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 中的类型.

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{pmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

讨论满足 $\boldsymbol{X}(0)=(1,0)$ 的解的性质. 确定每个解的参数方程.

解 (a)因为 $\tau=-6$ 且 $\Delta=9$，特征多项式为 $\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2$，所以(0，0)点为退化稳定点. 对于重复的特征值 $\lambda=-3$，可以求出单个特征向量为 $\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，所以满足 $\boldsymbol{X}(0)=(1,0)$ 的解 $\boldsymbol{X}(t)$ 沿着由直线 $y=x/3$ 所确定的方向趋近于(0，0)点.

(b)因为 $\tau=0$ 且 $\Delta=1$，特征值为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$，所以(0，0)点是中心点. 满足 $\boldsymbol{X}(0)=(1,0)$ 的解 $\boldsymbol{X}(t)$ 是一个每 2π 个单位时间绕原点一周的椭圆.

由 8.2 节中的例 4 可知，(a)中方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-3t}+c_2\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}t\mathrm{e}^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-3t}\right].$$

由初值条件得 $c_1=0$ 及 $c_2=2$，所以解的参数方程为

$$x=(6t+1)\mathrm{e}^{-3t},\quad y=2t\mathrm{e}^{-3t}.$$

(b)中方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\ -\sin t\end{pmatrix}.$$

由初值条件得 $c_1=0$ 及 $c_2=1$，所以

$$x=\cos t-\sin t, y=-\sin t$$

为椭圆的参数方程. 注意到当 t 取较小的正值时 $y<0$，所以椭圆的方向是顺时针的.

(a)和(b)的解分别如图 10.17(a)和(b)所示.

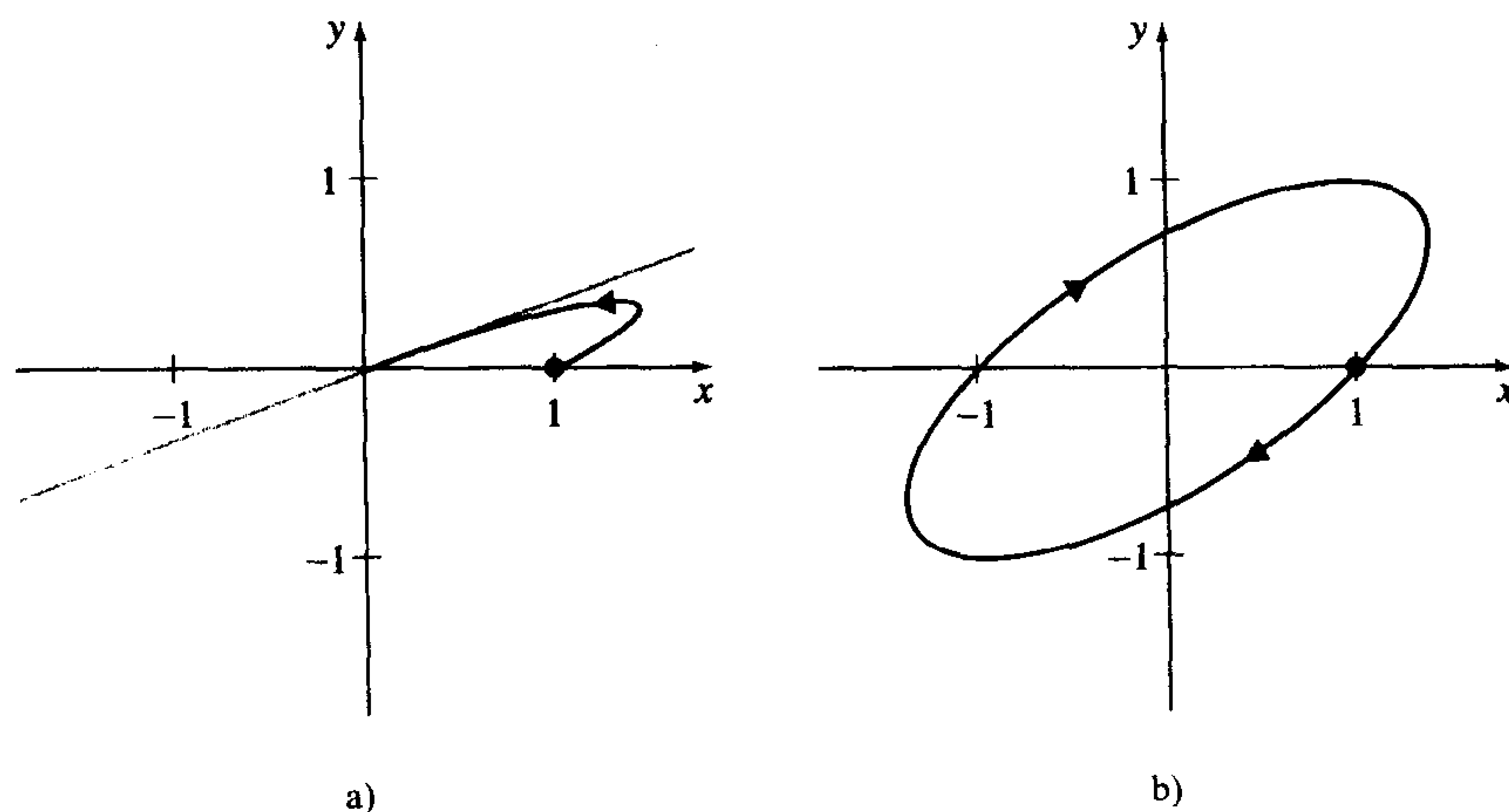


图 10.17

图 10.18 概述了本节的结果. 解的几何性质可以通过计算 A 的轨迹和行列式来确定. 实际操作中，获得解的图像的最简便的方法并不是利用显式特征值-特征向量法，而是利用数值求解程序和一阶方程组的龙格-库塔法.

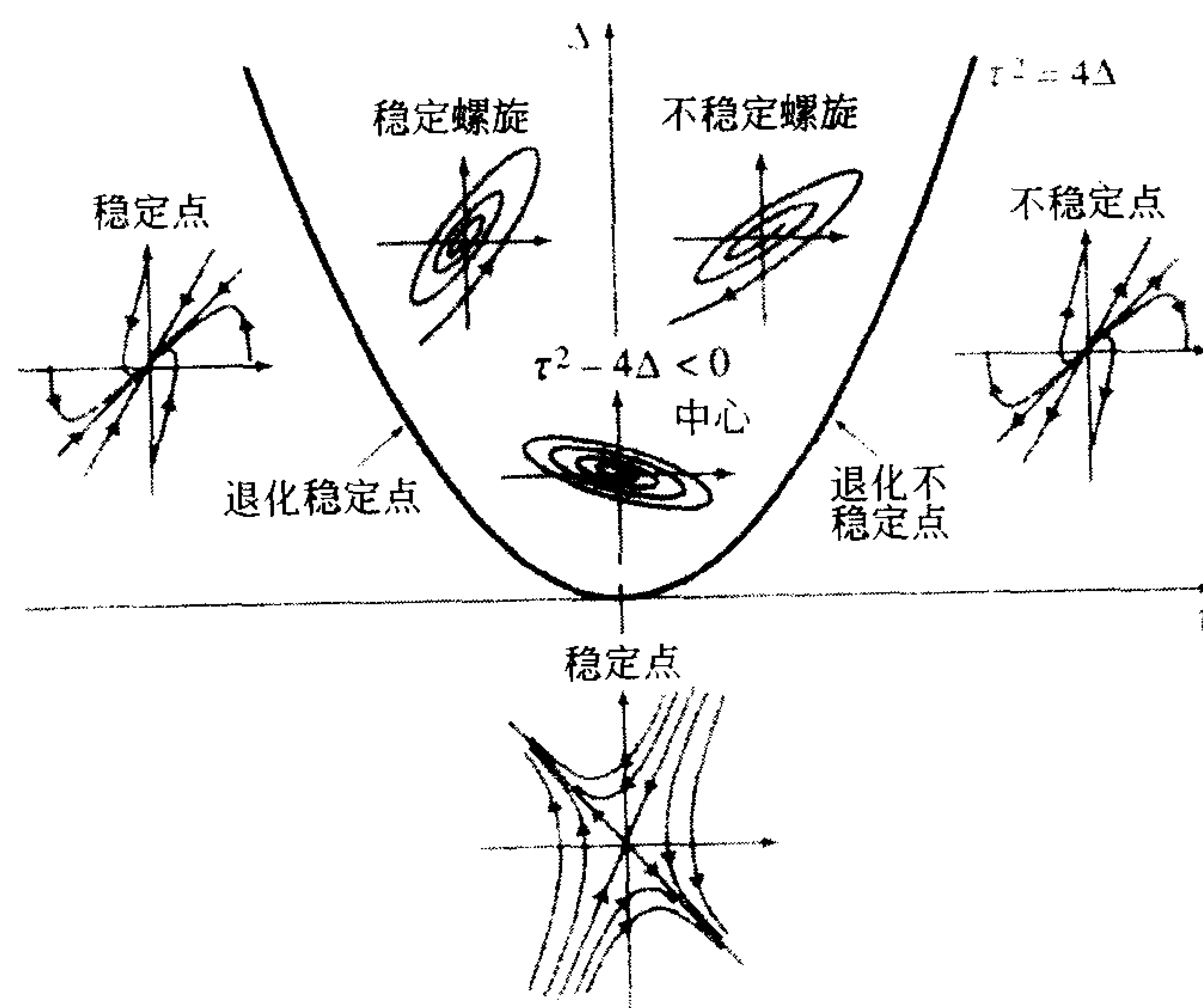


图 10.18

例 4 临界点的分类

对于正常数 a、b、c、d、$\hat{x}$及$\hat{y}$，确定临界点(0，0)在以下每个线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 中的

类型.

(a)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1.01 & 3.10\\ -1.10 & -1.02\end{pmatrix}$ (b)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a\hat{x} & -ab\hat{x}\\ -cd\hat{y} & -d\hat{y}\end{pmatrix}$

解 (a)对于这个矩阵 $\tau=-0.01$，$\Delta=2.3798$，所以 $\tau^2-4\Delta<0$. 在图 10.18 中，我们可以看到(0，0)是稳定螺旋点.

(b)这个矩阵来自我们将在 10.4 节中研究的 Lotka-Volterra 竞争模型矩阵. 因为 $\tau=-(a\hat{x}+d\hat{y})$ 且矩阵中的所有常数为正，所以 $\tau<0$，行列式可写为 $\Delta=ad\hat{x}\hat{y}(1-bc)$. 若 $bc>1$，则 $\Delta<0$，临界点为鞍点. 若 $bc<1$，则 $\Delta>0$，临界点有可能为稳定点、退化稳定点或稳定螺旋点. 在所有三种情况中都有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=0$. ■

对于本节一开始提出的针对线性平面自治方程组(1)的问题，下面的定理在 $ad-bc\neq0$ 的情况下做了一个总结性回答.

定理 10.1 **线性方程组的稳定性判别法则**

对于 $\det\boldsymbol{A}\neq0$ 的线性平面自治方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$，令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 表示满足初值条件 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ 的解，其中 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$.

(a) $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有负实部. 当 $\Delta>0$ 且 $\tau<0$ 时会发生这种情况.

(b) $\boldsymbol{X}(t)$ 是周期性的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为纯虚数. 当 $\Delta>0$ 且 $\tau=0$ 时会发生这种情况.

(c)在所有其他情况中，任意给定原点的邻域，邻域中至少存在一点 $\boldsymbol{X}_0$ 使得 $\boldsymbol{X}(t)$ 随着 t 的增加而无限增大.

注 每本书中用来描述临界点类型的专用名词可能不同，下表列出了您在阅读中可能遇到的其他表示方法.

本书术语	其他可能术语
临界点	均衡点、奇点、平稳点、休止点
螺旋点	焦点、旋涡点
稳定点或螺旋点	吸引子、吸收点
不稳定点或螺旋点	排斥子、起源点

练习 10.2

在习题 1~8 中已经给出了线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 的通解.

(a)在每种情况下讨论解在(0，0)的邻域内的性质.

(b)借助于图像计算器或计算机软件绘出满足 $\boldsymbol{X}(0)=(1,1)$ 的解的图像.

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{-6t}$

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}e^{2t}$

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{t}\left[c_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right]$

4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{-t}\left[c_1\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}\right]$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6 & 5\\ -5 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}t\mathrm{e}^{-t}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\right]$

6. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}+c_2\left[\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}t\mathrm{e}^{4t}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}\right]$

7. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}$

8. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}5\cos 2t\\ \cos 2t-2\sin 2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\sin 2t\\ 2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}$

在习题 9～16 中，通过计算轨迹 τ 和行列式 Δ，并利用图 10.18 确定临界点(0，0)在所给线性方程组中的类型.

9. $x'=-5x+3y$
   $y'=2x+7y$

10. $x'=-5x+3y$
    $y'=2x-7y$

11. $x'=-5x+3y$
    $y'=-2x+5y$

12. $x'=-5x+3y$
    $y'=-7x+4y$

13. $x'=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}y$
    $y'=-x-\frac{1}{2}y$

14. $x'=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}y$
    $y'=-x+\frac{1}{2}y$

15. $x'=0.02x-0.11y$
    $y'=0.10x-0.05y$

16. $x'=0.03x+0.01y$
    $y'=-0.01x+0.05y$

17. 确定实常数 μ 应满足的条件，使得(0，0)为线性方程组

$$\begin{cases}x'=-\mu x+y\\ y'=-x+\mu y.\end{cases}$$

的中心.

18. 确定一个实常数 μ 应满足的条件使得(0，0)为线性方程组

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=-x+\mu y.\end{cases}$$

的稳定螺旋点.

19. 证明(0，0)总是线性方程组

$$\begin{cases}x'=\mu x+y\\ y'=-x+y,\end{cases}$$

的不稳定临界点，其中 μ 为一实常数且 $\mu\neq-1$. 什么时候(0，0)为不稳定鞍点？什么时候(0，0)为不稳定螺旋点？

20. 令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 为线性动力系统

$$\begin{cases}x'=\alpha x-\beta y\\ y'=\beta x+\alpha y\end{cases}$$

满足初值条件 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ 的响应．确定实常数 α 和 β 应满足的条件以确保 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=(0,\ 0)$ 成立．(0，0)是节点或鞍点吗？

21. 证明当 $\Delta=\det A\neq0$ 时，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{F}$ 有唯一临界点 $\boldsymbol{X}_1$．证明如果 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是非齐次方程组的解，$\tau<0$ 且 $\Delta>0$，那么有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_1$．[提示：$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_c(t)+\boldsymbol{X}_1$．]
22. 在例 4 的(b)中，证明当 $bc<1$ 时(0，0)为稳定点．

在习题 23～26 中给出一个非齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{F}$.

(a)在每种情况下确定唯一的临界点 $\boldsymbol{X}_1$．

(b)利用数值求解程序确定(a)中所得临界点的性质．

(c)研究 $\boldsymbol{X}_1$ 与齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 的临界点(0，0)之间的关系．

23. $x'=2x+3y-6$
    $y'=-x-2y+5$
24. $x'=-5x+9y+13$
    $y'=-x-11y-23$
25. $x'=0.1x-0.2y+0.35$
    $y'=0.1x+0.1y-0.25$
26. $x'=3x-2y-1$
    $y'=5x-3y-2$

10.3 线性化和局部稳定性

本节的核心思想是线性化．回顾微积分学中，对于一个可微函数 $f(x)$ 在某点 $(x_1,\ f(x_1))$ 处的局部线性近似，或线性化(linearization)，就是 f 的图像在该点的切线方程：$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$．对于接近 x_1 的 x，由切线方程获得的 $y(x)$ 值是 $f(x)$ 的近似．线性化使我们可以用线性方程作为非线性方程的近似，线性方程组作为非线性一阶微分方程组的近似．

滑行的小圆珠　首先，我们推导 10.2 节中介绍的稳定性在非线性自治方程组中的应用．虽然线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 在 $\det\boldsymbol{A}\neq0$ 时仅有一个临界点，但在 10.1 节中可以看到，非线性方程组可能有多个临界点．所以不能肯定初始时位于 $\boldsymbol{X}_0$ 的质点会留在给定临界点 $\boldsymbol{X}_1$ 的附近，除非 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\boldsymbol{X}_1$ 足够接近．质点可能会移动到其他的临界点．为了强调这一思想，考虑如图 10.19 所示的物理系统，一个小圆珠在重力作用下沿曲线 $z=f(x)$ 滑动．我们将在 10.4 节中证明小圆珠的 x 坐标满足非线性二阶微分方程 $x''=g(x,\ x')$，所以可以设 $y=x'$ 满足非线性自治方程组

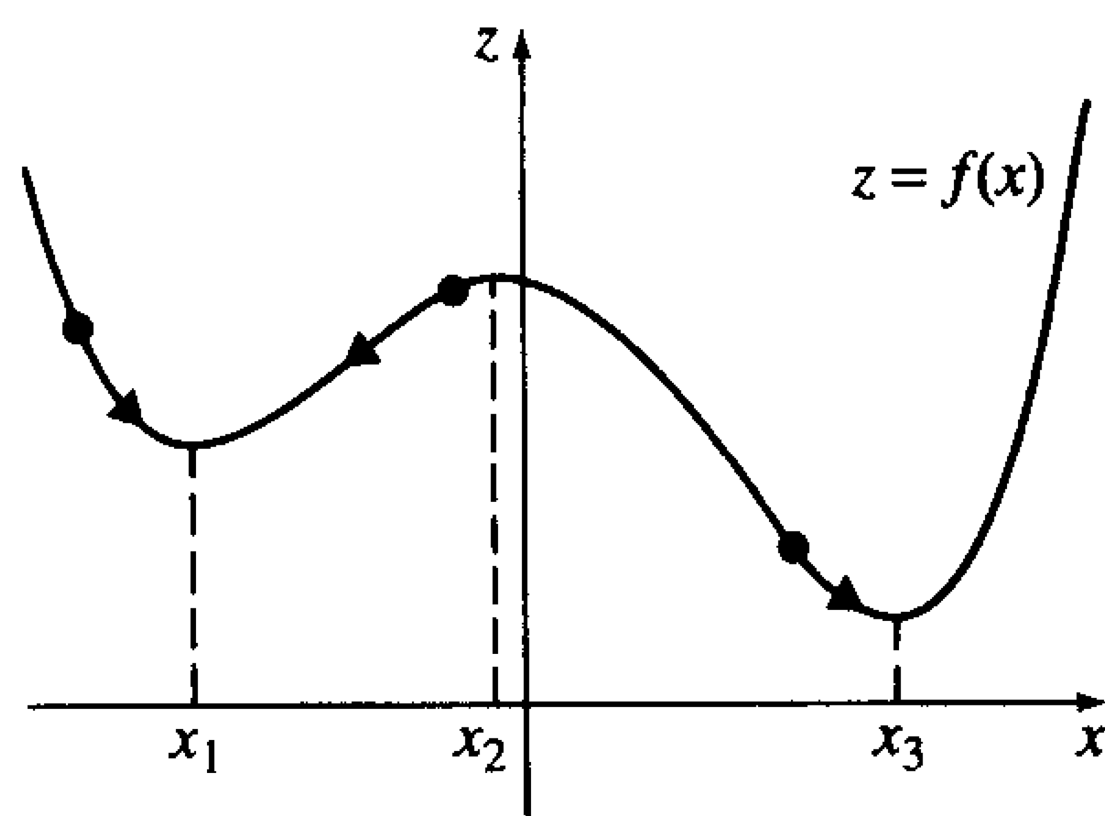


图　10.19

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=g(x,\ y).\end{cases}$$

如果小圆珠置于 $P=(x,\ f(x))$ 且初速度为 0，那么当 $f'(x)=0$ 时小圆珠会停止在 P 点．如果小圆珠放在临界点 $x=x_1$ 附近，那么仅当初速度不足以使其翻越 $x=x_2$ 处隆起的部分而到达临界点 $x=x_3$ 时，小圆珠才会停留在 $x=x_1$ 附近．所以 $\boldsymbol{X}(0)=(x(0),\ x'(0))$ 必须在 $(x_1,\ 0)$ 附近．

下面我们将以 $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$ 来定义两点 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 之间的距离．如果 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，

$\boldsymbol{Y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，那么

$$|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

定义 10.1　稳定临界点

设 $\boldsymbol{X}_1$ 为自治方程组的临界点，并设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 表示满足初值条件 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ 的解，其中 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{X}_1$. 称 $\boldsymbol{X}_1$ 为稳定临界点(stable critical point)，当任给定半径 $\rho>0$ 时，存在一个相应的半径 $r>0$ 使得当初始位置 $\boldsymbol{X}_0$ 满足 $|\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_1|<r$ 时，相应的解 $\boldsymbol{X}(t)$ 对所有的 $t>0$ 满足 $|\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_1|<\rho$. 另外，如果只要 $|\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_1|<r$ 就有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_1$，则称 $\boldsymbol{X}_1$ 为渐近稳定临界点(asymptotically stable critical point).

图 10.20(a)诠释了这一定义. 任给定以临界点 $\boldsymbol{X}_1$ 为中心，以 ρ 为半径的圆面，若 $X(0)=\boldsymbol{X}_0$ 足够接近 $\boldsymbol{X}_1$，则解将停留在给定圆面内. $\boldsymbol{X}_1$ 是稳定的并不意味着解一定要趋近于临界点. 线性方程组的稳定点、稳定螺旋点及中心都是稳定临界点. 为强调 $\boldsymbol{X}_0$ 必须接近 $\boldsymbol{X}_1$，我们用到了术语局部稳定临界点(locally stable critical point).

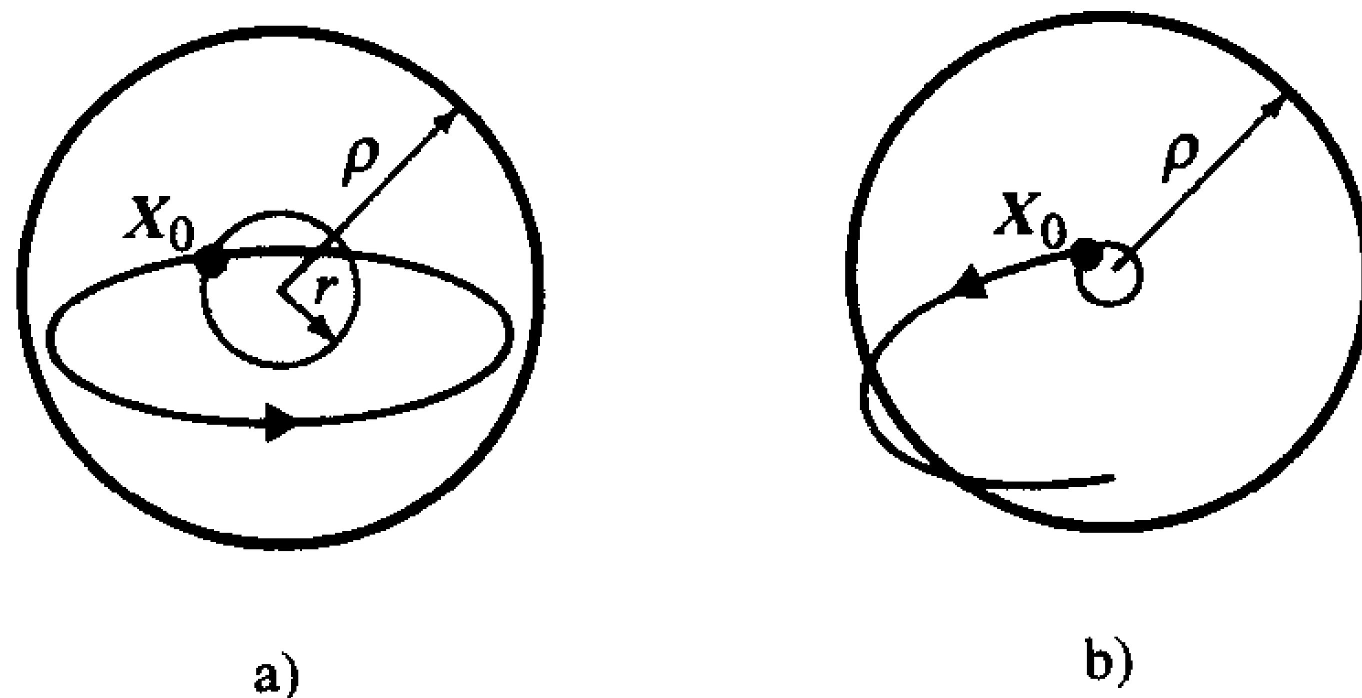


图　10.20

定义 10.2　不稳定临界点

设 $\boldsymbol{X}_1$ 为自治方程组的临界点，并设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 表示满足初值条件 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ 的解，其中 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{X}_1$. 称 $\boldsymbol{X}_1$ 为不稳定临界点(unstable critical point)，如果存在一个半径为 $\rho>0$ 的圆面，使得对任意 $r>0$，至少存在一个初始位置 $\boldsymbol{X}_0$ 满足 $|\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_1|<r$，但存在至少一个 $t>0$，使得相应的解 $\boldsymbol{X}(t)$ 满足 $|\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_1|\geqslant\rho$.

如果临界点 $\boldsymbol{X}_1$ 是不稳定的，那么无论 $\boldsymbol{X}_1$ 的邻域有多小，总可以找到一个初始位置 $\boldsymbol{X}_0$，使得解在未来某时刻 t 离开半径为 ρ 的圆面. 请参考图 10.20(b). 线性方程组的不稳定点、不稳定螺旋点及鞍点都是不稳定临界点. 图 10.19 中的临界点$(x_2, 0)$是不稳定的. 非常小的偏移或初速度都会使小圆珠滑离点$(x_2, f(x_2))$.

例 1　稳定临界点

证明(0, 0)点是非线性平面自治方程组

$$x'=-y-x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y'=x-y\sqrt{x^2+y^2}$$

的稳定临界点. 考虑 10.1 节中的例 6.

解　在 10.1 节的例 6 中，我们证明了在极坐标系下 $r=1/(r+c_1)$，$\theta=t+c_2$ 是方程组的

解. 如果 $\mathbf{X}(0)=(r_0, \theta_0)$为极坐标系下的初值条件，那么

$$r=\frac{r_0}{r_0t+1}, \quad \theta=t+\theta_0.$$

注意 $t\geqslant 0$ 时 $r\leqslant r_0$，且 r 随着 t 的增大趋近于(0, 0)，所以给定 $\rho>0$，起始点与(0, 0)的距离小于 ρ 的解当 $t\geqslant 0$ 时都在与原点的距离小于 ρ 的范围之内. 所以临界点(0, 0)是稳定且渐近稳定的. 一个典型的解如图 10.21 所示. ■

例 2　不稳定临界点

极坐标系下的平面自治方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=0.05r(3-r)\\[2mm] \dfrac{d\theta}{dt}=-1.\end{cases}$$

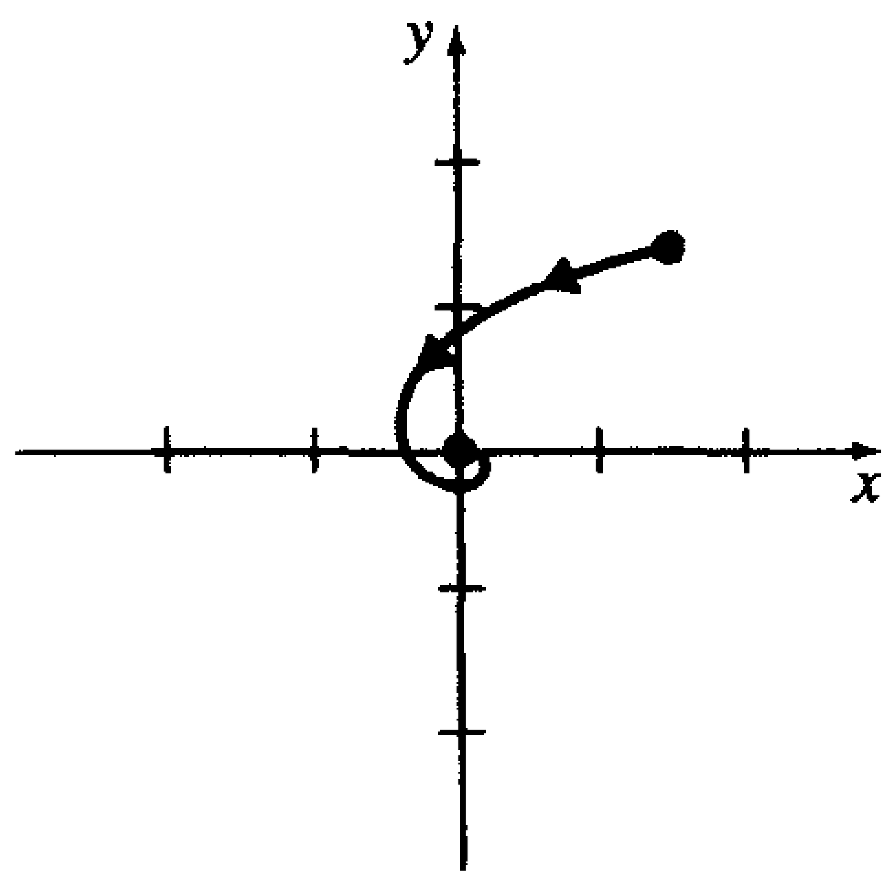


图　10.21

证明$(x, y)=(0, 0)$为不稳定临界点.

证　因为 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，所以有

$$\frac{dx}{dt}=-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+\frac{dr}{dt}\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{dt}=r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+\frac{dr}{dt}\sin\theta.$$

由 $dr/dt=0.05r(3-r)$，可以看到当 $r=0$ 时 $dr/dt=0$，所以通过把 $r=0$ 代入新的方程组可得$(x, y)=(0, 0)$为临界点.

微分方程 $dr/dt=0.05r(3-r)$是一个逻辑斯谛方程，可以利用变量分离法或 3.2 节中的方程(5)来求解. 如果 $r(0)=r_0$且 $r_0\neq 0$，那么

$$r=\frac{3}{1+c_0e^{-0.15t}},$$

其中 $c_0=(3-r_0)/r_0$. 因为

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{3}{1+c_0e^{-0.15t}}=3,$$

所以无论解从多靠近(0, 0)点的位置开始，它都会运动到以原点为中心，半径为 3 的圆周上. 所以(0, 0)点是不稳定临界点. 一个典型的由(0, 0)点附近开始的解如图 10.22 所示. ■

线性化　实际上很少能像在例 1 和例 2 中那样，通过求出非线性方程组的显式解来判断其临界点的稳定性. 另一种方法是，用线性项 $A(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1)$替换原自治方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{g}(\mathbf{X})$中的 $\mathbf{g}(\mathbf{X})$，其中 $A(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1)$是 $\mathbf{g}(\mathbf{X})$在 $\mathbf{X}_1$邻域内的近似. 这种方法被称为线性化(linearization)方法，我们首先介绍它在一阶微分方程 $x'=g(x)$中的应用.

曲线 $y=g(x)$在 $x=x_1$处的切线方程为 $y=g(x_1)+g'(x_1)(x-x_1)$，若 x_1是 $x'=g(x)$的临界点，则有 $x'=g(x)\approx g'(x_1)(x-x_1)$，线性微分方程

$$x'=g'(x_1)(x-x_1)$$

的通解是 $x=x_1+ce^{\lambda_1 t}$，其中 $\lambda_1=g'(x_1)$. 所以若有 $g'(x_1)<0$，则 $x(t)$趋近于 x_1. 定理 10.2说明了当给定的 $x(0)=x_0$足够接近 x_1时，原微分方程的解是怎样的.

定理 10.2 $x'=g(x)$的稳定性判别法则

设 x_1 为自治微分方程 $x'=g(x)$的临界点，其中 g 在 x_1 处可导.

(a)如果 $g'(x_1)<0$，则 x_1 是渐近稳定临界点.

(b)如果 $g'(x_1)>0$，则 x_1 是不稳定临界点.

例 3 非线性一阶微分方程的稳定性

$x=\pi/4$ 和 $x=5\pi/4$ 都是自治微分方程 $x'=\cos x-\sin x$ 的临界点. 我们很难求出这个方程的显式解，但可以利用定理 10.2 预测靠近这两个临界点的解的性态.

因为 $g'(x)=-\sin x-\cos x$，$g'(\pi/4)=-\sqrt{2}<0$ 且 $g'(5\pi/4)=\sqrt{2}>0$，所以 $x=\pi/4$ 是渐近稳定临界点，而 $x=5\pi/4$ 是不稳定的. 在图 10.23 中，我们利用数值求解程序给出了始于$(0, \pi/4)$和$(0, 5\pi/4)$附近的解. 正如预测的那样，始于$(0, 5\pi/4)$附近的解很快远离了直线$x=5\pi/4$.

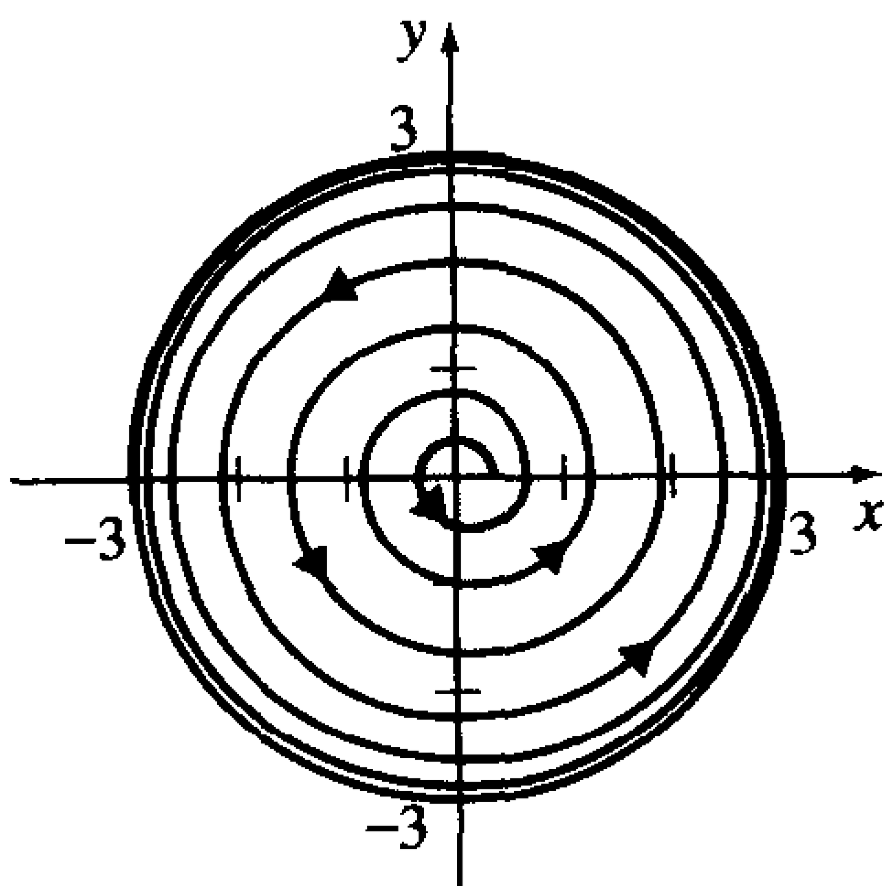


图 10.22

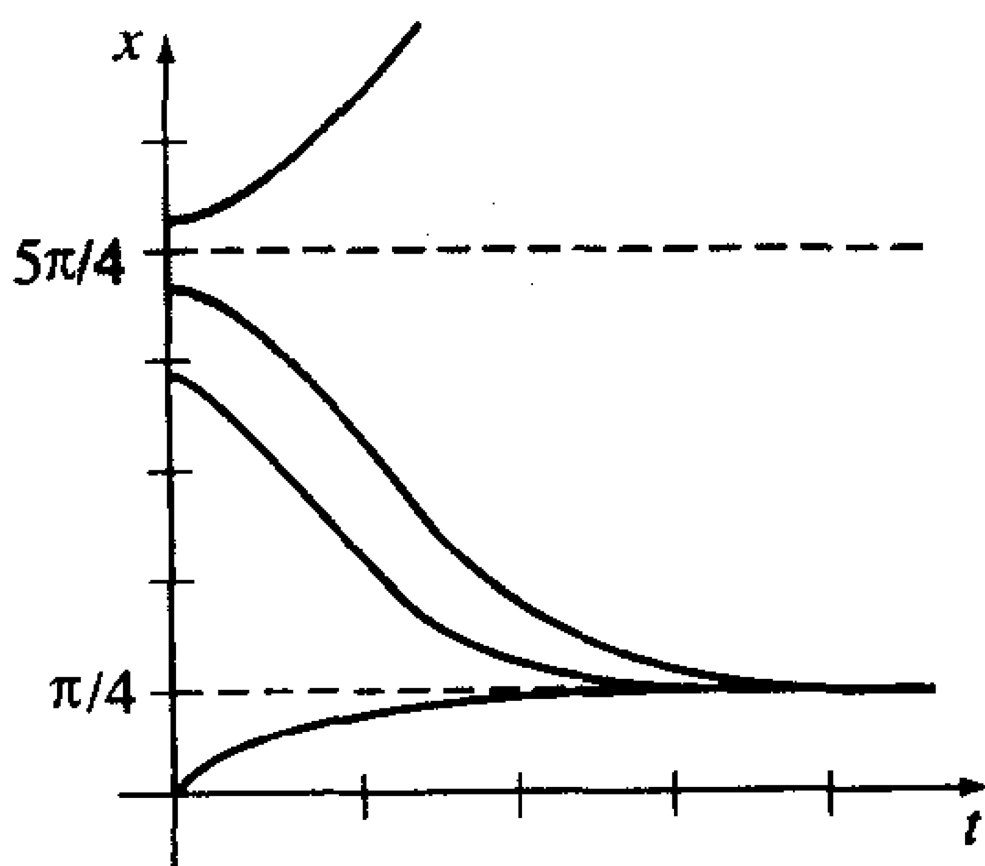


图 10.23 ■

例 4 逻辑斯谛微分方程的稳定性分析

不求解方程，分析逻辑斯谛微分方程(请参考 3.2 节)$x'=rx(K-x)/K$ 的临界点的性质，其中 r 和 K 为正常数.

解 方程的两个临界点为 $x=0$ 和 $x=K$，所以由 $g'(x)=r(K-2x)/K$，得 $g'(0)=r$ 及 $g'(K)=-r$. 由定理 10.2 可知，$x=0$ 为不稳定临界点，而 $x=K$ 为渐近稳定临界点. ■

雅可比矩阵 我们可以对平面自治方程进行类似的分析，曲面 $z=g(x, y)$在 $\mathbf{X}_1=(x_1, y_1)$处的切平面为

$$z=g(x_1,y_1)+\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)}(x-x_1)+\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)}(y-y_1),$$

并且 $g(x, y)$在 $\mathbf{X}_1$ 的邻域内可以用切平面来近似.

当 $\mathbf{X}_1$ 为平面自治方程组的临界点时，$P(x_1, y_1)=Q(x_1, y_1)=0$ 且有

$$x'=P(x, y)\approx\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)}(x-x_1)+\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)}(y-y_1)$$

$$y'=Q(x, y)\approx\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)}(x-x_1)+\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)}(y-y_1).$$

在临界点 $\mathbf{X}_1$ 的邻域内，原方程 $\mathbf{X}'=\mathbf{g}(\mathbf{X})$可由线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1)$来近似，其中

$$A=\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)} & \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)}\\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)} & \left.\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)}\end{pmatrix}.$$

这个矩阵称为 $\boldsymbol{X}_1$ 的雅可比矩阵(Jacobian matrix)，并可用 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X}_1)$来表示．如果令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1$，那么线性方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)$变为 $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{AH}$，我们曾在 10.2 节里分析了这种形式的线性方程组．$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)$的临界点 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{AH}$ 的临界点 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$ 相对应．若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有负实部，则由定理 10.1 可得，$\boldsymbol{0}$ 为 $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{AH}$ 的渐近稳定临界点．如果其特征值有正实部，那么 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$ 为不稳定临界点．定理 10.3 断言，原方程组的临界点会有同样的结论．

定理 10.3　平面自治方程组的稳定性判别法则

设 $\boldsymbol{X}_1$ 为平面自治方程组 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$的临界点，其中 $P(x,\ y)$及 $Q(x,\ y)$在 $\boldsymbol{X}_1$ 的邻域内有连续的一阶偏导数．

(a)如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X}_1)$的特征值有负实部，则 $\boldsymbol{X}_1$ 为渐近稳定临界点．

(b)如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X}_1)$的特征值有正实部，则 $\boldsymbol{X}_1$ 为不稳定临界点．

例 5　非线性方程组的稳定性分析

对以下每个平面自治方程组的临界点是否稳定进行判断(如果可能的话)：

(a) $\begin{cases}x'=x^2+y^2-6\\ y'=x^2-y\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x'=0.01x(100-x-y)\\ y'=0.05y(60-y-0.2x)\end{cases}$

解　每个方程组的临界点已经在 10.1 节的例 4 中确定了．

(a)方程组的临界点为 $(\sqrt{2},2)$ 和 $(-\sqrt{2},2)$，雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2x & -1\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{g}'((\sqrt{2},\ 2))=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 4\\ 2\sqrt{2} & -1\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{g}'((-\sqrt{2},\ 2))=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2} & 4\\ -2\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}_1$ 的行列式为负，所以 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征值是正实数．故 $(\sqrt{2},2)$ 为不稳定临界点．矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 的行列式为正，轨迹为负，所以这两个特征值都有负实部．由此可得 $(-\sqrt{2},2)$ 为稳定临界点．

(b)方程组的临界点为(0，0)、(0，60)、(100，0)及(50，50)，雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}0.01(100-2x-y) & -0.01x\\ -0.01y & 0.05(60-2y-0.2x)\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{g}'((0,\ 0))=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{g}'((0,\ 60))=\begin{pmatrix}0.4 & 0\\ -0.6 & -3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{g}'((100,\ 0))=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{g}'((50,\ 50))=\begin{pmatrix}-0.5 & -0.5\\ -0.5 & -2.5\end{pmatrix}.$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行列式和轨迹都为正，所以其特征值有正实部．故(0，0)为不稳定临界点．

矩阵 $\boldsymbol{A}_2$和 $\boldsymbol{A}_3$的行列式为负，所以它们都有一个正的特征值．故(0，60)和(100，0)都为不稳定临界点．因为矩阵 $\boldsymbol{A}_4$的行列式为正且轨迹为负，所以(50，50)为稳定临界点． ■

在例 5 中我们没有计算 $\tau^2-4\Delta$(如在 10.2 节中所做的那样)并且把临界点进一步分为稳定点、稳定螺旋点、鞍点等类型．例如，在例 5(a)中 $\boldsymbol{X}_1=(-\sqrt{2},2)$，$\tau^2-4\Delta<0$，如果方程组是线性的，则可知 $\boldsymbol{X}_1$为稳定螺旋点．图 10.24 给出了由数值求解程序得到的几条在 $\boldsymbol{X}_1$附近的解曲线，每个解都螺旋地趋近于临界点．

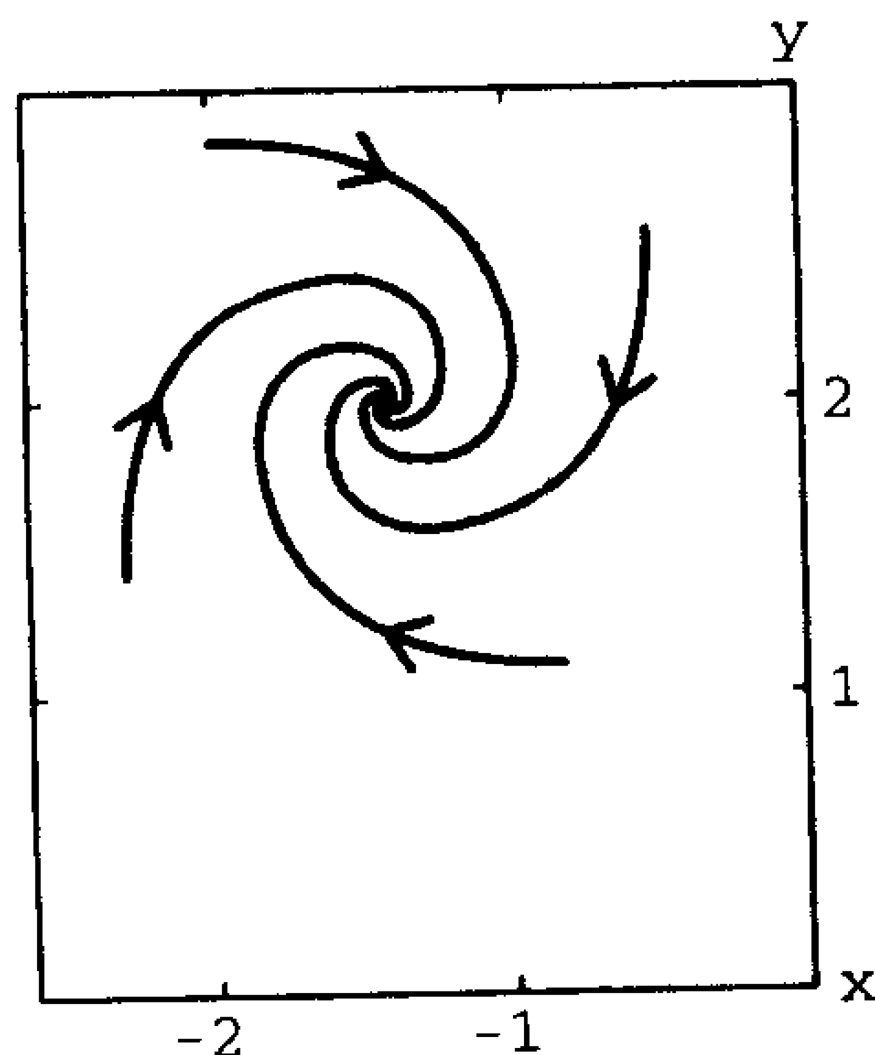


图 10.24

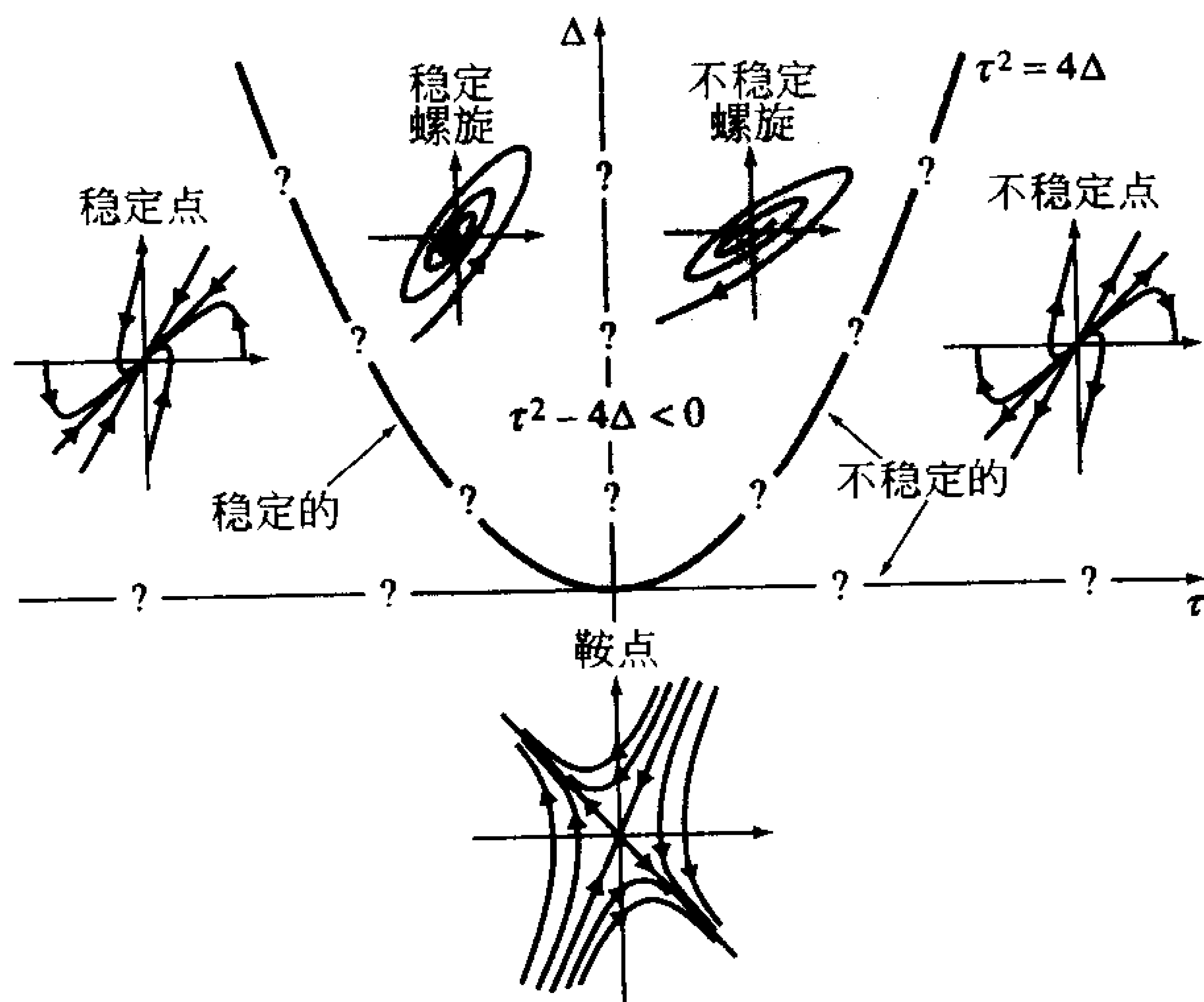


图 10.25

临界点的分类 我们很自然地想到是否能通过一些类似于对线性方程组所做的分析，推出非线性自治方程组在临界点 $\boldsymbol{X}_1$附近的更多几何性质．这个问题的答案总结在图 10.25 中，不过应该注意以下几点：

(ⅰ)类似于线性方程组，这里的临界点也可分为 5 类(稳定点、稳定螺旋点、不稳定螺旋点、不稳定点及鞍点)．这里的解与线性方程组中的解有大致相同的几何特性，且 $\boldsymbol{X}_1$的邻域越小，相似性就越强．

(ⅱ)如果 $\tau^2=4\Delta$ 且 $\tau>0$，则临界点 $\boldsymbol{X}_1$不稳定，但无法确定在这种边界情况下的 $\boldsymbol{X}_1$ 是不稳定螺旋点、不稳定点，还是退化不稳定点．类似地，若有 $\tau^2=4\Delta$ 且 $\tau<0$，则 $\boldsymbol{X}_1$是稳定的但可能是稳定螺旋点、稳定点或退化稳定点．

(ⅲ)如果 $\tau=0$ 且 $\Delta>0$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X})$的特征值为纯虚数，在这种边界情况下，$\boldsymbol{X}_1$可能是稳定螺旋点、不稳定螺旋点或中心，所以无法确定它是稳定的还是不稳定的．

例 6 非线性方程组的临界点分类

确定例 5(b)中平面自治方程组的每个临界点属于以下哪种类型：稳定点、稳定螺旋点、不稳定螺旋点、不稳定点或鞍点．

解 相应于(0，0)的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，有 $\Delta=3$，$\tau=4$，所以 $\tau^2-4\Delta=4$，故(0，0)为不稳定点．对于(0，60)和(100，0)，因为 $\Delta<0$，所以它们都是鞍点．对于矩阵 $\boldsymbol{A}_4$，$\Delta>0$，$\tau<0$，且τ^2-

$4\Delta>0$，所以(50，50)为稳定点．请利用数值求解程序验证这些结论． ■

例7 软弹簧的稳定性分析

回顾5.3节中的二阶微分方程 $mx''+kx+k_1x^3=0$，$k>0$，它表示质量为 m 的物体在非线性弹簧的作用下做自由无阻尼振动的模型．如果 $k=1$，$k_1=-1$，那么弹簧被称为软弹簧，相应于非线性二阶微分方程 $x''+x-x^3=0$ 的平面自治方程组为

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x^3-x. \end{cases}$$

求出其临界点并进行分类(如果可能的话)．

解 因为 $x^3-x=x(x^2-1)$，所以临界点为(0，0)、(1，0)和(−1，0)．相应的雅可比矩阵为

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{g}'((0,\ 0))=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2=\mathbf{g}'((1,\ 0))=g'((-1,\ 0))=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det\mathbf{A}_2<0$，所以临界点(1，0)和(−1，0)都是鞍点．矩阵 $\mathbf{A}_1$ 的特征值为 $\pm i$，所以由前面的(ⅲ)，临界点(0，0)的状态无法确定，它可能为稳定螺旋点、不稳定螺旋点或中心点． ■

相平面法 有时可以利用线性化方法获得解在临界点附近的信息．但如果我们感兴趣的解初始位置 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$ 不在临界点附近，或者我们希望能获得解曲线组的全局情况，那么线性化方法没有太大帮助．相平面法(phase-plane method)是基于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

的，我们想用求解一阶微分方程的方法(请参考第2章)求出 y，y 是关于 x 的函数．如例8和例9所示，这一方法有时可以用来确定如例7中的(0，0)那样的临界点是稳定螺旋点、不稳定螺旋点还是中心点．

例8 相平面法

利用相平面法确定平面自治方程组

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = x^2 \end{cases}$$

的唯一临界点(0，0)的类型．

解 方程组的雅可比矩阵

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X})=\begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

的行列式在(0，0)处为0，所以它在临界点(0，0)处的性质还不能确定．利用相平面法，可以得到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{x^2}{y^2},$$

由变量分离法很容易求解

$$\int y^2\mathrm{d}y=\int x^2\mathrm{d}x \text{ 或 } y^3=x^3+c.$$

若 $\mathbf{X}(0)=(0,\ y_0)$，则有 $y^3=x^3+y_0{}^3$ 或 $y=\sqrt[3]{x^3+y_0{}^3}$. 图 10.26 给出了相应于不同 y_0 取值的解曲线集合. 这个相平面可以清晰地表明临界点的性质：无论解在开始时有多接近(0, 0)，$\mathbf{X}(t)$ 总会随时间 t 的增加而远离原点. 所以临界点(0, 0)是不稳定的. ■

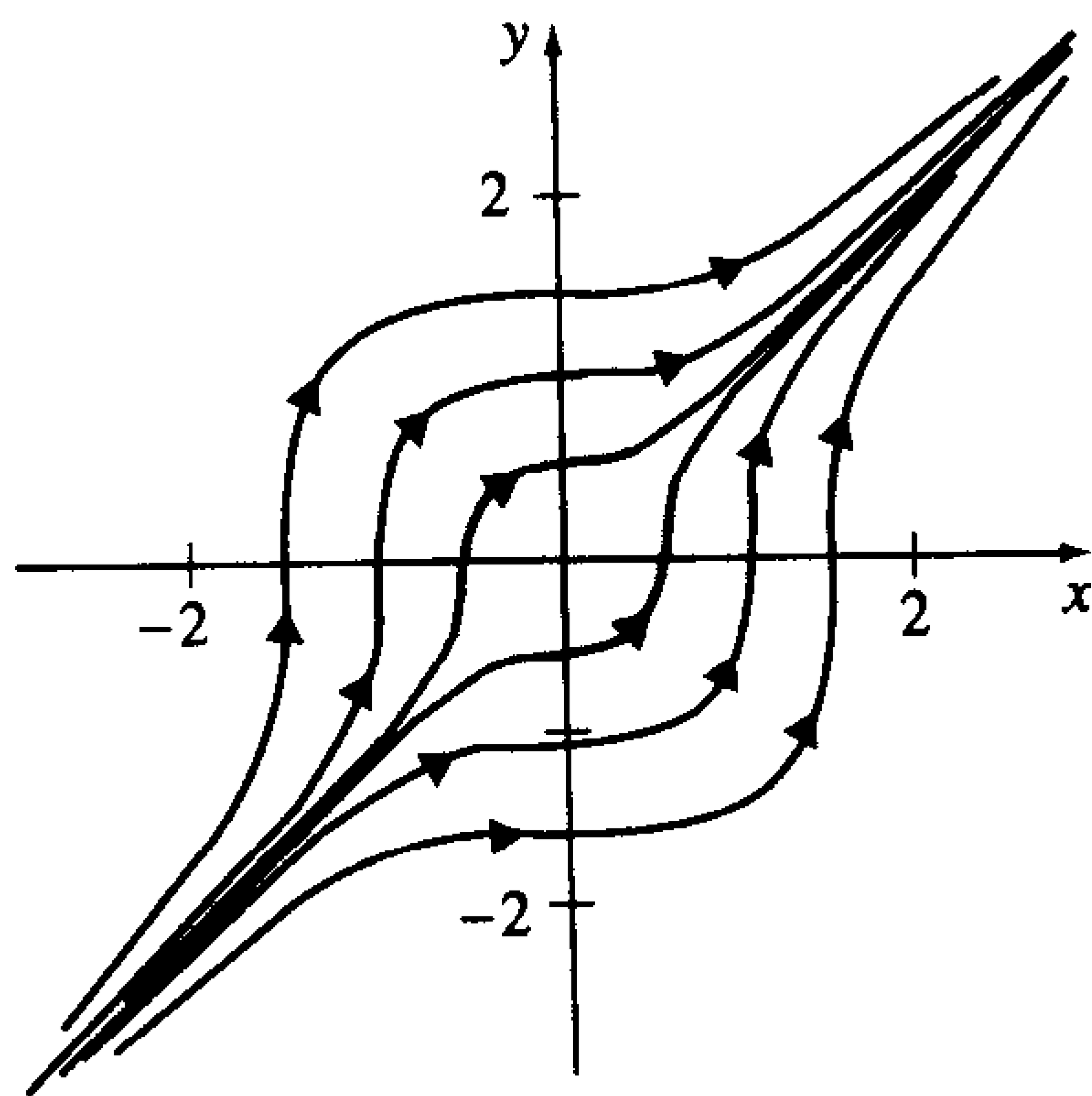


图 10.26

例 9 软弹簧的相平面分析

利用相平面法确定 $x''+x-x^3=0$ 的解在(0, 0)邻域内的性质.

解 设 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=y$，则 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=x^3-x$. 由此可得一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{x^3-x}{y},$$

它可用变量分离法求解. 对

$$\int y\mathrm{d}y=\int(x^3-x)\mathrm{d}x \text{ 积分，得} \frac{y^2}{2}=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+c.$$

配方后，可将解写成 $y^2=(x^2-1)^2/2+c_0$. 如果 $\mathbf{X}(0)=(x_0,\ 0)$，其中 $0<x_0<1$，则 $c_0=-(x_0{}^2-1)^2/2$，所以

$$y^2=\frac{(x^2-1)^2}{2}-\frac{(x_0^2-1)^2}{2}=\frac{(2-x^2-x_0^2)(x_0^2-x^2)}{2}.$$

注意当 $x=-x_0$ 时，$y=0$. 此外，当 $-x_0<x<x_0$ 时，等式右边为正，所以相应于每个 x 有两个 y 的值. 满足 $\mathbf{X}(0)=(x_0,\ 0)$ 的解 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ 是周期性的，所以(0, 0)为中心点.

图 10.27 给出了原方程组的解曲线族，即相图. 我们可以利用原平面自治方程组来确定每条轨迹的运动方向. ■

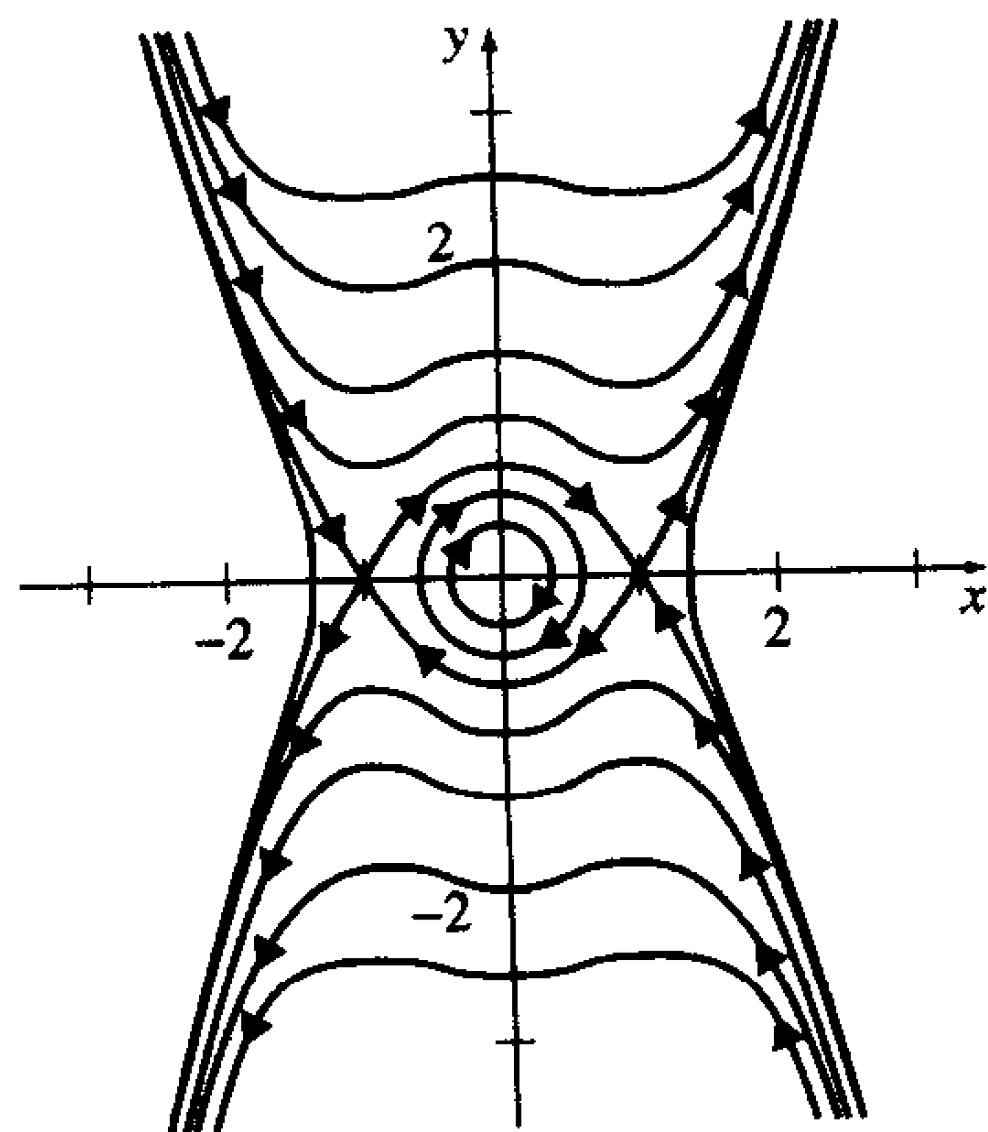


图 10.27

练习 10.3

1. 对于非线性自治方程组

$$x'=\alpha x-\beta y+y^2$$
$$y'=\beta x+\alpha y-xy$$

证明当 $\alpha<0$ 时，(0, 0)为渐近稳定临界点，当 $\alpha>0$ 时，它为不稳定临界点. [提示：将方程组变为极坐标形式.]

2. 一个平面自治方程组的极坐标形式为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r(5-r)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1.$$

证明当且仅当 $\alpha<0$ 时，(0, 0)为它的渐近稳定临界点.

在习题 3～10 中，不求解方程，判断所给一阶自治微分方程组的临界点是渐近稳定的还是不稳定的. 假设所有的常数都为正.

3. $\frac{dx}{dt}=kx(n+1-x)$

4. $\frac{dx}{dt}=-kx\ln\frac{x}{K}$，$x>0$

5. $\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)$

6. $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

7. $\frac{dx}{dt}=k(\alpha-x)(\beta-x)$，$\alpha>\beta$

8. $\frac{dx}{dt}=k(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)$，$\alpha>\beta>\gamma$

9. $\frac{dP}{dt}=P(a-bP)(1-cP^{-1})$，$P>0$，$a<bc$

10. $\frac{dA}{dt}=k\sqrt{A}(K-\sqrt{A})$，$A>0$

在习题 11～20 中，对所给平面自治方程组的每个临界点进行分类(如果可能的话)，类型有稳定点、稳定螺旋点、不稳定螺旋点、不稳定点及鞍点.

11. $x'=1-2xy$
$y'=2xy-y$

12. $x'=x^2-y^2-1$
$y'=2y$

13. $x'=y-x^2+2$
$y'=x^2-xy$

14. $x'=2x-y^2$
$y'=-y+xy$

15. $x'=-3x+y^2+2$
$y'=x^2-y^2$

16. $x'=xy-3y-4$
$y'=y^2-x^2$

17. $x'=-2xy$
$y'=y-x+xy-y^3$

18. $x'=x(1-x^2-3y^2)$
$y'=y(3-x^2-3y^2)$

19. $x'=x\left(10-x-\frac{1}{2}y\right)$
$y'=y(16-y-x)$

20. $x'=-2x+y+10$
$y'=2x-y-15\frac{y}{y+5}$

在习题 21～26 中，对所给二阶微分方程的临界点进行分类(如果可能的话)，类型有稳定点、稳定螺旋点、不稳定螺旋点、不稳定点及鞍点.

21. $\theta''=(\cos\theta-0.5)\sin\theta$，$|\theta|<\pi$

22. $x''+x=\left(\frac{1}{2}-3(x')^2\right)x'-x^2$

23. $x''+x'(1-x^3)-x^2=0$

24. $x''+4\frac{x}{1+x^2}+2x'=0$

25. $x''+x=\varepsilon x^3$，$\varepsilon>0$

26. $x''+x-\varepsilon x|x|=0$，$\varepsilon>0$ $\left[提示：\frac{d}{dx}x|x|=2|x|.\right]$

27. 证明当 $\beta<0$ 时(0，0)为非线性二阶微分方程

$$(1+\alpha^2x^2)x''+(\beta+\alpha^2(x')^2)x=0$$

的鞍点.

28. 证明当 $\alpha\beta>1$ 时，动力系统

$$x'=-\alpha x+xy$$
$$y'=1-\beta y-x^2$$

存在唯一临界点，且当 $\beta>0$ 时这个临界点是稳定的.

29. (a)通过绘出 $-x+y-x^3=0$ 和 $-x-y+y^2=0$ 的图像说明平面自治方程组

$$x'=-x+y-x^3$$
$$y'=-x-y+y^2$$

有两个临界点. 确定临界点(0，0)的类型.

(b)证明第二个临界点 $\mathbf{X}_1=(0.880\ 54，1.563\ 27)$ 为鞍点.

30. (a)证明(0，0)是瑞利微分方程(Raleigh differential equation)

$$x''+\varepsilon\left(\frac{1}{3}(x')^3-x'\right)+x=0.$$

唯一的临界点.

(b)证明当 $\varepsilon>0$ 时，点(0，0)是不稳定的. 什么时候(0，0)为不稳定螺旋点？

(c)证明当 $\varepsilon<0$ 时，点(0，0)是稳定的. 什么时候(0，0)为稳定螺旋点？

(d)证明当 $\varepsilon=0$ 时，点(0，0)为中心.

31. 利用相平面法证明(0，0)为非线性二阶微分方程 $x''+2x^3=0$ 的中心.

32. 利用相平面法证明非线性二阶微分方程 $x''+2x-x^2=0$ 满足 $x(0)=1$ 及 $x'(0)=0$ 的解是周期性的.

33. (a)求出平面自治方程组

$$x'=2xy$$
$$y'=1-x^2+y^2,$$

的临界点并说明不能通过线性化获得关于这些临界点性质的信息.

(b)利用相平面法说明(a)中的临界点都是中心.

[提示：令 $u=y^2/x$，并证明 $(x-c)^2+y^2=c^2-1$.]

34. 原点是非线性二阶微分方程 $x''+(x')^2+x=0$ 唯一的临界点.

(a)证明由相平面法可得到伯努利微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-y-xy^{-1}$.

(b)证明满足 $x(0)=1/2$ 及 $x'(0)=0$ 的解不是周期性的.

35. 非线性二阶微分方程 $x''+x-x^3=0$ 的一个解满足 $x(0)=0$ 及 $x'(0)=v_0$. 利用相平面法确定什么时候解是周期性的. [提示：请参考例 9.]

36. 利用相关理论分析行星运动时可得非线性微分方程 $x''+x=1+\varepsilon x^2$. 对相应的平面自治方程组的所有临界点进行分类(如果可能的话).

37. 在 LCR 电路中有一个非线性电容，电压不再由 q/C 表示而是更精确地描述为 $\alpha q+\beta q^3$，其中 α 和 β 为常数且 $\alpha>0$. 那么 5.1 节中自由电路的微分方程(34)可被

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\alpha q+\beta q^3=0.$$

代替. 求出这个非线性微分方程的所有临界点并对它们进行分类. [提示：分成 $\beta>0$ 和 $\beta<0$ 两种情况讨论.]

38. 非线性方程 $mx''+kx+k_1x^3=0$，$k>0$，表示一个连接在弹簧上质量为 m 的物体做自由无阻尼振动的通用模型. 如果 $k_1>0$，则弹簧被称为是硬的(请参考 5.3 节中的例 1). 确定 $x''+x+x^3=0$ 的解在(0，0)邻域内的性质.

39. 非线性方程 $\theta''+\sin\theta=1/2$ 可看作是一个钟摆的数学模型，它具有恒定的施迫函数.

(a)证明($\pi/6$，0)和($5\pi/6$，0)为相应平面自治方程的临界点.

(b)利用线性化确定临界点($5\pi/6$，0)的类型.

(c)利用相平面法确定临界点($\pi/6$，0)的类型.

讨论题

40. (a)证明(0，0)为平面自治方程组

$$x'=x^4-2xy^3$$
$$y'=2x^3y-y^4$$

孤立的临界点. 但无法通过线性化获得关于临界点性质的信息.

(b)利用相平面法证明 $x^3+y^3=3cxy$. 这条经典的曲线被称为笛卡儿叶形线. 叶形线的参数方程为

$$x=\frac{3ct}{1+t^3},\quad y=\frac{3ct^2}{1+t^3}.$$

[提示：关于 x 和 y 的微分方程是齐次的.]



(c)利用绘图软件或数值求解程序绘出解曲线. 能够根据图像确定临界点是稳定还是不稳定的吗？可以确定临界点的类型，即是节点、鞍点、中心或螺旋点吗？请加以解释.

10.4 利用自治方程组建模

很多物理方面的问题都会用到形如 $x''=g(x, x')$ 的非线性二阶微分方程. 例如，在 5.1 节对自由阻尼运动的分析中，假设阻力与速度 x' 成正比，那么得到的模型 $mx''=-\beta x'-kx$ 为线性微分方程. 但如果阻力大小与速度的平方成正比，则新的微分方程 $mx''=-\beta x'|x'|-kx$ 是非线性的. 相应的平面自治方程组

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-\dfrac{\beta}{m}y|y|-\dfrac{k}{m}x \end{cases}$$

是非线性的. 在本节中，将利用 10.3 的结果分析非线性钟摆、在曲线上运动的小圆珠、Lotka-Volterra 捕食者-被捕食者模型以及 Lotka-Volterra 竞争模型. 更多的模型将在练习中给出.

非线性钟摆 在 5.3 节的(6)式中，我们证明了简单钟摆的偏移角 θ 满足非线性二阶微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

当令 $x=\theta$ 及 $y=\theta'$ 时，这个二阶微分方程可以改写成动力系统

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-\dfrac{g}{l}\sin x. \end{cases}$$

它的临界点为 $(\pm k\pi, 0)$，且容易证明雅可比矩阵为

$$\mathbf{g}'((\pm k\pi, 0))=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1}\dfrac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 $k=2n+1$，$\Delta<0$，那么所有临界点 $(\pm(2n+1)\pi, 0)$ 都为鞍点. 特别地，临界点 $(\pi, 0)$ 如预期的那样是不稳定的. 请参考图 10.28. 当 $k=2n$ 时，特征值为纯虚数，所以这些临界点的性质也就无法确定. 因为假设钟摆没有受到阻力，所以我们预期所有临界点 $(\pm 2n\pi, 0)$ 都是中心. 可以用相平面法证明这一点. 由

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=-\frac{g}{l}\frac{\sin x}{y}$$

可得 $y^2=(2g/l)\cos x+c$. 如果 $\mathbf{X}(0)=(x_0, 0)$，那么

$$y^2=\frac{2g}{l}(\cos x-\cos x_0).$$

注意当 $x=-x_0$ 时 $y=0$，并且对于 $|x|<|x_0|<\pi$ 有 $(2g/l)(\cos x-\cos x_0)>0$. 所以每个 x 有两个相应的 y 值，满足 $\mathbf{X}(0)=(x_0, 0)$ 的解 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ 是周期性的. 所以可得结论：(0, 0)是一个中心. 经过观察发现，相应于大的初速度，解中的 $x=\theta$ 会增大，如图 10.29 所示. 在这种情况下，钟摆会围绕其支点整圈地旋转.

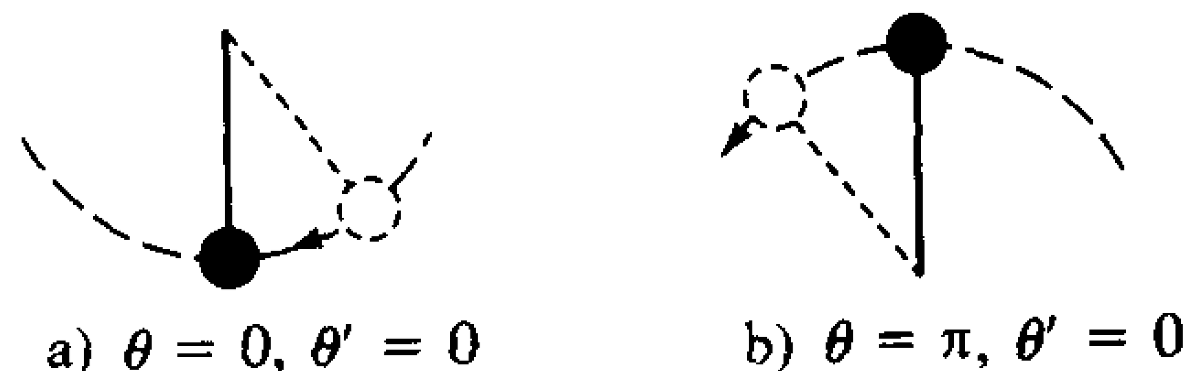


图 10.28

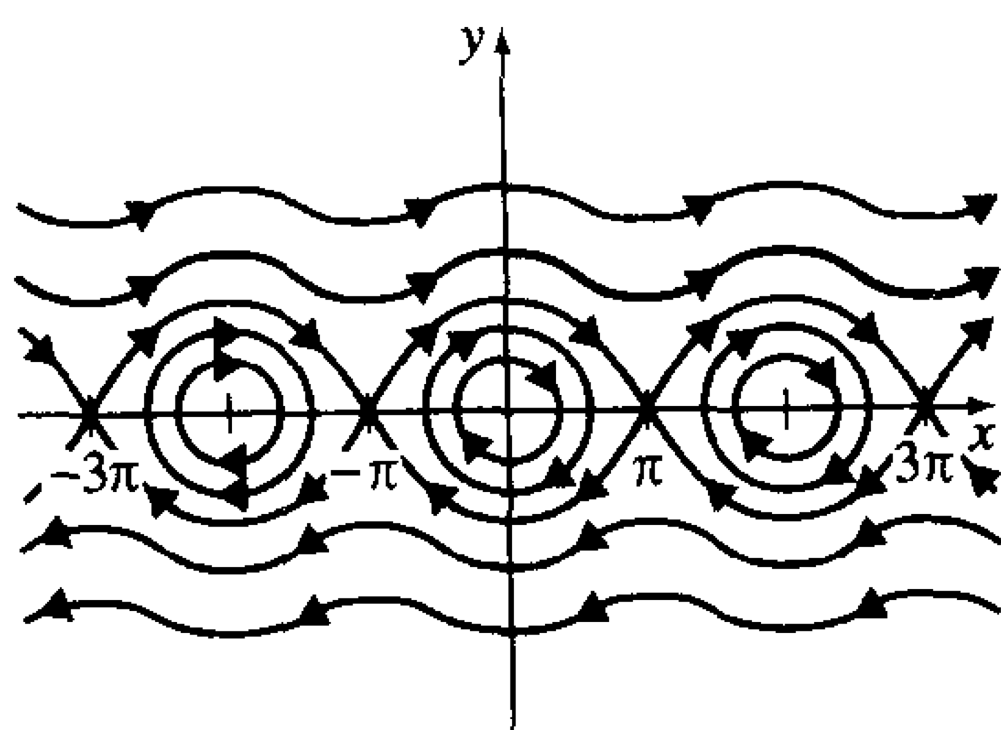


图 10.29

例 1 钟摆微分方程的周期性解

一个在均衡位置 $\theta=0$ 的钟摆有初始角速度 ω_0 rad/s. 确定在什么条件下得到的运动是周期性的.

解 这里要求平面自治方程组满足 $\mathbf{X}(0)=(0, \omega_0)$ 的解. 由 $y^2=(2g/l)\cos x+c$ 可得

$$y^2=\frac{2g}{l}\left(\cos x-1+\frac{l}{2g}\omega_0^2\right).$$

要确定解 $\mathbf{X}(t)$ 是周期性的，需要证明在 $-\pi$ 到 π 之间存在由 $x=\pm x_0$ 截取的一段区间，且对于 $|x|<|x_0|$，上式右边为正. 每一个这样的 x 值对应于两个 y 值.

如果 $y=0$，$\cos x=1-(l/2g)\omega_0^2$，且有 $1-(l/2g)\omega_0^2>-1$，那么这个方程在 $-\pi$ 到 π 之间有两个解 $x=\pm x_0$. 注意对于 $|x|<|x_0|$，有 $(2g/l)(\cos x-\cos x_0)$ 为正. 这个对初始角速度的限制可以写成 $|\omega_0|<2\sqrt{g/l}$. ■

非线性振动：滑动的小圆珠 如图 10.30 所示，假设一个质量为 m 的小圆珠沿着函数 $z=f(x)$ 描述的曲线滑动. 非线性振动可以通过改变曲线形状和改变施于小圆珠的力得到.

由重力 $W=mg$ 分解出来的切向力 $\mathbf{F}$ 大小为 $mg\sin\theta$，所以 $\mathbf{F}$ 在 x 轴上的分量为 $F_x=-mg\sin\theta\cos\theta$. 因为 $\tan\theta=f'(x)$，所以可以利用恒等式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ 得到

$$F_x=-mg\sin\theta\cos\theta=-mg\frac{f'(x)}{1+[f'(x)]^2}.$$

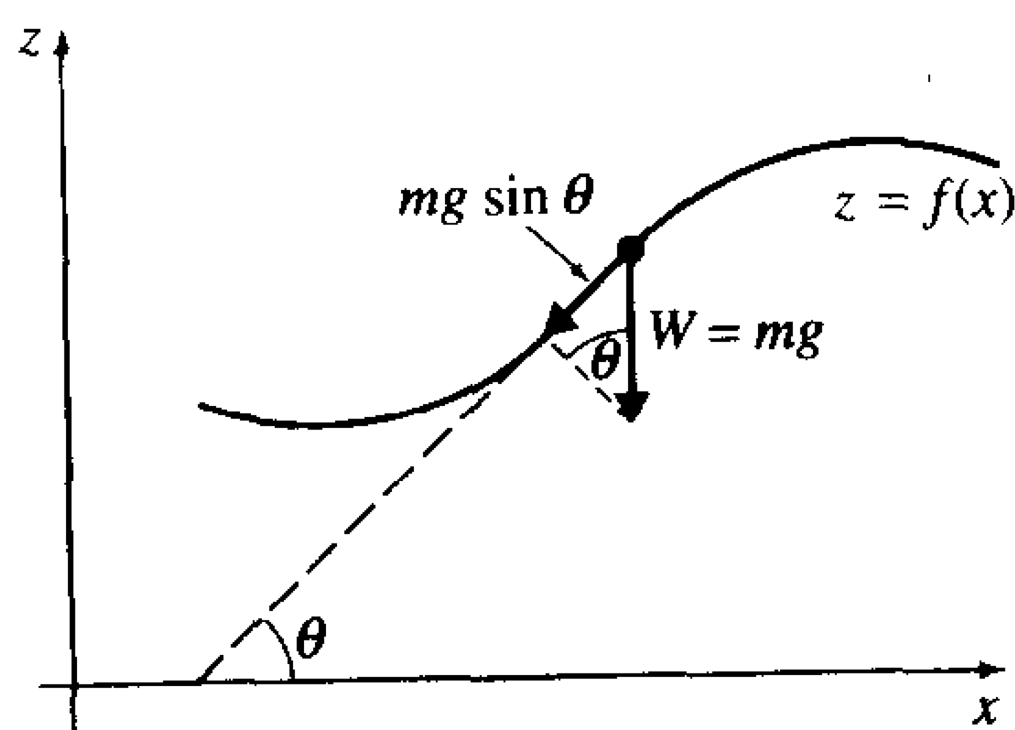


图 10.30

假设(如 5.1 节)在小圆珠上施加一个与其运动方向相反的阻力 $\mathbf{D}$，是小圆珠速度的常数倍，则 $\mathbf{D}$ 在 x 轴上的分量为 $D_x=-\beta x'$. 如果忽略曲线与小圆珠之间的摩擦力并假设系统中没有其他力的影响，那么由牛顿第二定律可得

$$mx''=-mg\frac{f'(x)}{1+[f'(x)]^2}-\beta x',$$

相应的平面自治方程组为

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=-g\dfrac{f'(x)}{1+[f'(x)]^2}-\dfrac{\beta}{m}y.\end{cases}$$

如果 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,\ y_1)$是方程组的临界点，$y_1=0$，因此有 $f'(x_1)=0$，那么小圆珠会在某点停下，而这点的切线是水平的．若 f 二次可微，则 $\boldsymbol{X}_1$ 处的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{X}_1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -gf''(x_1) & -\beta/m\end{pmatrix},$$

所以 $\tau=-\beta/m$，$\Delta=gf''(x_1)$，且 $\tau^2-4\Delta=\beta^2/m^2-4gf''(x_1)$．利用 10.3 节的结果，有以下结论：

（ⅰ）$f''(x_1)<0$.

$x=x_1$ 为相对极大值，因为 $\Delta<0$，所以 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,\ 0)$为不稳定鞍点．

（ⅱ）$f''(x_1)>0$ 且 $\beta>0$.

相对极小值出现在 $x=x_1$ 处，因为 $\tau<0$ 且 $\Delta>0$，所以 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,\ 0)$为稳定临界点．如果 $\beta^2>4gm^2f''(x_1)$，那么系统称为是过阻尼的(overdamped)，临界点为稳定点．如果 $\beta^2<4gm^2f''(x_1)$，那么系统称为是欠阻尼的(underdamped)，临界点为稳定螺旋点．如果 $\beta^2=4gm^2f''(x_1)$，则无法确定稳定临界点的准确性质．

（ⅲ）$f''(x_1)>0$ 且系统无阻尼($\beta=0$).

在这种情况下，特征值为纯虚数，但是可以利用相平面法证明临界点为中心．所以 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,\ 0)$附近的解 $\boldsymbol{X}(0)=(x(0),\ x'(0))$是周期性的．

例 2　小圆珠沿正弦波形滑动

一个重量为 10g 的小圆珠沿曲线 $z=\sin x$ 滑动．根据结论（ⅱ），在 $x_1=-\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 处取得的相对极小点是稳定临界点(请参考图 10.31)．因为 $f''(-\pi/2)=f''(3\pi/2)=1$，所以若 $\beta^2<4gm^2$，则系统是欠阻尼的．如果使用标准国际单位，$m=0.01\text{kg}$ 且 $g=9.8\text{m/s}^2$，那么系统为欠阻尼的条件变为 $\beta^2<3.92\times10^{-3}$.

如果阻尼常数为 $\beta=0.01$，那么这两个临界点都是稳定螺旋点，分别相应于初值条件 $\boldsymbol{X}(0)=(x(0),\ x'(0))=(-2\pi,\ 10)$和 $\boldsymbol{X}(0)=(-2\pi,\ 15)$的两个解可由数值求解程序求得，其图像如图 10.32 所示．当 $x'(0)=10$ 时，小圆珠有足够的冲量翻过 $x=-3\pi/2$ 处的波峰，但无法翻过 $x=\pi/2$ 处的波峰．然后小圆珠将靠近 $x=-\pi/2$ 处的相对极小点．如果 $x'(0)=15$，则小圆珠可以翻越这两个波峰，但它还是会回到 $x=3\pi/2$ 处的波谷并靠近点$(3\pi/2,\ -1)$．可以利用数值求解程序验证其他初值条件．

图 10.33 给出了无阻尼情况下由数值求解程序得到的解曲线集合．因为 $\beta=0$，所以相应于 $x_1=-\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 的临界点是中心．当 $\boldsymbol{X}(0)=(-2\pi,\ 10)$时，小圆珠有足够的冲量翻越所有的波峰．图像也说明，若小圆珠静止地在 $x=-3\pi/2$ 和 $x=\pi/2$ 之间释放，则得到的运动是周期性的．

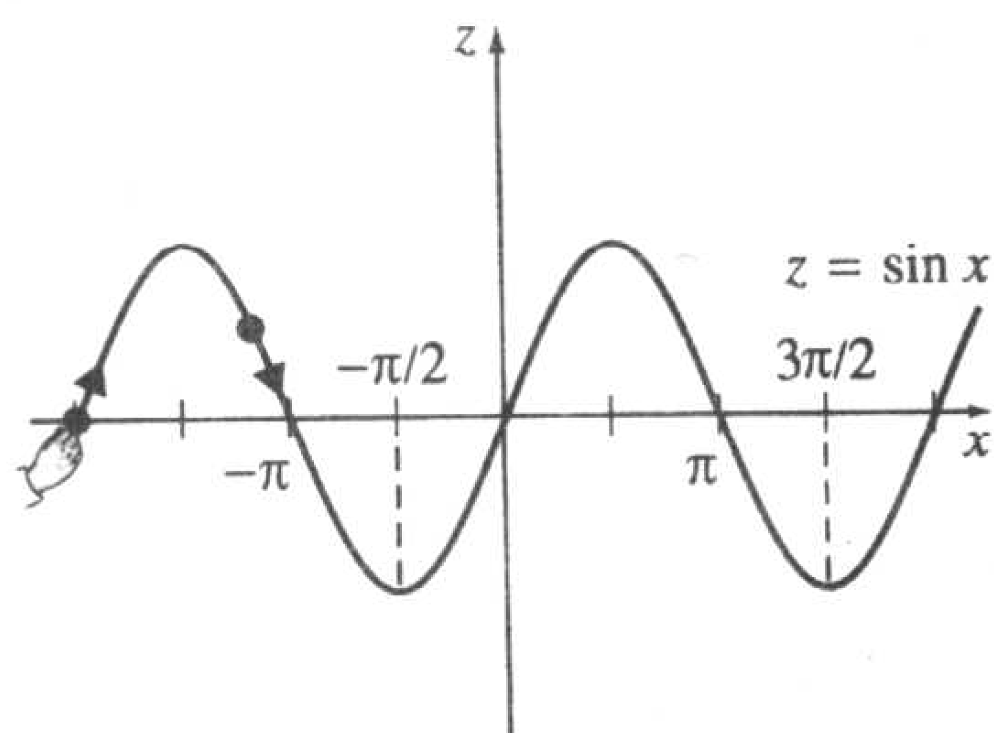


图 10.31

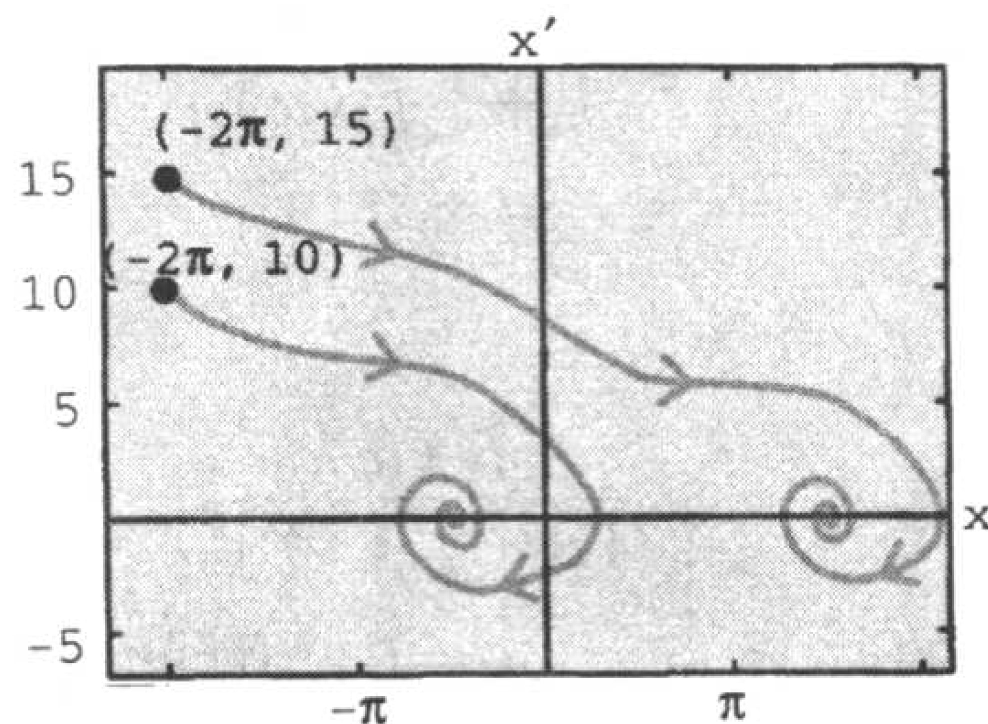


图 10.32 $\beta=0.01$

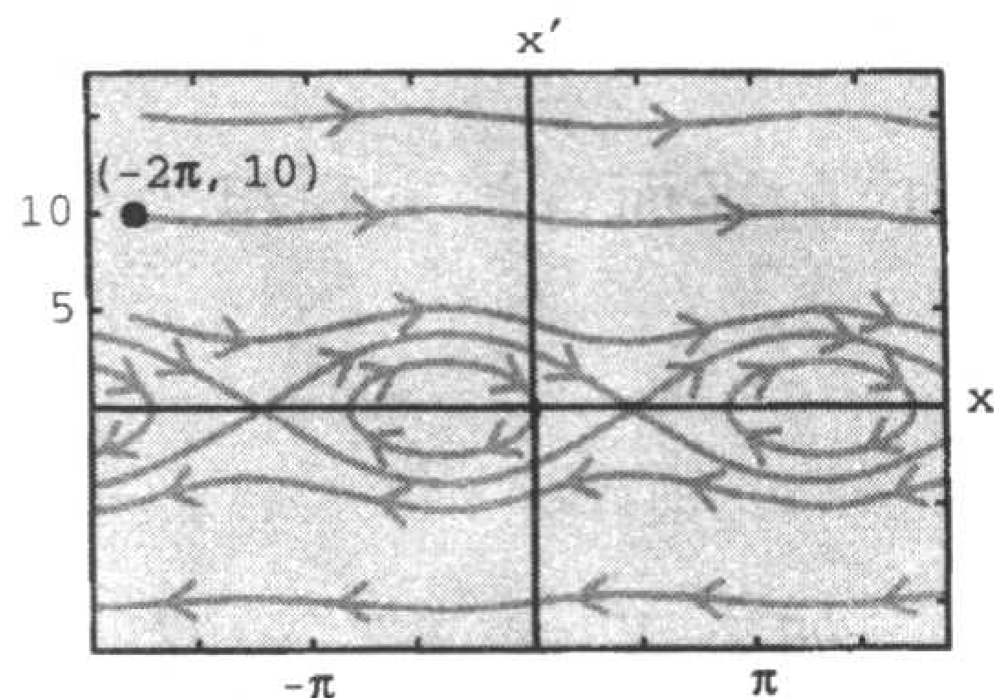


图 10.33 $\beta=0$ ■

Lotka-Volterra 捕食者-被捕食者模型 捕食者-被捕食者的相互影响(predator-prey interaction)发生在两种动物之间，其中一种动物(捕食者)以另一种动物(被捕食者)为食. 例如，雪枭几乎仅以一种在北极很常见的啮齿动物旅鼠为食，而旅鼠以北极苔原植物为食. 对北极地区多种哺乳动物数量循环的观察引起了人们用数学工具解释捕食者-被捕食者相互影响的兴趣. 例如，加拿大的 Mackenzie 河地区，猞猁的主要食物是雪兔，且两种动物的数量循环周期都是 10 年.

有很多捕食者-被捕食者模型都可以推出至少有一个周期性解的平面自治方程组. 第一个这样的模型分别由生物数学家 A・Lotka(1925)和 V・Volterra(1926)各自独立构造. 如果 x 表示捕食者数量而 y 表示被捕食者数量，那么 Lotla-Volterra 模型的形式为：

$$x'=-ax+bxy=x(-a+by)$$
$$y'=-cxy+\mathrm{d}y=y(-cx+d),$$

其中 a、b、c 和 d 为正常数.

注意如果没有捕食者($x=0$)，那么有 $y'=\mathrm{d}y$，被捕食者的数量将以指数方式增长. 如果没有被捕食者，则有 $x'=-ax$，捕食者会灭绝，$-cxy$ 代表了由于捕食造成的被捕食者的死亡率. 这个模型假设这一死亡率与某特定时刻 t 的捕食者和被捕食者可能相遇的次数 xy 成正比，bxy 代表 xy 对捕食者的数量带来的正的贡献.

这一平面自治方程组的临界点为(0，0)和(d/c，a/b)，相应的雅可比矩阵为

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{g}'((0,0))=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{g}'((d/c,a/b))=\begin{pmatrix}0 & bd/c\\ -ac/b & 0\end{pmatrix}.$$

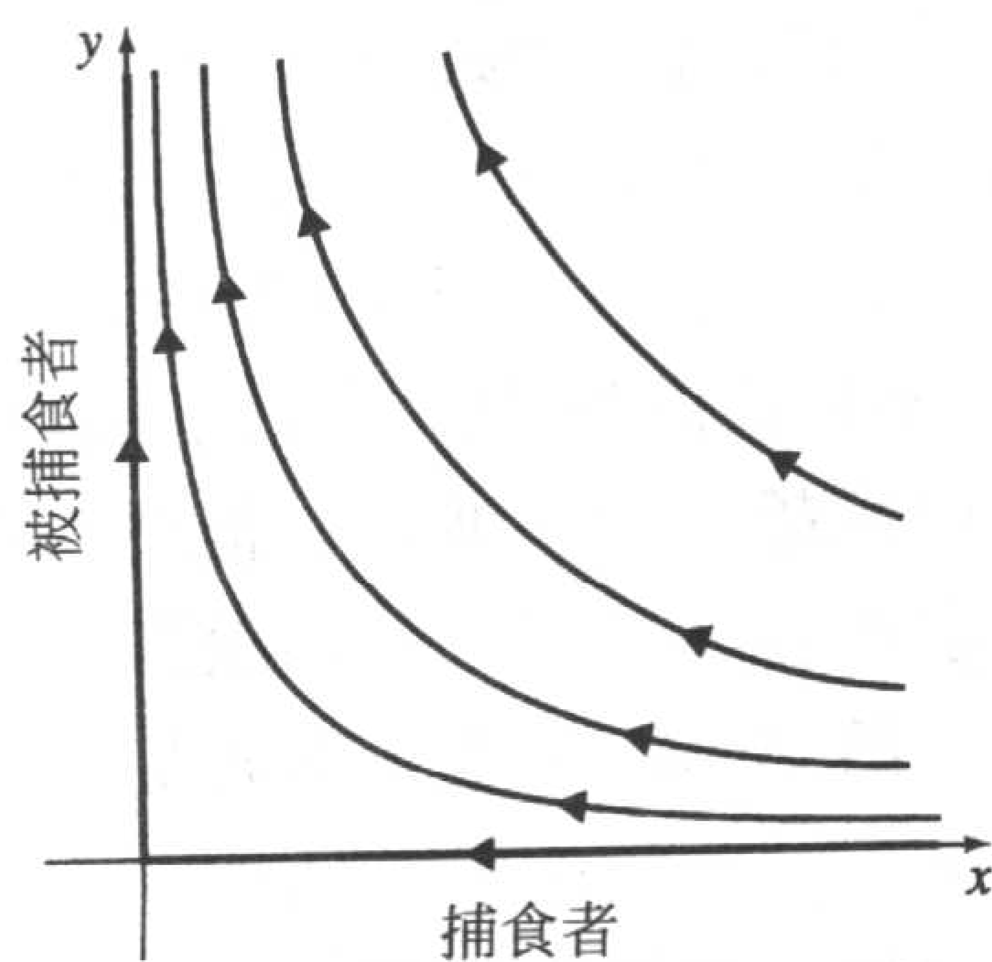


图 10.34 (0，0)点附近的解

临界点(0，0)是鞍点，图 10.34 给出了第一象限内(0，0)点附近的一个典型解的图像.

因为矩阵 $\mathbf{A}_2$ 有纯虚数特征值 $\lambda=\pm\sqrt{ad}\,\mathrm{i}$，临界点($d/c$，$a/b$)可能为中心. 这种可能性可以利用相图法分析，因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(-cx+d)}{x(-a+by)},$$

分离变量后可得

$$\int \frac{-a+by}{y}\mathrm{d}y = \int \frac{-cx+d}{x}\mathrm{d}x,$$

所以

$$-a\ln y + by = -cx + d\ln x + c_1 \text{ 或}(x^d\mathrm{e}^{-cx})(y^a\mathrm{e}^{-by}) = c_0.$$

接下来的讨论是为了说明，所有始于第一象限的解曲线都是周期性的.

典型的非负函数 $F(x)=x^d\mathrm{e}^{-cx}$ 和 $G(y)=y^a\mathrm{e}^{-by}$ 的图像在图 10.35 中给出. 不难证明 $F(x)$ 在 $x=d/c$ 处取绝对极大值，而 $G(y)$ 在 $y=a/b$ 处取绝对极小值. 注意除了 0 和绝对极大值外，F 和 G 在它们的区间上都恰好经过这些值两次.

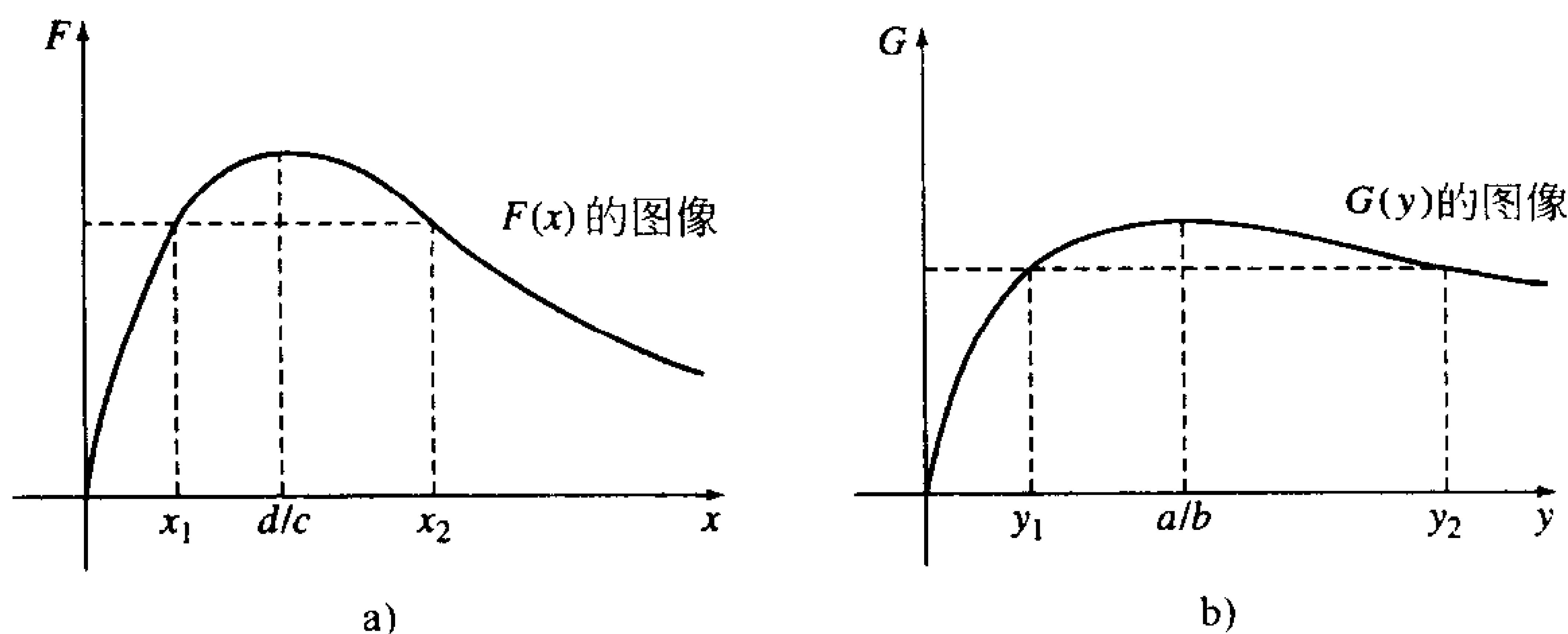


图 10.35

这些图像说明始于第一象限的某非临界点(x_0, y_0)的解曲线有如下性质.

(1)如果 $y=a/b$，那么方程 $F(x)G(y)=c_0$ 恰有两个解 x_m 和 x_M 且 $x_m<d/c<x_M$.

(2)如果 $x_m<x_1<x_M$，$x=x_1$，那么 $F(x)G(y)=c_0$ 恰有两个解 y_1 和 y_2 且 $y_1<a/b<y_2$.

(3)如果 x 在区间$[x_m, x_M]$之外，那么 $F(x)G(y)=c_0$ 无解.

我们将证明(1)并在练习中略述(2)和(3). 因为$(x_0, y_0)\neq(d/c, a/b)$，所以 $F(x_0)G(y_0)<F(d/c)\cdot G(a/b)$. 若 $y=a/b$，则有

$$0<\frac{c_0}{G(a/b)}=\frac{F(x_0)G(y_0)}{G(a/b)}<\frac{F(d/c)G(a/b)}{G(a/b)}=F(d/c).$$

所以 $F(x)=c_0/G(a/b)$ 恰有两个解 x_m 和 x_M，且 $x_m<d/c<x_M$. 一个典型周期解的图像如图 10.36 所示.

例 3　捕食者-被捕食者数量的循环

若在 Lotka-Volterra 捕食者-被捕食者模型中令 $a=0.1$，$b=0.002$，$c=0.0025$，$d=0.2$，则第一象限内的临界点为$(d/c, a/b)=(80, 50)$，并且知道这个临界点是中心. 请参考图 10.37，我们利用数值求解程序生成了这些封闭解. 初值条件 $\mathbf{X}_0$ 越靠近(80, 50)，周期解就越像相应线性方程组的椭圆解. $\mathbf{g}'((80, 50))$的特征值为 $\lambda=\pm\sqrt{ad}\mathrm{i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{10}\mathrm{i}$，所以靠近临界点的解的周期为 $p\approx10\sqrt{2}\pi$，或约等于 44.4. ■

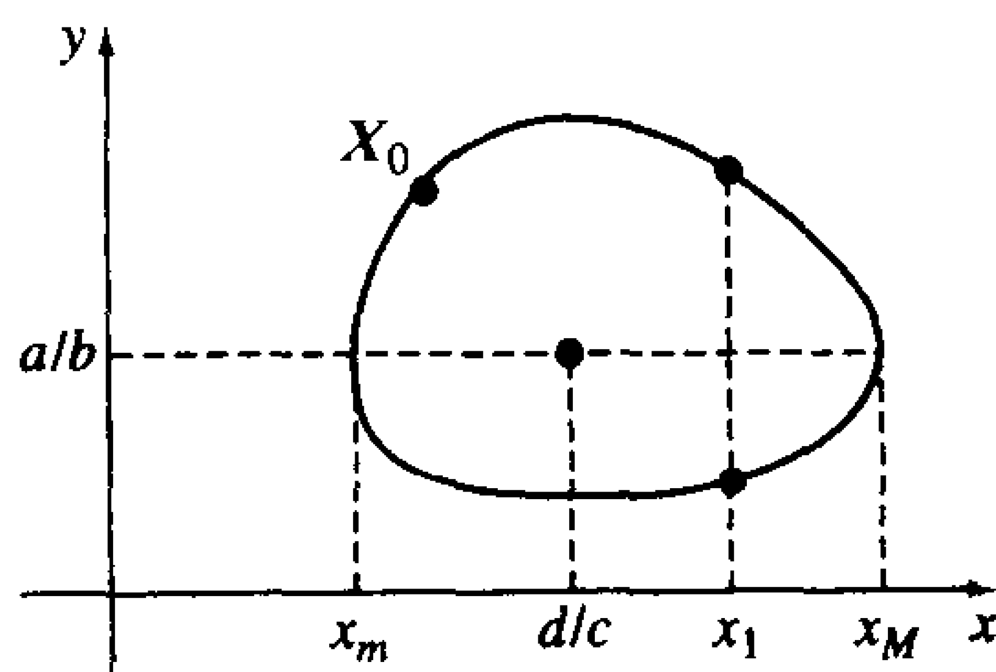


图 10.36

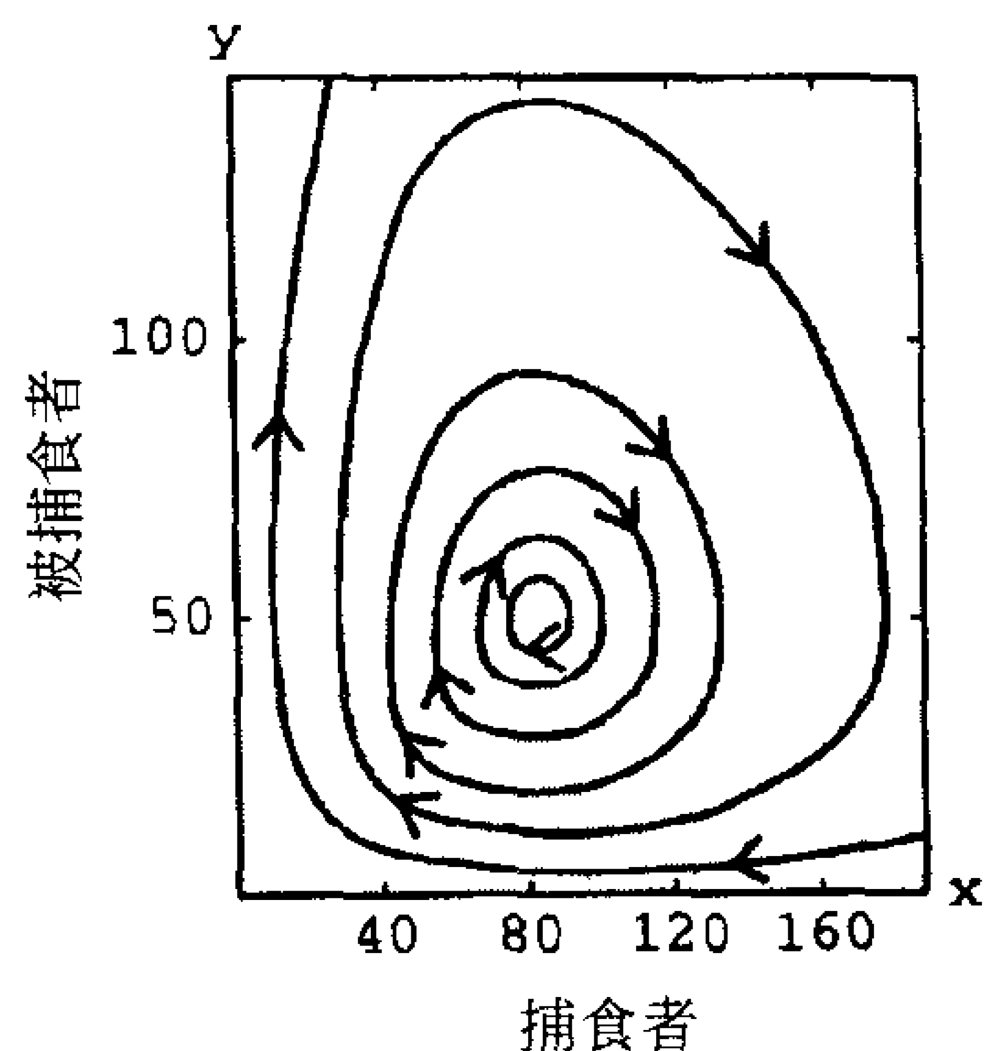
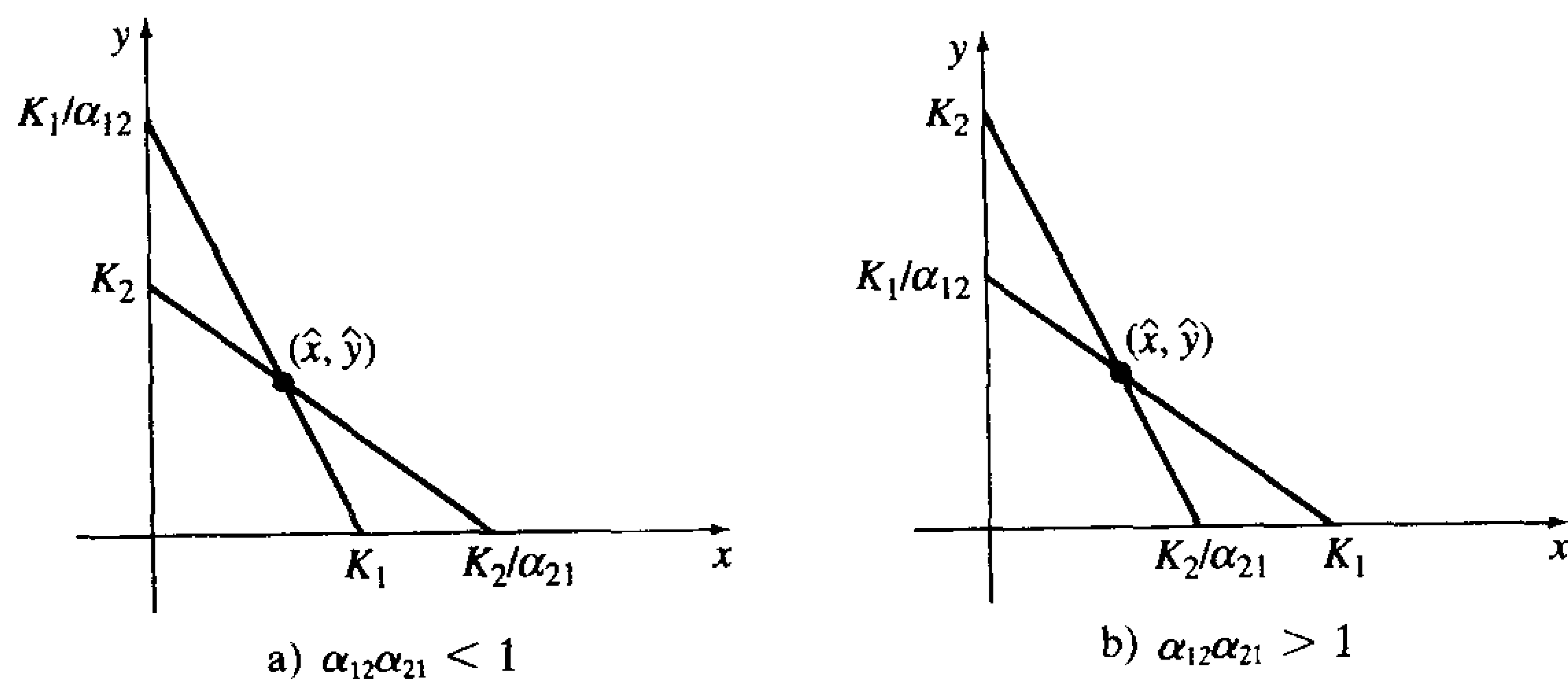


图 10.37

Lotka-Volterra 竞争模型 当两个或多个物种在一个生态系统中竞争食物、水、光和空间等资源时，就会发生竞争交互作用(competitive interaction). 一个种群对某种资源的利用会限制其他种群的生存和发展. 那么在何种情况下两个竞争性物种可以共存呢？人们构造了很多数学模型来探讨物种可以共存的条件. 如果 x 表示物种Ⅰ的数量，y 表示物种Ⅱ的数量，那么 Lotka-Volterra 模型的形式为

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r_1}{K_1}x(K_1 - x - \alpha_{12}y) \\ y' &= \frac{r_2}{K_2}y(K_2 - y - \alpha_{21}x). \end{aligned} \tag{1}$$

注意到当物种Ⅱ不存在时($y=0$)，有 $x'=(r_1/K_1)x(K_1-x_1)$，第一个种群以逻辑斯谛方式增长并达到稳定状态的数量 K_1(请参考 3.3 节和 10.3 节中的例 4). 如果物种Ⅰ不存在，则物种Ⅱ会以同样的方式增长. 第二个方程中的项 $-a_{21}xy$ 源于物种Ⅰ和物种Ⅱ的竞争影响. 该模型假设在某一特定时刻 t，物种数量增长率与可能出现的竞争对数 xy 成正比.



a) $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$　　b) $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$

图 10.38

这个平面自治方程组有临界点(0, 0)、(K_1, 0)及(0, K_2). 当 $\alpha_{12}\alpha_{21}\neq 0$ 时，直线 $K_1-x-\alpha_{12}y=0$ 和 $K_2-y-\alpha_{21}x=0$ 相交产生第四个临界点 $\hat{\mathbf{X}}=(\hat{x}, \hat{y})$. 图 10.38 给出了$(\hat{x}, \hat{y})$在第一象限内的两种情形. $(\hat{x}, \hat{y})$点的雅可比矩阵的轨迹和行列式分别为

$$\tau=-\hat{x}\frac{r_1}{K_1}-\hat{y}\frac{r_2}{K_2}\text{和 }\Delta=(1-\alpha_{12}\alpha_{21})\hat{x}\hat{y}\frac{r_1r_2}{K_1K_2}.$$

在图 10.38 所示的(a)中，$K_1/\alpha_{12}>K_2$ 且 $K_2/\alpha_{21}>K_1$. 所以有 $\alpha_{12}\alpha_{21}<1$，$\tau<0$ 且 $\Delta>0$. 因为

$$\begin{aligned}\tau^2-4\Delta&=\left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1}+\hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2+4(\alpha_{12}\alpha_{21}-1)\hat{x}\hat{y}\frac{r_1r_2}{K_1K_2}\\&=\left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1}-\hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2+4\alpha_{12}\alpha_{21}\hat{x}\hat{y}\frac{r_1r_2}{K_1K_2},\end{aligned}$$

$\tau^2-4\Delta>0$，所以$(\hat{x},\hat{y})$为稳定点. 这样如果 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$ 充分靠近$\hat{\mathbf{X}}=(\hat{x},\hat{y})$，则有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbf{X}(t)=\hat{\mathbf{X}}$，此时我们认为共存是可能的. 分析情形(b)可得到一个鞍点，而对临界点(0，0)、$(K_1,0)$及$(0,K_2)$性质的分析留作练习.

当两个物种间的竞争交互作用比较弱时，系数 α_{12} 和 α_{21} 都会比较小，所以条件 $K_1/\alpha_{12}>K_2$ 和 $K_2/\alpha_{21}>K_1$ 可能会满足. 当两种猎取一种食物的捕食者在小范围内同时存在时，这种情况就会发生.

例 4　Lotka-Volterra 竞争模型

一种竞争交互作用由 Lotka-Volterra 竞争模型

$$x'=0.004x(50-x-0.75y)$$
$$y'=0.001y(100-y-3.0x)$$

描述. 求出方程组的临界点并对其进行分类.

解　临界点取在(0，0)、(50，0)、(0，100)以及方程组

$$\begin{cases}x+0.75y=50\\3.0x+y=100\end{cases}$$

的解(20，40)处. 因为 $\alpha_{12}\alpha_{21}=2.25>1$，所以有图 10.38 所示的情形(b)，因此临界点(20，40)为鞍点. 方程组的雅可比矩阵为

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}0.2-0.008x-0.003y & -0.003x\\-0.003y & 0.1-0.002y-0.003x\end{pmatrix},$$

我们可得

$$\mathbf{g}'((0,0))=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\0 & 0.1\end{pmatrix},\quad\mathbf{g}'((50,0))=\begin{pmatrix}-0.2 & -0.15\\0 & -0.05\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}'((0,100))=\begin{pmatrix}-0.1 & 0\\-0.3 & -0.1\end{pmatrix}.$$

所以(0，0)是不稳定点，而(50，0)和(0，100)都是稳定点.（请读者检验.） ■

在 Lotka-Volterra 竞争模型中，如果在第一象限内至少完整地存在一个周期解，那么共存现象也会发生. 但是，这个模型也存在没有周期解的情况.

练习 10.4

非线性钟摆

1. 一个钟摆在 $\theta=\pi/3$ 处被释放，初始角速度为 ω_0 rad/s. 确定在何种情况下得到的运动是周期性的.

2. (a)如果一个钟摆在 $\theta=\theta_0$ 处由静止释放，证明在 $\theta=-\theta_0$ 处的角速度又变为 0.

(b)钟摆的周期 T 是指 θ 由 θ_0 开始变动到 $-\theta_0$ 再回到 θ_0 所需要的时间. 证明

$$T=\sqrt{\frac{2L}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}\mathrm{d}\theta.$$

滑动的小圆珠

3. 一个质量为 m 的小圆珠沿着由函数 $z=f(x)$ 所确定的细线滑动. 如果 $X_1=(x_1, y_1)$ 是由滑动的小圆珠得到的平面自治方程组的临界点，证明 X_1 处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -gf''(x_1) & -\beta/m\end{pmatrix}.$$

4. 一个质量为 m 的小圆珠沿着由函数 $z=f(x)$ 所确定的细线滑动. 当 $f'(x_1)=0$，$f''(x_1)>0$，且系统无阻尼时，临界点 $\mathbf{X}_1=(x_1, 0)$ 是中心. 当 $x(0)$ 靠近 x_1，且 $x'(0)=0$ 时，求出小圆珠的运动周期.

5. 一个小圆珠在曲线 $z=x^2/2$ 上的 $x(0)=x_0$ 处以初速度 $x'(0)=v_0\,\mathrm{cm/s}$ 被释放.

(a)利用相平面法说明当系统无阻尼时可得周期解.

(b)证明小球达到的最大高度 $z_{\max}$ 可由 $z_{\max}=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{v_0^2/g}(1+x_0^2)-1]$ 给出.

6. 令 $z=\cosh x$，重做习题 5.

捕食者-被捕食者模型

7. (请参考图 10.36)如果 $x_m<x_1<x_M$ 且 $x=x_1$，证明 $F(x)G(y)=c_0$ 恰有两个解 y_1 和 y_2 满足 $y_1<a/b<y_2$. [提示：首先证明 $G(y)=c_0/F(x_1)<G(a/b)$.]

8. 由图 10.35 所说明的解曲线的性质(1)和(3)，说明当 $y=a/b$ 时捕食者的数量达到最大值.

9. 在很多渔业科学模型中，对一个物种的捕捞速率与该物种的数量成正比. 如果捕食者和被捕食者都可以被捕捞，那么 Lotka-Volterra 微分方程有如下形式

$$x'=-ax+bxy-\epsilon_1 x$$
$$y'=-cxy+dy-\epsilon_2 y,$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 为正常数.

(a)当 $\epsilon_2<d$ 时，证明在第一象限内存在一个新的临界点，且它为一个中心.

(b)沃尔泰拉原理(Volterra's principle)认为适当的捕捞量会使被捕食者的平均数量增加而使捕食者的平均数量减少. 这个渔业模型与沃尔泰拉原理一致吗？

10. 一个捕食者-被捕食者之间的交互作用由 Lotka-Volterra 模型

$$x'=-0.1x+0.02xy$$
$$y'=0.2y-0.025xy.$$

描述.



(a)求出位于第一象限的临界点，并且利用数值求解程序绘出这些物种数量循环的图像.

(b)估计靠近(a)中临界点的周期解的周期.

竞争模型

11. 竞争交互作用由 Lotka-Volterra 竞争模型

$$x'=0.08x(20-0.4x-0.3y)$$
$$y'=0.06y(10-0.1y-0.3x)$$

描述. 求出这个方程组的所有临界点并对其进行分类.

12. 在(1)中证明(0, 0)总是不稳定点.

13. 在(1)中证明$(K_1, 0)$在 $K_1>K_2/\alpha_{21}$ 时为稳定点，在 $K_1<K_2/\alpha_{21}$ 时为鞍点.

14. 利用习题 12 和 13 确定当$\hat{\mathbf{X}}=(\hat{x},\ \hat{y})$为稳定点时，(0, 0)、$(K_1,\ 0)$及$(0,\ K_2)$是不稳定点.

15. 在(1)中证明当

$$\frac{K_1}{\alpha_{12}}<K_2 \quad 和 \quad \frac{K_2}{\alpha_{21}}<K_1.$$

时$\hat{X}=(\hat{x},\ \hat{y})$为鞍点.

混合非线性模型

16. 如果假设一阻力施加于与钟摆运动相反的方向且其大小与角速度 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 成正比，那么钟摆的偏移角 θ 满足非线性二阶微分方程

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta-\beta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

(a)将上述二阶微分方程改写成平面自治方程组，并求出其所有的临界点.

(b)求出一个关于 m、l 及 β 的条件使得(0, 0)为稳定螺旋点.

17. 在 5.1 节中对自由阻尼运动的分析中，假设阻力与速度 x' 成正比. 这个阻力的大小常常与速度的平方成正比，那么新的微分方程为

$$x''=-\frac{\beta}{m}x'\,|\,x'\,|-\frac{k}{m}x.$$

(a)将上述二阶微分方程改写成平面自治方程组，并求出其所有的临界点.

(b)这个系统当(0, 0)是稳定点时被称为是过阻尼的，当(0, 0)是稳定螺旋点时被称为是欠阻尼的. 物理学认为(0, 0)肯定是渐近稳定临界点. 证明这个系统必须为欠阻尼的. $\left[\text{提示：}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y\,|\,y\,|)=2\,|\,y\,|.\right]$

讨论题

18. 一个质量为 m 的小圆珠沿着由函数 $z=f(x)$ 所确定的细线滑动. 施加于细线上微小的张力使其起到类似于斜面的作用，在力学中假设小圆珠与细线之间的摩擦力与 $mg\cos\theta$ 成正比(请参考图 10.30).

(a)解释为什么关于小圆珠 x 坐标的新微分方程为

$$x''=g\,\frac{\mu-f'(x)}{1+[f'(x)]^2}-\frac{\beta}{m}x'$$

其中 μ 为正常数.

(b)考察相应平面自治方程组的临界点. 在何种情况下临界点为鞍点？或稳定螺旋点？

19. 一无阻尼振动满足形如 $x''+f(x)=0$ 的非线性二阶微分方程，其中 $f(0)=0$ 且对 $x\neq0$ 有 $xf(x)>0$，$-d<x<d$. 利用相平面法说明临界点(0, 0)是否可能为稳定螺旋点. [提示：令 $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，并证明 $y^2+2F(x)=c$.]

20. 在 Lotka-Volterra 捕食者-被捕食者模型中，假设如果没有捕食者，那么被捕食者的数量按指数增长. 如果做另一假设，即被捕食者数量按逻辑斯谛增长，那么新的方程组为

$$x'=-ax+bxy$$

$$y'=-cxy+\frac{r}{K}y(K-y),$$

其中 a、b、c、r 及 K 为正，且 $K>a/b$.

(a)证明方程组有临界点(0, 0)、(0, K)及$(\hat{x},\hat{y})$，其中 $\hat{y}=a/b$ 且 $c\,\hat{x}=\frac{r}{K}(K-\hat{y})$.

(b)证明临界点(0，0)和(0，K)为鞍点，判断临界点$(\hat{x},\hat{y})$为稳定点还是稳定螺旋点.

(c)如果 $\hat{y}<\frac{4bK^2}{r+4bK}$，证明$(\hat{x},\hat{y})$为稳定螺旋点. 解释为什么当被捕食者的总数量 K 较大时会出现这种情况.

21. 动力系统

$$x'=\alpha\frac{y}{1+y}x-x$$

$$y'=-\frac{y}{1+y}x-y+\beta$$

被用于描述恒化器中微生物的繁殖模型. 恒化器是一个简单的实验装置，即一个营养物质会不断流入的培养皿. 在这个方程组中，x 表示培养皿中微生物的浓度，y 表示营养物质的浓度，且 $\alpha>1$ 和 $\beta>0$ 是可由实验员调节的常数. 求 α 和 β 满足的条件以保证方程组在第一象限内有唯一的临界点$(\hat{x},\hat{y})$，并考察这个临界点的稳定性.

22. 利用本章中的方法和数值求解程序考察由

$$x''+8x-6x^3+x^5=0.$$

建模的非线性弹簧/质量系统的稳定性.（请参考练习 5.3 中的习题 8.）

第 10 章复习题

不看课本的内容，在习题 1～10 中填空或判断对错.

1. 二阶微分方程 $x''+f(x')+g(x)=0$ 可写成一平面自治方程组为________.
2. 如果 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$是某平面自治方程组的一个解且对 $t_1\neq t_2$ 有 $\mathbf{X}(t_1)=\mathbf{X}(t_2)$，那么 $\mathbf{X}(t)$是周期解.
3. 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的轨迹等于 0 且 $\det\mathbf{A}\neq 0$，那么线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 的临界点(0，0)可能的类型为________.
4. 如果(0，0)是线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 的稳定螺旋点，那么 $\mathbf{A}$ 的特征向量为__________.
5. 如果(0，0)是线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 的鞍点且 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$是一个解，那么 $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{X}(t)$不存在.
6. 如果雅可比矩阵 $\mathbf{A}=\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$在一平面自治方程组的某临界点处有正的轨迹和行列式，那么临界点 $\mathbf{X}_1$不稳定.
7. 我们有可能利用线性化方法证明非线性平面自治方程组有周期解.
8. 钟摆方程 $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ 的所有解都是周期性的.
9. 当 α 取何值时平面自治方程组

$$x'=\alpha x-2y$$
$$y'=-\alpha x+y$$

有周期解？__________

10. 当 n 取何值时 $x=n\pi$ 为自治一阶微分方程 $x'=\sin x$ 的渐近稳定临界点？__________
11. 通过转换成极坐标形式求解以下非线性平面自治方程组，并且描述满足所给初始条件的解的几何形态：

$$x'=-y-x(\sqrt{x^2+y^2})^3$$

$$y'=x-y(\sqrt{x^2+y^2})^3,$$

$$\mathbf{X}(0)=(1,0).$$

12. 讨论线性方程组 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ 的解的几何性质，其给定的通解为：

(a)$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}$　　(b)$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$

13. 对于所给的线性方程组，通过计算轨迹 τ 和行列式 Δ 来确定临界点(0, 0)的类型.

(a)$x'=-3x+4y$
$y'=-5x+3y$

(b)$x'=-3x+2y$
$y'=-2x+y$

14. 求出平面自治方程组

$$x'=x+xy-3x^2$$
$$y'=4y-2xy-y^2.$$

的临界点并确定其类型(如果可能的话).

15. 确定 α 的值使得(0, 0)为平面自治方程组(极坐标下)

$$r'=\alpha r$$
$$\theta'=1.$$

的稳定临界点.

16. 对于非线性二阶微分方程

$$x''+\mu(x^2-1)x'+x=0,$$

确定其相应平面自治方程组的临界点(0, 0)的类型，其中 μ 为一实常数.

17. 不用求出方程的显示解，确定自治一阶微分方程 $x'=(x^2-1)e^{-x/2}$ 的临界点是渐近稳定的还是不稳定的(如果可能的话).

18. 利用相平面法证明非线性二阶微分方程 $x''=-2x\sqrt{(x')^2+1}$ 满足 $x(0)=x_0$ 和 $x'(0)=0$ 的解是周期性的.

19. 在 5.1 节中假设弹簧的回复力 F 满足虎克定律 $F=ks$，其中 s 是弹簧的伸长量，k 是正比例常数. 如果用非线性定律 $F=ks^3$ 代替这一假设，那么在硬弹簧作用下，阻尼运动的新微分方程为

$$mx''=-\beta x'-k(s+x)^3+mg,$$

其中 $ks^3=mg$. 系统当(0, 0)是稳定点时称为是过阻尼的，当(0, 0)是稳定螺旋点时称为是欠阻尼的. 求出新的 m、k 及 β 满足的条件使得系统为过阻尼的或欠阻尼的.

20. 钟摆的杆连接在可移动点 P 上，以角速度 ω(rad/s)在垂直于杆的平面内转动. 请参考图 10.39. 这样旋转钟摆的振动就受到一个额外的向心力，则关于 θ 的新微分方程为

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=\omega^2 ml\sin\theta\cos\theta-mg\sin\theta-\beta\frac{d\theta}{dt}.$$

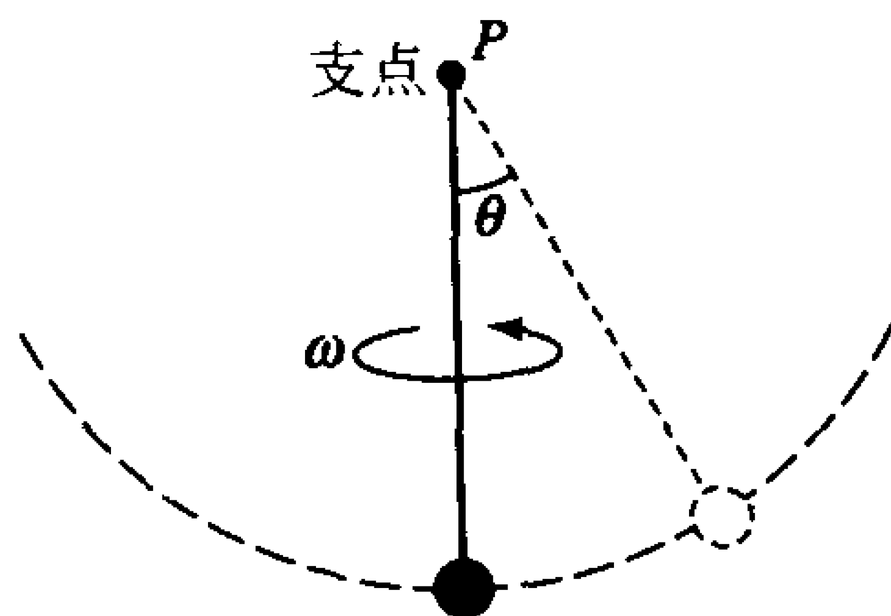
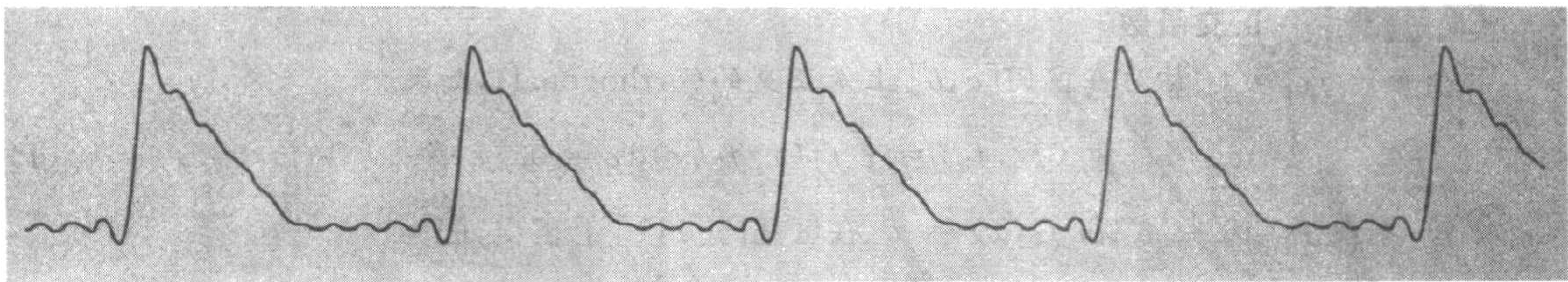


图 10.39

(a)如果 $\omega^2<g/l$，证明(0, 0)是稳定临界点且是区间 $-\pi<\theta<\pi$ 上唯一的临界点. 描述当 $\theta(0)=\theta_0$，$\theta'(0)=0$，且 θ_0 很小时会出现什么物理现象.

(b)如果 $\omega^2>g/l$，证明(0, 0)是不稳定的且在区间 $-\pi<\theta<\pi$ 上存在另外两个稳定临界点 $(\pm\hat{\theta},0)$. 描述当 $\theta(0)=\theta_0$，$\theta'(0)=0$，且 θ_0 很小时会出现什么物理现象.



傅里叶级数的部分和；见图 11.2

第 11 章　正交函数和傅里叶级数

读者曾在微积分学中学习过二维或三维空间中的向量，并且知道当两个非零向量的内积为 0 时，它们是正交的. 若超出微积分学的范围，向量、正交和内积就失去了它们的几何意义. 这些概念已经得到了推广；很容易将一个函数理解为一个向量. 当两个不同的函数的内积为 0 时，我们可以说它们是正交的，但是后面将看到这些向量(函数)的内积其实是定积分. 正交函数的概念对第 12 和 13 章的内容来说是很基础的.

微积分学中的另一个概念是给定函数 f 的幂级数展开. 在本章中我们将看到如何利用一系列无穷多个的正交函数展开函数 f.

11.1　正交函数

在高等数学中，函数被认为是向量的推广. 在本节中，我们将看到两个向量内积的概念以及正交性在函数意义下的推广. 回顾有关内容，如果 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 3 维空间中的向量，那么内积 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$(也可以写作 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$)具有以下性质：

(ⅰ) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.

(ⅱ) $(k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$，$k$ 为一标量.

(ⅲ)若 $\boldsymbol{u}=0$，则 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=0$；若 $\boldsymbol{u}\neq 0$，则 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})>0$.

(ⅳ) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

我们希望内积的概念在推广以后仍然保持这些性质.

两个函数的内积　假设 f_1 和 f_2 是定义在区间 $[a, b]$[⊖] 上的函数. 因为只要乘积 $f_1(x)f_2(x)$ 在这个区间上的定积分存在，它就具有向量内积的性质(ⅰ)～(ⅳ)，所以有如下定义.

定义 11.1　函数的内积

两个函数 f_1 和 f_2 在区间 $[a,b]$ 上的内积(inner product) 为

$$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x.$$

正交函数　两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的内积为 0 时正交，受这一事实的启发，我们以类似的方法定义正交函数(orthogonal function).

⊖　这个区间也可以是 $(-\infty, +\infty)$、$[0, +\infty)$，等等.

定义 11.2 **正交函数**

两个函数 f_1 和 f_2 称为在区间$[a,b]$上是正交的(orthogonal)，如果

$$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=0. \tag{1}$$

例如，函数 $f_1(x)=x^2$ 和 $f_2(x)=x^3$ 在区间$[-1,1]$上正交，因为

$$(f_1,f_2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1}=0.$$

与向量分析不同，这里的正交并不是垂直的同义词，这部分内容中的正交以及条件(1) 没有几何意义.

正交集 我们主要感兴趣的是一系列的无穷多个正交函数.

定义 11.3 **正交集**

一个实值函数$\{\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots\}$的集合称为在区间$[a,b]$上正交(orthogonal)，如果有

$$(\phi_m,\phi_n)=\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x=0,m\neq n. \tag{2}$$

标准正交集 向量 u 的模或长度 $\|u\|$ 可由内积表出. 表达式$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|^2$称为平方模，所以其模为 $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$. 类似地，函数$\phi_n(x)$的平方模(square norm)为 $\|\phi_n(x)\|^2=(\phi_n,\phi_n)$，所以其模(norm)，或其广义长度为 $\|\phi_n(x)\|=\sqrt{(\phi_n(x),\phi_n(x))}$. 也就是说，正交集$\{\phi_n(x)\}$中的函数 ϕ_n的平方模和模分别为

$$\|\phi_n(x)\|^2=\int_a^b\phi_n{}^2(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \|\phi_n(x)\|=\sqrt{\int_a^b\phi_n{}^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{3}$$

如果$\{\phi_n(x)\}$是区间$[a,b]$上的函数正交集且具有性质 $\|\phi_n(x)\|=1$，$n=0, 1, 2, \cdots$，那么$\{\phi_n(x)\}$称为是该区间上的标准正交集(orthonormalset).

例 1 **函数的正交集**

证明集$\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots\}$在区间$[-\pi, \pi]$上正交.

解 利用定义 $\phi_0(x)=1$ 和 $\phi_n(x)=\cos nx$，可以证明 $\int_{-\pi}^{\pi}\phi_0(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x,n\neq 0$，且 $\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x=0,m\neq n$. 在第一种情况下，有

$$\begin{aligned}(\phi_0,\phi_n)&=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_0(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}[\sin n\pi-\sin(-n\pi)]=0,n\neq 0,\end{aligned}$$

在第二种情况下，有

$$\begin{aligned}(\phi_m,\phi_n)&=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]\mathrm{d}x \leftarrow \text{三角恒等式}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, m \neq n$$ ■

例 2 **模**

求出例 1 中给定的正交集中每个函数的模.

解 对于 $\phi_0(x)=1$，由(3)可得

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

所以 $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. 对于 $\phi_n(x)=\cos nx$，$n>0$，有

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos 2nx]dx = \pi.$$

所以对于 $n>0$，有 $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$. ■

任意非零函数正交集$\{\phi_n(x)\}(n=0, 1, 2, \cdots)$可以被标准化，即通过除以每个函数自己的模使其变成标准正交集. 由例 1 和例 2 得集

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

是区间$[-\pi,\pi]$上的标准正交集.

我们对向量和函数做进一步类比. 假设 v_1、v_2及 v_3是 3 个三维空间中相互正交的非零向量. 这样的一个正交集可以作为三维空间的基；即任意三维向量可被写成线性组合

$$\boldsymbol{u}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3, \tag{4}$$

其中 $c_i(i=1, 2, 3)$是标量，称为向量的分量. 每个分量 c_i可由 $\boldsymbol{u}$ 和相应的向量$\boldsymbol{v}_i$表示. 为证实这一点，做(4)与$\boldsymbol{v}_1$的内积：

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1)=c_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)+c_2(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)+c_3(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1)=c_1\|\boldsymbol{v}_1\|^2+c_2\cdot 0+c_3\cdot 0.$$

所以

$$c_1 = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}.$$

类似地，我们可以求出分量 c_2和 c_3分别为

$$c_2 = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_2)}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2} \text{ 和 } c_3 = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_3)}{\|\boldsymbol{v}_3\|^2}.$$

所以(4)可被表示为

$$\boldsymbol{u} = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_2)}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_3)}{\|\boldsymbol{v}_3\|^2}\boldsymbol{v}_3 = \sum_{n=1}^{3}\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_n)}{\|\boldsymbol{v}_n\|^2}\boldsymbol{v}_n. \tag{5}$$

正交级数展开 假设$\{\phi_n(x)\}$是区间$[a, b]$上的无穷函数正交集. 我们问：如果 $y=f(x)$是定义在区间$[a, b]$上的函数，是否可以确定一系列系数 c_n，$n=0, 1, 2, \cdots$使得

$$f(x)=c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+\cdots+c_n\phi_n(x)+\cdots \tag{6}$$

成立？正如前面求向量分量的讨论，可以利用内积求出系数 c_n. 将(6)乘以 $\phi_m(x)$并在区间$[a, b]$上积分得

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = c_0\int_a^b\phi_0(x)\phi_m(x)dx + c_1\int_a^b\phi_1(x)\phi_m(x)dx + \cdots + c_n\int_a^b\phi_n(x)\phi_m(x)dx + \cdots$$

$$= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \cdots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \cdots.$$

由正交性，上一个等式右端的每一项都为零除非 $m = n$. 在这种情况下有

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = c_n\int_a^b \phi_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

所以所求的系数为

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \phi_n^2(x)\mathrm{d}x}, n = 0,1,2,\cdots$$

换言之，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{7}$$

其中

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x}{\| \phi_n(x) \|^2}. \tag{8}$$

使用内积符号，(7) 可以写为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\| \phi_n(x) \|^2}\phi_n(x). \tag{9}$$

这样(9) 的形式就类似于(5) 给出的关于向量的结果.

定义 11.4　正交集/权函数

一个实值函数$\{ \phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots \}$的集合称为在区间$[a, b]$上关于权函数 $w(x)$ 正交(orthogonal with respect to a weight function $w(x)$)，如果

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = 0, m \neq n.$$

通常假设在正交区间$[a, b]$上有 $w(x)>0$. 例 1 中的集$\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots\}$在区间$[-\pi, \pi]$上关于权函数 $w(x)=1$ 正交.

如果$\{\phi_n(x)\}$在区间$[a, b]$上关于权函数 $w(x)$正交，那么在(6)上乘以 $w(x)\phi_n(x)$并积分可得

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x}{\| \phi_n(x) \|^2}, \tag{10}$$

其中

$$\| \phi_n(x) \|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

级数(7)的系数由(8)或(10)给出，称之为 f 的正交级数展开(orthogonal series expansion)或广义傅里叶级数(generalized Fourier series).

完备集　前面所给的确定系数 c_n的过程是形式化的；而形如(7)的正交级数展开实际上是否存在这一基本问题被忽略了. 另外，为使 f 有正交级数展开，需使 f 不能与正交集$\{\phi_n(x)\}$中的每个 ϕ_n都正交.（如果 f 与每个 ϕ_n都正交，那么会有 $c_n=0$，$n=0$，1，2，…）为了避免这一问题出现，我们将在后面的讨论中假设正交集是完备的(complete). 这意味着只有零函数才与正交集中的每个成员都正交.

练习 11.1

在习题 1～6 中，证明给定函数在指定区间上正交.

1. $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$；$[-2, 2]$

2. $f_1(x)=x^3$，$f_2(x)=x^2+1$；$[-1, 1]$

3. $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=xe^{-x}-e^{-x}$；$[0, 2]$

4. $f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=\sin^2 x$；$[0, \pi]$

5. $f_1(x)=x$，$f_2(x)=\cos 2x$；$[-\pi/2, \pi/2]$

6. $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=\sin x$；$[\pi/4, 5\pi/4]$

在习题 7～12 中，证明给定函数集在指定区间上正交. 求出函数集中每个函数的模.

7. $\{\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \cdots\}$；$[0, \pi/2]$

8. $\{\cos x, \cos 3x, \cos 5x, \cdots\}$；$[0, \pi/2]$

9. $\{\sin nx\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$；$[0, \pi]$

10. $\left\{\sin \frac{n\pi}{p}x\right\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$；$[0, p]$

11. $\left\{1, \cos \frac{n\pi}{p}x\right\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$；$[0, p]$

12. $\left\{1, \cos \frac{n\pi}{p}x, \sin \frac{m\pi}{p}x\right\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，$m=1, 2, 3, \cdots$；$[-p, p]$

在习题 13 和 14 中，直接利用积分证明函数在给定区间上关于指定的权函数正交.

13. $H_0(x)=1$，$H_1(x)=2x$，$H_2(x)=4x^2-2$；$w(x)=e^{-x^2}$，$(-\infty, \infty)$

14. $L_0(x)=1$，$L_1(x)=-x+1$，$L_2(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$；$w(x)=e^{-x}$，$[0, \infty)$

15. 令$\{\phi_n(x)\}$是区间$[a, b]$上的正交函数集且 $\phi_0(x)=1$. 证明 $\int_a^b \phi_n(x)\mathrm{d}x = 0, n = 1,2,\cdots$.

16. 令$\{\phi_n(x)\}$是区间$[a,b]$上的正交函数集且有 $\phi_0(x)=1$ 和 $\phi_1(x)=x$. 证明$\int_a^b (\alpha x+\beta)\phi_n(x)\mathrm{d}x = 0, n=2,3,\cdots$ 对任意常数 α 和 β 都成立.

17. 令$\{\phi_n(x)\}$是区间$[a, b]$上的正交集. 证明

$$\| \phi_m(x)+\phi_n(x) \|^2 = \| \phi_m(x) \|^2 + \| \phi_n(x) \|^2, \quad m\neq n.$$

18. 由习题 1 可知 $f_1(x)=x$ 和 $f_2(x)=x^2$ 在$[-2, 2]$上正交. 求出常数 c_1 和 c_2 使得 $f_3(x)=x+c_1x^2+c_2x^3$ 与 f_1 和 f_2 在相同区间上正交.

19. 函数集$\{\sin nx\}(n=1, 2, 3, \cdots)$在区间$[-\pi,\pi]$上正交. 证明这个集是不完备的.

20. 假设 f_1、f_2 和 f_3 在区间$[a, b]$上连续. 证明$(f_1+f_2, f_3)=(f_1, f_3)+(f_2, f_3)$.

讨论题

21. 实值函数 f 称为是周期性(periodic)的且周期为 T，如果 $f(x+T)=f(x)$. 例如，4π 是 $\sin x$ 的周期，因为 $\sin(x+4\pi)=\sin x$. 满足 $f(x+T)=f(x)$ 的 T 的最小值称为是 f 的基本周期(fundamental period). 例如，$f(x)=\sin x$ 的基本周期是 $T=2\pi$. 以下函数的基本周期是多少?

(a) $f(x) = \cos 2\pi x$

(b) $f(x) = \sin \frac{4}{L}x$

(c) $f(x) = \sin x + \sin 2x$

(d) $f(x) = \sin 2x + \cos 4x$

(e) $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$

(f) $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos \frac{n\pi}{p}x + B_n \sin \frac{n\pi}{p}x\right)$，$A_n$ 和 B_n 仅与 n 有关.

11.2 傅里叶级数

我们在前面看到，如果$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots\}$是区间$[a, b]$上的正交集且 f 是定义在同一区间上的函数，那么可将 f 展成正交级数 $c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\cdots$，其中系数 c_n

可以利用内积的概念确定. 三角函数正交集

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{p}x,\ \cos\frac{2\pi}{p}x,\ \cos\frac{3\pi}{p}x,\ \cdots,\ \sin\frac{\pi}{p}x,\ \sin\frac{2\pi}{p}x,\ \sin\frac{3\pi}{p}x,\ \cdots\right\} \tag{1}$$

将在后面求解特定类型的偏微分方程边界值问题的过程中起到非常重要的作用. 集(1)在区间$[-p,\ p]$上正交(请参考练习 11.1 中的习题 12).

三角级数 假设 f 是定义在区间$[-p,\ p]$上的函数，它可用正交集(1)中的三角函数展成正交级数；即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right). \tag{2}$$

系数 a_0, a_1, a_2, …, b_1, b_2, …可由 11.1 节中对正交级数展开的一般讨论确定. 在求出系数之前，注意到我们将集(1)中 1 的系数写成 $a_0/2$ 而不是 a_0. 这只是为了方便起见；当 a_n公式中的 $n=0$ 时可以得到 a_0.

现在对(2)的两边从 $-p$ 到 p 积分可得

$$\int_{-p}^{p}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-p}^{p}\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x\right). \tag{3}$$

因为 $\cos(n\pi x/p)$和 $\sin(n\pi x/p)$，$n\geqslant 1$ 在该区间与 1 正交，所以(3)的右边化简为单独的一项

$$\int_{-p}^{p}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}x\bigg|_{-p}^{p}=pa_0.$$

求解 a_0 可得

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

现在给(2) 式乘以 $\cos(m\pi x/p)$ 并积分：

$$\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{m\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x\right). \tag{5}$$

由正交性我们有

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=0,m>0,\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0,\ m\neq n\\ p,\ m=n.\end{cases}$$

这样(5) 可化简为

$$\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=a_n p,$$

所以

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

最后，如果给(2) 式乘以 $\sin(m\pi x/p)$，积分，并利用结果

$$\int_{-p}^{p}\sin\frac{m\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=0,m>0,\int_{-p}^{p}\sin\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\int_{-p}^{p}\sin\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0,\ m\neq n\\ p,\ m=n\end{cases}$$

可以求得

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{7}$$

三角级数(2)的系数 a_0、a_n 及 b_n 分别由(4)、(6)和(7)定义，称为函数 f 的傅里叶级数(Fourier series). 由(4)、(6)和(7)获得的系数称为是 f 的傅里叶系数(Fourier coefficient).

在求系数 a_0, a_n 及 b_n 时，假设 f 在区间上是可积的，且(2)和由(2)乘以 $\cos(m\pi x/p)$ 得到的级数关于其逐项积分收敛. 除非(2)已被证明是收敛于给定的函数 f，否则这里的等号不具有严格或精确的含义. 有些教材用 ~ 来代替 =. 因为实际应用中的很多函数可以保证其级数的收敛性，所以在这里使用等号. 我们对上述结果做一概括：

定义 11.5　傅里叶级数

函数 f 定义在区间 $(-p,p)$ 上的傅里叶级数(Fourier series)由

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right) \tag{8}$$

给出. 其中

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx, \tag{9}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx, \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{11}$$

例 1　傅里叶级数展开

将

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases} \tag{12}$$

展开成傅里叶级数.

解　f 的图像如图 11.1 所示. 对于 $p=\pi$，由(9)和(10)可得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},$$

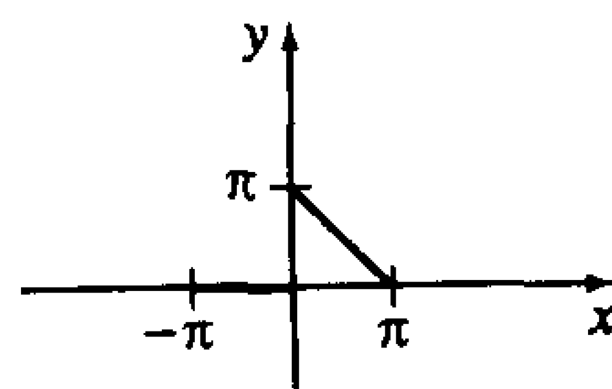


图 11.1

其中用到了 $\cos n\pi = (-1)^n$. 类似地，由(11)可得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

因此有

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right\}. \tag{13}$$

■

注意当令 $n=0$ 时由(10)定义的 a_n 可以简化为(9)从而得到 a_0. 但如例 1 所示，求 a_n 时如

果先积分再代入 $n=0$ 进行计算，可能会得到不同的结果.

傅里叶级数的收敛性 以下定理给出了傅里叶级数在某点收敛的充分条件.

定理 11.1 收敛条件

设 f 和 f' 在区间 $(-p, p)$ 上分段连续；即 f 和 f' 只在区间内的有限个点不连续且这些点有有限的函数值，那么 f 的傅里叶级数在该区间上的连续点收敛于 $f(x)$. 傅里叶级数在间断点收敛于均值

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

其中 $f(x+)$ 和 $f(x-)$ 分别表示 f 在 x 点的右极限和左极限.[㊀]

对这一定理的证明，读者可以参考由 Churchill 和 Brown 所著的经典教材.[㊁]

例 2 间断点的收敛性

例 1 中的函数(12)满足定理 11.1 的条件. 所以除了 $x=0$ 以外，对于区间 $(-\pi, \pi)$ 内的每个 x，级数(13)收敛于 $f(x)$. 在 $x=0$ 处函数不连续且级数(13)收敛于

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}.$$ ■

周期性延拓 观察可知基本集合(1)中的函数都有不同的基本周期[㊂]，即 $2p/n$，$n\geqslant1$，但因为周期的正整数倍仍然是周期，所以所有函数有共同的周期 $2p$.（证明之.）因此(2)的右端以 $2p$ 为周期；而 $2p$ 也恰为和式的基本周期(fundamental period). 我们可以得出结论，傅里叶级数不仅表示了区间 $(-p, p)$ 上的函数，而且给出了 f 在这个区间外的周期性延拓(periodic extension). 现在对 f 的周期性延拓应用定理 11.1，或者先假设给定函数以 $2p$ 为周期；即 $f(x+2p)=f(x)$. 当 f 分段连续且在 $x=-p$ 和 $x=p$ 处分别存在右导数和左导数时，级数(8)在这些端点收敛于均值

$$[f(p-)+f(-p+)]/2,$$

且在 $\pm3p$，$\pm5p$，$\pm7p$ 等处周期性地收敛于这个值.

(13)中的傅里叶级数在 x 轴上收敛于(12)的周期性延拓. 在 0，$\pm2\pi$，$\pm4\pi$，…和 $\pm\pi$，$\pm3\pi$，$\pm5\pi$，…处，级数分别收敛于

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi}{2}\text{和}\frac{f(\pi-)+f(-\pi+)}{2}=0.$$

图 11.2 中的实心点代表 $\pi/2$.

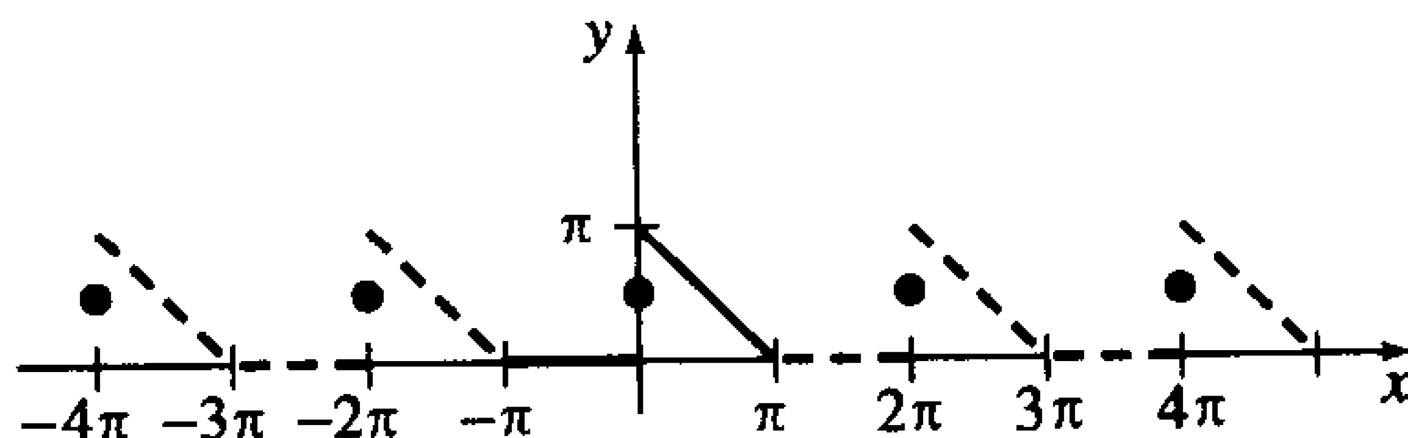


图 11.2

㊀ 也就是说，对于区间内的点 x 及 $h>0$，$f(x+)=\lim_{h\to0}f(x+h)$，$f(x-)=\lim_{h\to0}f(x-h)$.

㊁ Ruel V. Churchill and James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems* (New York: Mc Graw-Hill).

㊂ 请参考练习 11.1 中的习题 21.

部分和序列 观察傅里叶级数的部分和序列$\{S_N(x)\}$如何近似一个函数是件有趣的事情. 例如，(13)的前三个部分和为

$$S_1(x)=\frac{\pi}{4}，S_2(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x，S_3(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

在图 11.3 中利用 CAS 绘出了(13)的部分和 $S_3(x)$、$S_5(x)$、$S_8(x)$和 $S_{15}(x)$在区间$(-\pi, \pi)$上的图像. 图 11.3(e)给出了 $S_{15}(x)$在$(-4\pi, 4\pi)$上的周期性延拓.

a) $S_3(x)$

b) $S_5(x)$

c) $S_8(x)$

d) $S_{15}(x)$

e) $S_{15}(x)$

图 11.3 傅里叶级数的部分和

练习 11.2

在习题 1～16 中，求出 f 在给定区间上的傅里叶级数.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases}\pi^2, & -\pi<x<0\\ \pi^2-x^2, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

7. $f(x)=x+\pi,\ -\pi<x<\pi$ 8. $f(x)=3-2x,\ -\pi<x<\pi$

9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 10. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi/2<x<0\\ \cos x, & 0\leqslant x<\pi/2\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<-1\\ -2, & -1\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<1\\ 0, & 1\leqslant x<2\end{cases}$ 12. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}1, & -5<x<0\\ 1+x, & 0\leqslant x<5\end{cases}$ 14. $f(x)=\begin{cases}2+x, & -2<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<2\end{cases}$

15. $f(x)=e^x,\ -\pi<x<\pi$ 16. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ e^x-1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$

17. 利用习题 5 的结果证明

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \quad 和 \quad \frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

18. 利用习题 17 求一个级数，从它可以得到 $\pi^2/8$ 的数值.

19. 利用习题 7 的结果证明

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

20. 利用习题 9 的结果证明

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}+\cdots.$$

21. (a)利用余弦和正弦的复指数形式

$$\cos\frac{n\pi}{p}x=\frac{e^{in\pi x/p}+e^{-in\pi x/p}}{2},\quad \sin\frac{n\pi}{p}x=\frac{e^{in\pi x/p}-e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

证明(8)可写成复数形式(complex form)

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi x/p},$$

其中 $c_0=a_0/2, c_n=(a_n-ib_n)/2$,且 $c_{-n}=(a_n+ib_n)/2, n=1,2,3,\cdots$.

(b) 证明(a) 中的 c_0、c_n 及 c_{-n} 可由积分

$$c_n=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)e^{-in\pi x/p}dx, n=0,\pm1\pm2,\cdots.$$

表示.

22. 利用习题 21 的结果求 $f(x)=e^{-x}$ 在区间 $-\pi<x<\pi$ 上的傅里叶级数的复数形式.

11.3 傅里叶余弦和正弦级数

当 f 是偶函数或奇函数时,可以大大简化求函数 f 的傅里叶级数展开系数 a_0、a_n 及 b_n 的过程. 函数 f 称为是

偶函数(even),如果 $f(-x)=f(x)$;奇函数(odd),如果 $f(-x)=-f(x)$.

在如$(-p,p)$的对称区间上,所有偶函数的图像关于y轴对称而所有奇函数的图像关于原点对称.

一些例子 这里的奇和偶源于这样一个事实,x 的偶次幂多项式函数的图像关于 y 轴对称,而 x 的奇次幂多项式函数的图像关于原点对称.例如,

偶整数 ↓

因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,所以 $f(x)=x^2$是偶函数

奇整数 ↓

因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$,所以 $f(x)=x^3$是奇函数

请参考图 11.4 和图 11.5. 余弦函数和正弦函数分别为偶函数和奇函数,因为 $\cos(-x)=\cos x$,$\sin(-x)=-\sin x$. 指数函数 $f(x)=e^x$ 和 $f(x)=e^{-x}$ 既非奇函数也非偶函数.

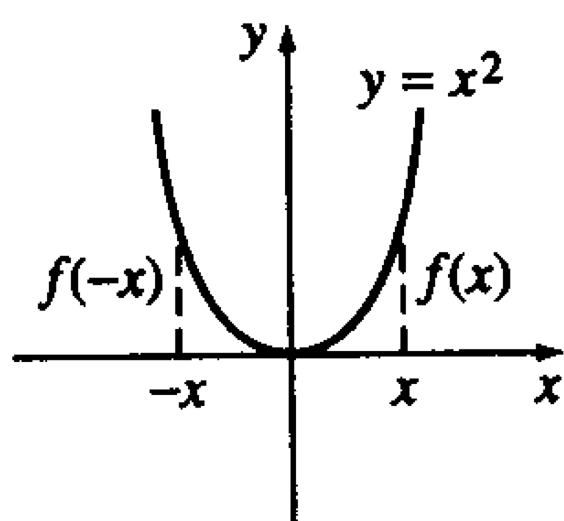


图 11.4

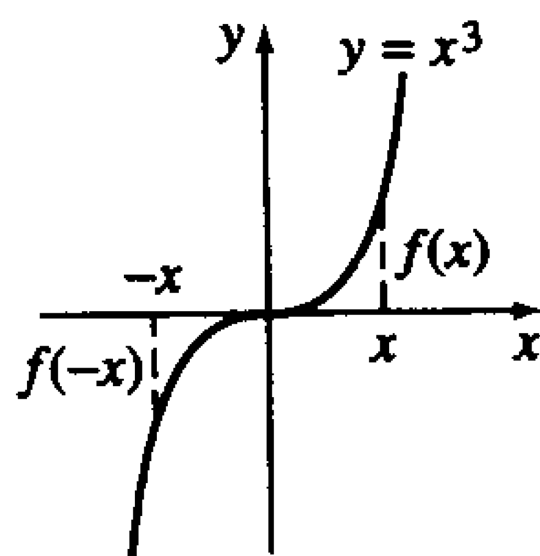


图 11.5

偶函数和奇函数的性质 以下定理列出了偶函数和奇函数的一些性质.

定理 11.2 **偶/奇函数的性质**

(a) 两个偶函数的乘积仍为偶函数.

(b) 两个奇函数的乘积为偶函数.

(c) 一个偶函数和一个奇函数的乘积为奇函数.

(d) 两个偶函数的和(差)仍为偶函数.

(e) 两个奇函数的和(差)仍为奇函数.

(f) 如果 f 为偶函数,则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

(g)如果 f 为奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

(b)的证明 假设 f 和 g 是奇函数,则有 $f(-x)=-f(x)$和 $g(-x)=-g(x)$. 如果定义 f 和 g 的乘积为 $F(x)=f(x)g(x)$,则

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))=f(x)g(x)=F(x).$$

这就说明了两个奇函数的乘积 F 是偶函数. 余下性质的证明留作练习. 请参考练习 11.3 的习题 49. ■

余弦和正弦级数 如果 f 是$(-p,\ p)$上的偶函数,那么根据前面的性质,11.2 节中的(9)(10)和(11)变为

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x}_{\text{偶函数}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x}_{\text{奇函数}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

类似地，当 f 是区间 $(-p,\ p)$ 上的奇函数时，

$$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots, b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x.$$

我们在如下定义中概括上述结果.

定义 11.6　傅里叶余弦和正弦级数

(i) 区间 $(-p,\ p)$ 上的偶函数的傅里叶级数为余弦级数(cosine series)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x, \tag{1}$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(ii) 区间 $(-p,p)$ 上的奇函数的傅里叶级数为正弦级数(sine series)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x, \tag{4}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

例 1　正弦级数展开

利用傅里叶级数展开 $f(x)=x,\ -2<x<2$.

解　观察图 11.6，发现给定函数是区间 $(-2,\ 2)$ 上的奇函数，所以可以利用正弦级数展开 f. 由等式 $2p=4$ 可得 $p=2$. 所以(5)在分部积分后变为

$$b_n = \int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

因此

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x. \tag{6}$$

■

例 1 中的函数满足定理 11.1 的条件. 因此级数(6)在 $(-2,\ 2)$ 上收敛于原函数，其周期性延拓(周期是 4)如图 11.7 所示.

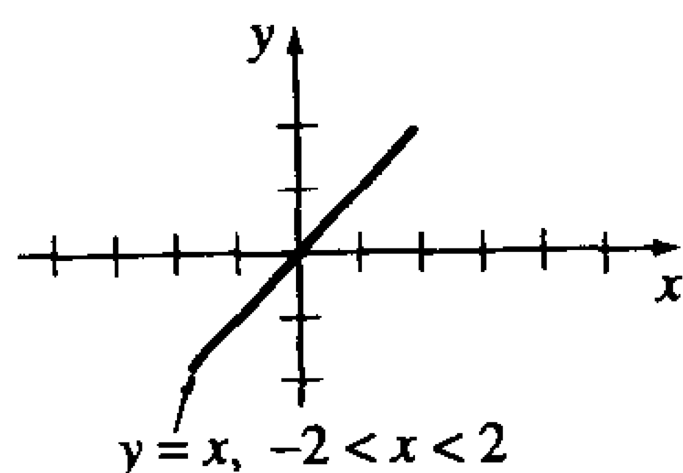


图 11.6

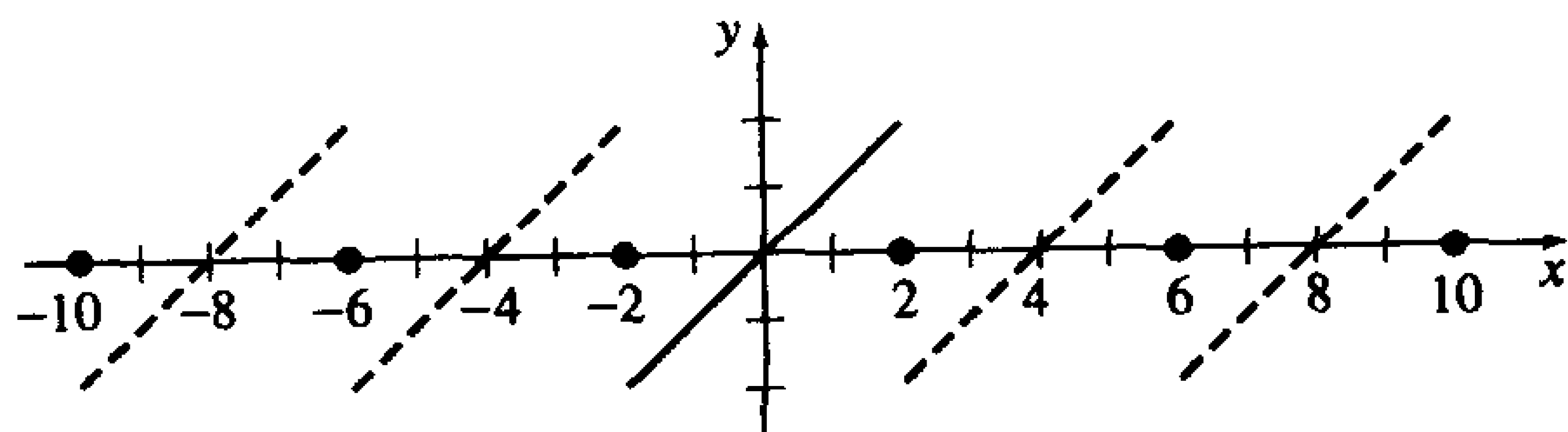


图 11.7

例 2 **正弦级数展开**

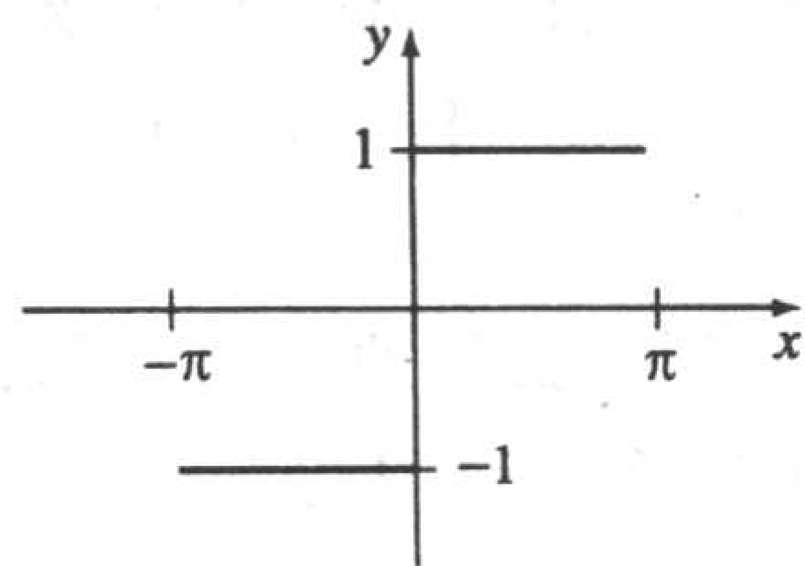


图 11.8

如图 11.8 所示的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 是区间$(-\pi,\pi)$上的奇函数．令 $p=\pi$，则由(5)可得

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n},$$

所以

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx. \tag{7}$$

■

吉布斯现象 借助于 CAS，我们在图 11.9 中绘出了(7)的非零项部分和 $S_1(x)$、$S_2(x)$、$S_3(x)$及 $S_{15}(x)$的图像．如在图 11.9(d)中看到的，$S_{15}(x)$的图像在间断点 $x=0$，$x=\pi$，$x=-\pi$处附近有明显的峰值．这种在原函数的间断点附近得到的部分和 $S_N(x)$的值显得有些夸张，它的图像并不平滑但还算恒定，甚至在 N 取很大的值时也是如此．这种傅里叶级数在 f 间断点附近的性质称为吉布斯现象(Gibbs phenomenon)．

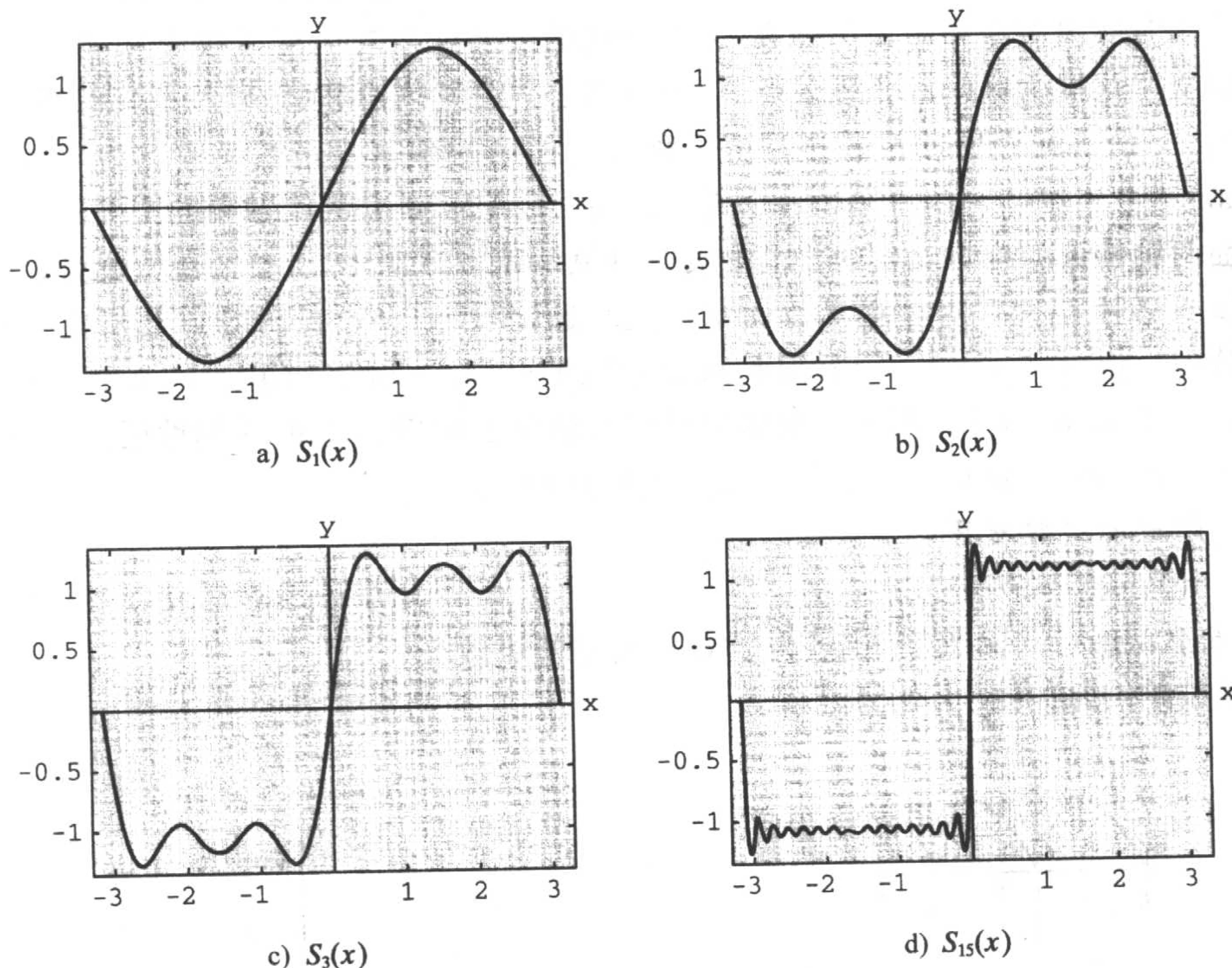


图 11.9　正弦级数(7)的部分和

例 2 中的 f 在全部 x 轴上的周期性延拓是一个脉冲函数(请参考图 7.36)．

半域展开 在前面的讨论中，函数 f 总是定义在以原点为中点的区间上，即 $-p<x<p$．然而在很多情况下，我们感兴趣的是只在区间 $0<x<L$ 上用三角级数表示一个函数．我们可以通过在区间 $-L<x<0$ 上给出函数的定义用不同的方法来解决这个问题．为简单起见，我们

只考虑三种最重要的情况．如果 $y=f(x)$ 定义在区间 $0<x<L$ 上，

（ⅰ）关于 y 轴将函数图像反射到 $-L<x<0$ 上；则现在函数变为 $-L<x<L$ 上的偶函数（请参考图 11.10）．

（ⅱ）关于原点将函数图像反射到 $-L<x<0$ 上；则现在函数变为 $-L<x<L$ 上的奇函数（请参考图 11.11）．

（ⅲ）在 $-L<x<0$ 上定义 $f(x)=f(x+L)$（请参考图 11.12）．

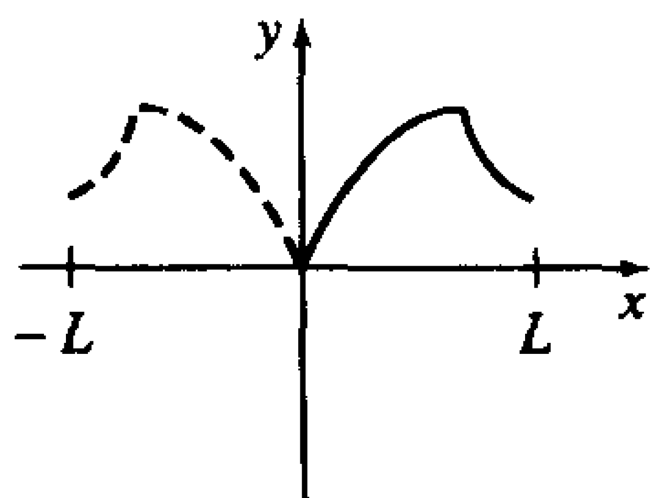


图　11.10

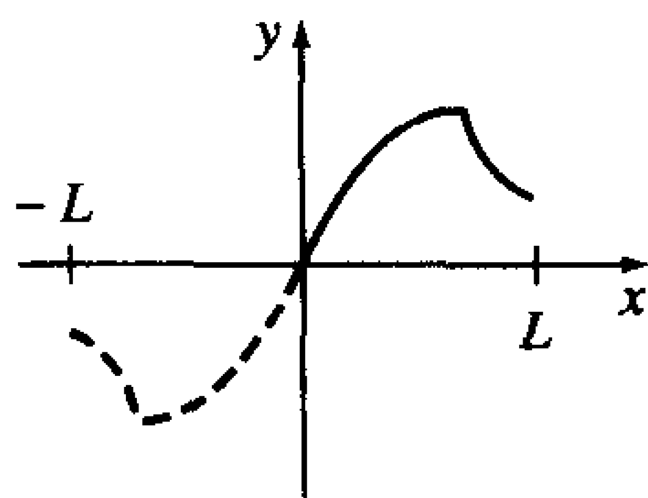


图　11.11

注意级数(1)和(4)的系数只用到了函数在 $0<x<p$ 上的定义（即区间 $-p<x<p$ 的一半）．因此在实践中其实没有必要做由（ⅰ）和(ii)所描述的反射．如果 f 定义在 $0<x<L$ 上，那么我们简单地定义半周期为区间的长度 $p=L$．由系数公式(2)、(3)和(5)以及相应的级数可得原函数的周期为 $2L$ 的偶或奇周期性延拓．由这种方法得到的余弦或正弦级数称为半域展开(half-range expansion)．最后，在情形（ⅲ）中定义区间 $-L<x<0$ 上的函数值与 $0<x<L$ 上的值相等．如前面两种情形一样，其实也没有必要这样做．可以证明 11.2 节的函数集合(1)中的函数在 $a\leqslant x\leqslant a+2p$ 上正交，对任意实数 a 都成立．选定 $a=-p$，我们得到上节中(9)、(10)和(11)的积分限．但对于 $a=0$，积分限是从 $x=0$ 到 $x=2p$．所以如果 f 定义在区间 $0<x<L$ 上，那么 $2p=L$ 或 $p=L/2$．所求得的傅里叶级数给出了周期为 L 的周期性延拓．这种方法得到的级数在 $-L<x<0$ 和 $0<x<L$ 上收敛于相同的值．

例 3　用三种级数展开

展开 $f(x)=x^2$，$0<x<L$．

(a)用余弦级数　(b)用正弦级数　(c)用傅里叶级数

解　函数的图像如图 11.13 所示．

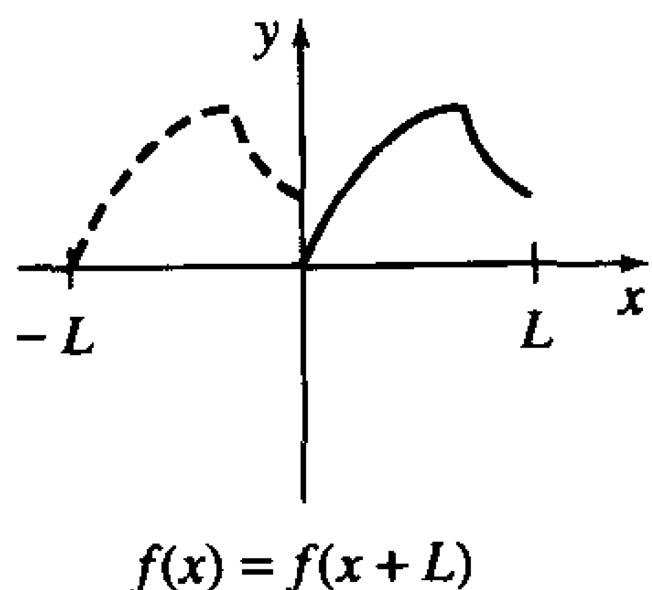


图　11.12

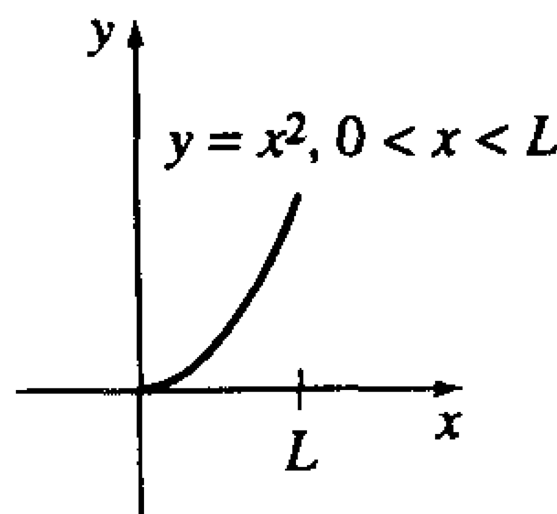


图　11.13

(a)我们有

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}L^2,a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x=\frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

其中在求 a_n 时要用到两次分部积分.

所以

$$f(x)=\frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{8}$$

(b)在这种情况下需要再次用到两次分部积分：

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x=\frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1].$$

所以

$$f(x)=\frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{9}$$

(c)对于 $p=L/2$，$1/p=2/L$，及 $n\pi/p=2n\pi/L$，有

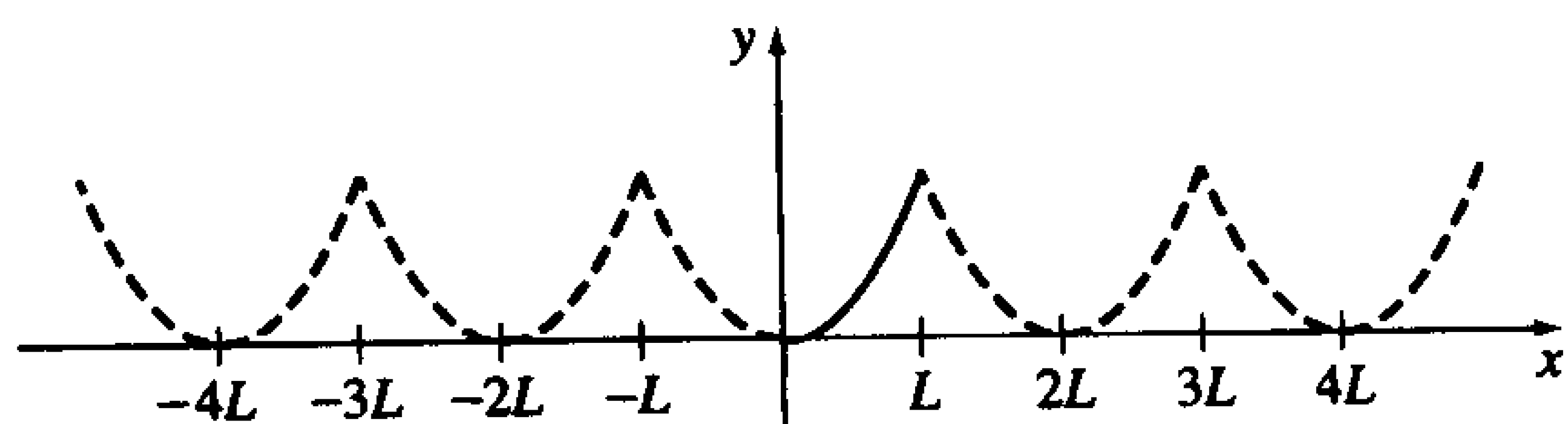
$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}L^2,a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{2n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x=\frac{L^2}{n^2\pi^2},$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin\frac{2n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x=-\frac{L^2}{n\pi}.$$

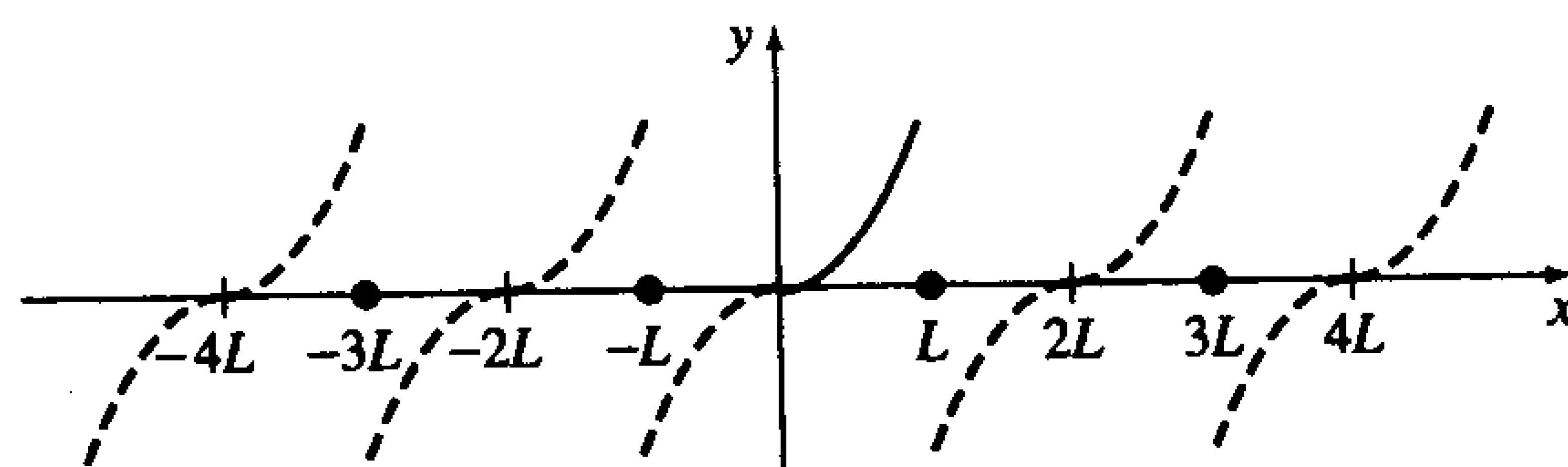
因此有

$$f(x)=\frac{L^2}{3}+\frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi}{L}x-\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x\right\}. \tag{10}$$

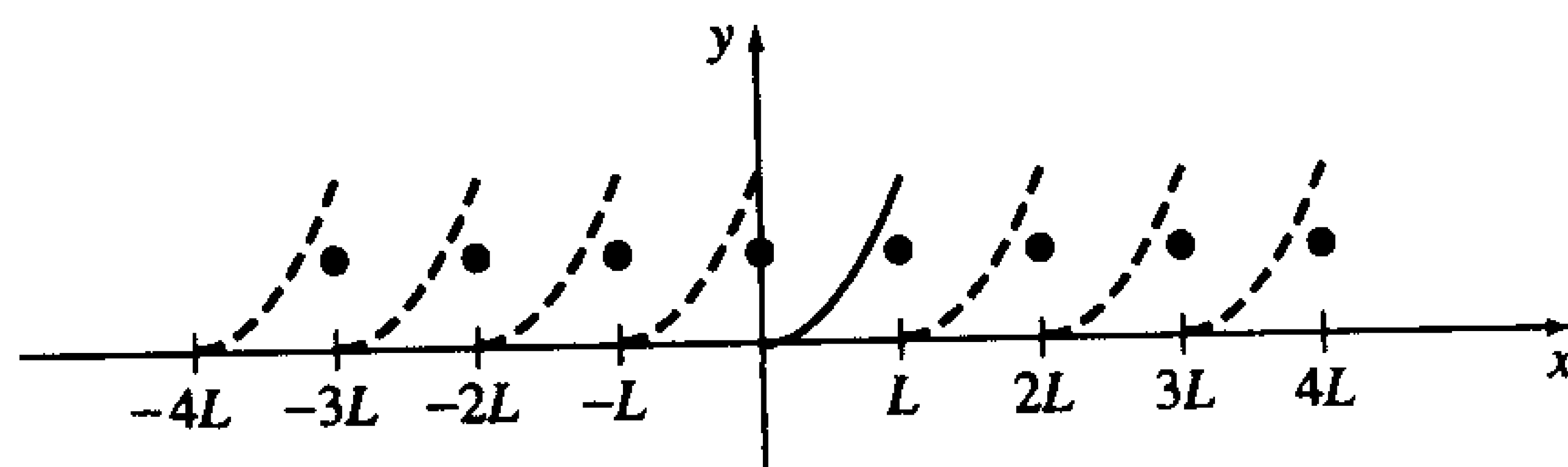
级数(8)、(9)和(10)分别收敛于 f 以 $2L$ 为周期的偶延拓、以 $2L$ 为周期的奇延拓和以 L 为周期的延拓. 这些周期性延拓的图像如图 11.14 所示.



a) 余弦级数



b) 正弦级数



c) 傅里叶级数

图 11.14

■

周期性驱动力 微分方程可以用来描述具有周期性驱动力 $f(t)$ 的物理系统，而傅里叶级数有时对求这类方程的特解很有帮助. 在下一个例子中我们求微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t) \tag{11}$$

的特解，需要对 f 进行半域正弦展开然后假设特解具有形式

$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{p}t. \tag{12}$$

例 4 微分方程的特解

一个无阻尼弹簧质点系统，其中重物质量为 $m=\frac{1}{16}$slug，弹簧的弹性系数为 $k=4$lb/ft，它们受到了一个周期为 2 的外力 $f(t)$，如图 11.15 所示. 虽然施加于系统的力是在 $t>0$ 范围内的，注意到如果我们把周期为 2 的函数拓展到 t 轴的负半轴上，那么可以得到一个奇函数. 在实际求解时，只需要求出 $f(t)=\pi t$，$0<t<1$ 的半域正弦展开即可. 对于 $p=1$，由(5)及分部积分得

$$b_n=2\int_0^1\pi t\sin n\pi t\,dt=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

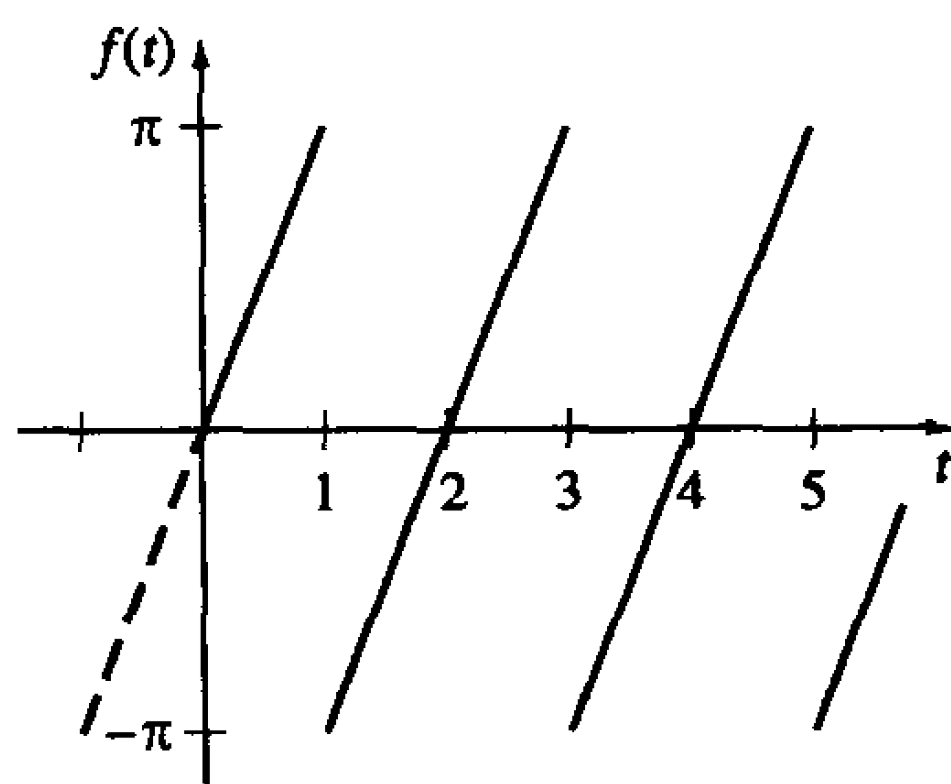


图 11.15

由(11)，系统运动的微分方程可写成

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi t. \tag{13}$$

为求出(13) 的特解 $x_p(x)$，我们将(12) 代入方程并使两边的 $\sin n\pi t$ 的系数相等，则可得

$$\left(-\frac{1}{16}n^2\pi^2+4\right)B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \text{ 或 } B_n=\frac{32(-1)^{n+1}}{n(64-n^2\pi^2)}.$$

因此

$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32(-1)^{n+1}}{n(64-n^2\pi^2)}\sin n\pi t. \tag{14}$$

■

我们观察发现在解(14)中，不存在整数 $n\geqslant1$ 使得 B_n 的分母 $64-n^2\pi^2$ 为 0. 一般地，如果存在一个 n 的值，比如 N，使得 $N\pi/p=\omega$，其中 $\omega=\sqrt{k/m}$，则由(11)描述的系统处于完全共振状态. 换言之，系统处于完全共振状态如果驱动力 $f(t)$ 的傅里叶级数展开包含与自由振动的频率相等的项 $\sin(N\pi/L)t$(或 $\cos(N\pi/L)t$).

当然，如果驱动力 f 以 $2p$ 为周期，在 t 轴负半轴上拓展后得到一个偶函数，那么我们用余弦级数展开 f.

练习 11.3

在习题 1～10 中，确定函数是奇、偶，或两者都不是.

1. $f(x)=\sin 3x$
2. $f(x)=x\cos x$
3. $f(x)=x^2+x$
4. $f(x)=x^3-4x$
5. $f(x)=e^{|x|}$
6. $f(x)=e^x-e^{-x}$

7. $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x<0\\ -x^2, & 0\leqslant x<1\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}x+5, & -2<x<0\\ -x+5, & 0\leqslant x<2\end{cases}$

9. $f(x)=x^3,\ 0\leqslant x\leqslant 2$

10. $f(x)=|x^5|$

在习题 11～24 中，利用合适的余弦或正弦级数展开给定的函数.

11. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}1, & -2<x<-1\\ 0, & -1<x<1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$

13. $f(x)=|x|,\ -\pi<x<\pi$

14. $f(x)=x,\ -\pi<x<\pi$

15. $f(x)=x^2,\ -1<x<1$

16. $f(x)=x|x|,\ -1<x<1$

17. $f(x)=\pi^2-x^2,\ -\pi<x<\pi$

18. $f(x)=x^3,\ -\pi<x<\pi$

19. $f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi<x<0\\ x+1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0\\ x-1, & 0\leqslant x<1\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}1, & -2<x<-1\\ -x, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -2\pi<x<-\pi\\ x, & -\pi\leqslant x<\pi\\ \pi, & \pi\leqslant x<2\pi\end{cases}$

23. $f(x)=|\sin x|,\ -\pi<x<\pi$

24. $f(x)=\cos x,\ -\pi/2<x<\pi/2$

在习题 25～34 中，求给定函数的半域余弦和正弦展开.

25. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$

27. $f(x)=\cos x,\ 0<x<\pi/2$

28. $f(x)=\sin x,\ 0<x<\pi$

29. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi/2\\ \pi-x, & \pi/2\leqslant x<\pi\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi\\ x-\pi, & \pi\leqslant x<2\pi\end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$

32. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<2\end{cases}$

33. $f(x)=x^2+x,\ 0<x<1$

34. $f(x)=x(2-x),\ 0<x<2$

在习题 35～38 中，用傅里叶级数展开给定的函数.

35. $f(x)=x^2,\ 0<x<2\pi$

36. $f(x)=x,\ 0<x<\pi$

37. $f(x)=x+1,\ 0<x<1$

38. $f(x)=2-x,\ 0<x<2$

在习题 39 和 40 中，用例 4 的求解过程求方程(11)的特解 $x_p(t)$，其中 $m=1$，$k=10$，施迫函数 $f(t)$ 如下所定. 假设当 $f(t)$ 被周期延拓到 t 轴负半轴上时，得到的函数为奇函数.

39. $f(t)=\begin{cases}5, & 0<t<\pi\\ -5, & \pi<t<2\pi\end{cases}$; $f(t+2\pi)=f(t)$

40. $f(t)=1-t,\ 0<t<2$; $f(t+2)=f(t)$

在习题 41 和 42 中，用例 4 的求解过程求方程(11)的特解 $x_p(t)$，其中 $m=1/4$，$k=12$，施迫函数 $f(t)$ 如下所定. 假设当 $f(t)$ 被周期延拓到 t 轴负半轴上时，得到的函数为偶函数.

41. $f(t)=2\pi t-t^2,\ 0<t<2\pi$; $f(t+2\pi)=f(t)$

42. $f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<\frac{1}{2}\\ 1-t, & \frac{1}{2}<t<1\end{cases}$; $f(t+1)=f(t)$

43. (a)求解习题39中的微分方程 $x''+10x=f(t)$，使得解满足初始条件 $x(0)=0$，$x'(0)=0$.


(b)利用CAS绘出(a)中的解 $x(t)$ 的图像.

44. (a)求解习题41中的微分方程 $\frac{1}{4}x''+12x=f(t)$，使得解满足初始条件 $x(0)=1$，$x'(0)=0$.


(b)利用CAS绘出(a)中的解 $x(t)$ 的图像.

45. 假设长度为 L 的匀质杆在 $x=0$ 和 $x=L$ 两点简单支撑，如果单位长度的载荷由 $w(x)=w_0x/L(0<x<L)$ 给出，那么关于杆的偏移 $y(x)$ 的微分方程为

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{w_0x}{L},$$

其中 E，I 及 w_0 为常数.（请参考5.2节中的习题(4).）

(a)用正弦级数半域展开 $w(x)$.

(b)利用例4的方法求出微分方程的特解 $y_p(x)$.

46. 当每单位长度的载荷如图11.16所示时，按习题45的求解过程求出特解 $y_p(x)$.

47. 当匀质杆由弹性基支撑且每单位长度的载荷为 $w(x)$ 时，关于偏移 $y(x)$ 的微分方程为

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=w(x),$$

其中 k 为支撑基的杨氏模量. 假设匀质杆和弹性基的长度无限(即 $-\infty<x<+\infty$)且每单位长度的载荷为周期函数

$$w(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<-\pi/2\\ w_0, & -\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2,\quad w(x+2\pi)=w(x).\\ 0 & \pi/2<x<\pi\end{cases}$$

利用例4的方法求出微分方程的特解 $y_p(x)$.

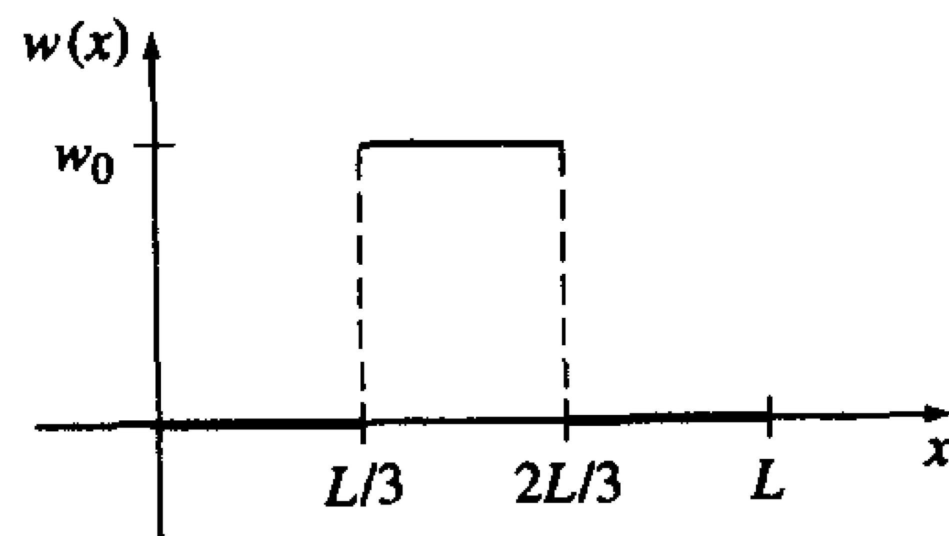


图 11.16

讨论题

48. 证明定理11.2中的性质(a)、(c)、(d)、(f)及(g).

49. 只有一个函数是既奇又偶的，这个函数是什么？

50. 如在第4章中所看到的，习题47中微分方程的通解为 $y=y_c+y_p$. 讨论为什么可以在物理背景下确定习题47的解为 y_p. [提示：考虑当 $x\to\pm\infty$ 时的 $y=y_c+y_p$.]

计算机实验作业

在习题51和52中，利用CAS绘出给定三角级数的部分和 $\{S_N(x)\}$ 的图像. 实验不同的 N 值并在 x 轴的不同区间上绘图. 利用所得到的图像推测由级数表示定义在 $0<x<L$ 上的函数 f 封闭形式的表达式.

51. $f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right]$

52. $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}x$

53. 对于习题51和52，答案是唯一的吗？给出定义在关于原点对称的区间 $-a<x<a$ 上的函数 f，使得其有与下列习题相同的三角级数.

(a)习题51　　(b)习题52

11.4 施图姆-刘维尔问题

为方便起见，我们在这里简单介绍一下在后面的章节中非常重要的一些常微分方程.

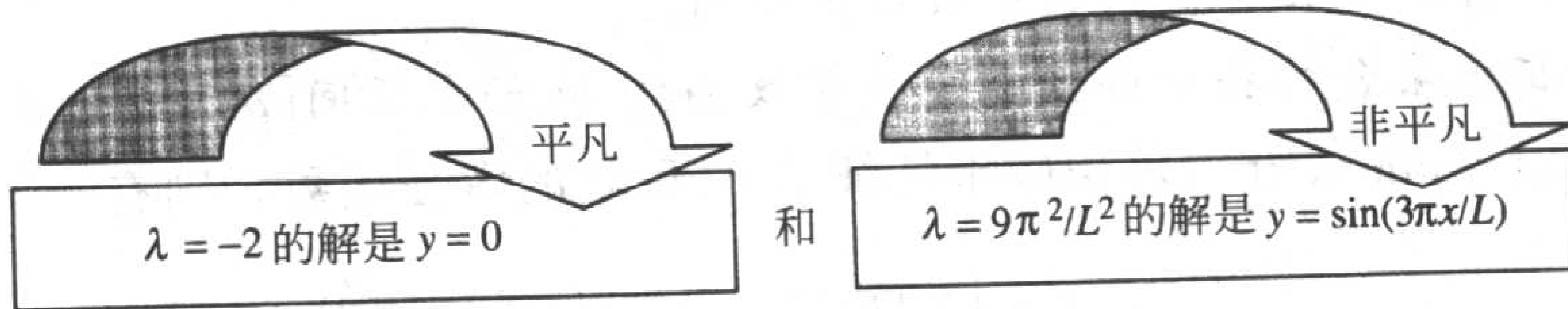
线性方程	通解
$y'+\lambda y=0$	$y=c_1 e^{-\lambda x}$
$y''+\lambda y=0$，$\lambda>0$	$y=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$
$y''-\lambda y=0$，$\lambda>0$	$y=c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}+c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$ 或 $y=c_1\cosh\sqrt{\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{\lambda}x$
柯西-欧拉方程	**通解，$x>0$**
$x^2y''+xy'-\lambda^2 y=0$	$y=c_1x^{-\lambda}+c_2x^{\lambda}$，$\lambda\neq 0$ $y=c_1+c_2\ln x$，$\lambda=0$
参数贝塞尔方程($v=0$)	**通解，$x>0$**
$xy''+y'+\lambda^2xy=0$	$y=c_1J_0(\lambda x)+c_2Y_0(\lambda x)$
勒让德方程($n=0$，1，2，…)	**特解是多项式**
$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$	$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，…

作为一个约定，当 x 的定义域是无限或半无限区间时，我们用指数形式 $y=c_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{\lambda}x}$ 来表示 $y''-\lambda y=0,\lambda>0$ 的通解；当 x 的定义域是有限区间时，使用双曲形式 $y=c_1\cosh\sqrt{\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{\lambda}x$ 来表示其通解.

特征值与特征函数 正交函数也出现在微分方程的解中. 进一步，可以通过求解一个两点边界值问题生成一个正交函数集，这个边界值问题包含一个带参数 λ 的线性二阶微分方程. 在5.2节的例2中我们看到，仅当参数 λ 的取值为 $\lambda=n^2\pi^2/L^2$($n=1$，2，3，…)时，边界值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=0,\quad y(L)=0 \tag{1}$$

才有非平凡解，这时的 λ 值称为特征值(eigenvalue). 相应的非平凡解 $y=c_2\sin(n\pi x/L)$或简单地 $y=\sin(n\pi x/L)$称为该问题的特征函数(eigenfunction). 例如，对于边界值问题(1)，$\lambda=-2$ 不是特征值而 $\lambda=9\pi^2/L^2$($n=3$)是特征值，所以有



在本章中，函数集$\{\sin(n\pi x/L)\}$($n=1$，2，3，…)是函数在区间[0，L]上的傅里叶正弦级数展开所使用到的基础正交集，认识到这一点是非常重要的.

例 1 特征值与特征函数

我们把证明边界值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y'(0)=0,\quad y'(L)=0 \tag{2}$$

的特征值和特征函数分别为 $\lambda=n^2\pi^2/L^2$ ($n=1$, 2, 3, …) 和 $y=c_1\cos(n\pi x/L)$ ($c_1\neq 0$) 留作练习. 与(1)相比，$\lambda=0$ 是这个问题的特征值且 $y=1$ 是相应的特征函数. 后者可以通过求解满足相同边界值条件 $y'(0)=0, y'(L)=0$ 的方程 $y''=0$ 得到，也可以通过将 $n=0$ 和 $c_1=1$ 代入 $y=\cos(n\pi x/L)$ 得到. 函数集 $\{\cos(n\pi x/L)\}$ ($n=0$, 1, 2, 3, …) 在区间 $[0, L]$ 上是正交的. 请参考练习 11.4 中的习题 3. ■

正则施图姆-刘维尔问题 问题(1)和(2)是一类重要的两点边界值问题的两种特殊情况. 设 p, q, r 及 r' 是区间 $[a, b]$ 上的连续实值函数，并假设对于区间上的每个 x 有 $r(x)>0$ 和 $p(x)>0$，那么

$$\text{求解:}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r(x)y']+(q(x)+\lambda p(x))y=0 \tag{3}$$

$$\text{使得:}\alpha_1\, y(a)+\beta_1\, y'(a)=0 \tag{4}$$

$$\alpha_2\, y(b)+\beta_2\, y'(b)=0 \tag{5}$$

称为正则施图姆-刘维尔问题(regular Strum-Liouville problem). 假设(4)和(5)中的系数为实值且不依赖于 λ. 另外，α_1 和 β_1 不全为 0，α_2 和 β_2 也不全为 0.

因为微分方程(3)是齐次的，所以施图姆-刘维尔问题总有平凡解 $y=0$. 但我们对这个解并不感兴趣. 如在例 1 中，要求的是 λ(特征值)的值以及依赖于 λ 的非平凡解 y(特征函数).

(4)和(5)的边界条件(y 和 y' 的线性组合在某点等于 0)也是齐次的(homogeneous). 例 1 和后面的例 2 的边界条件也是齐次的；如 $\alpha_1\, y(a)+\beta_1\, y'(a)=c$ 的边界条件是非齐次的(nonhomogeneous)，其中 c 为非零常数. 由一个齐次线性微分方程和齐次边界条件组成的边界值问题当然被称为是齐次的；否则就是非齐次的. 由(3)～(5)给出的施图姆-刘维尔问题是一个齐次边界值问题.

性质 定理 11.3 列出了正则施图姆-刘维尔问题的一些更为重要的性质. 我们只证明最后一个性质.

定理 11.3 正则施图姆-刘维尔问题的性质

(a)存在无穷多个实特征值，且它们可以按升序排列成 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots\lambda_n<\cdots$，使得当 $n\to+\infty$ 时，$\lambda_n\to+\infty$.

(b)对于每个特征值仅存在一个特征函数(除了它的非零常数倍).

(c)对应于不同特征值的特征函数是线性无关的.

(d)对应于特征值集合的特征函数集合关于权函数 $p(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上正交.

(d)的证明 设 y_m 和 y_n 分别是相应于特征值 λ_m 和 λ_n 的特征函数，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r(x)y'_m]+(q(x)+\lambda_m p(x))y_m=0, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r(x)y'_n]+(q(x)+\lambda_n p(x))y_n=0. \tag{7}$$

给(6)式乘以 y_n 并给(7)式乘以 y_m，两式相减得

$$(\lambda_m-\lambda_n)p(x)y_m\, y_n=y_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r(x)y'_n]-y_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r(x)y'_m].$$

对上述结果从 $x=a$ 到 $x=b$ 进行分部积分得

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b p(x)y_m y_n \mathrm{d}x = r(b)[y_m(b)y'_n(b)-y_n(b)y'_m(b)]$$
$$-r(a)[y_m(a)y'_n(a)-y_n(a)y'_m(a)]. \tag{8}$$

现在特征函数 y_m 和 y_n 必须同时满足边界条件(4)和(5). 特别地，由(4)我们有

$$\alpha_1 y_m(a)+\beta_1 y'_m(a)=0$$
$$\alpha_1 y_n(a)+\beta_1 y'_n(a)=0.$$

为使 α_1 和 β_1 满足这个方程组，且不全为 0，系数行列式就必须为 0：

$$y_m(a)y'_n(a)-y_n(a)y'_m(a)=0.$$

对(5)进行同样的讨论得

$$y_m(b)y'_n(b)-y_n(b)y'_m(b)=0.$$

因为(8)右边的两项都等于 0，所以可以证得正交关系

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\mathrm{d}x=0, \lambda_m\neq\lambda_n. \tag{9}$$

■

例 2　正则施图姆-刘维尔问题

求解边界值问题

$$y''+\lambda y=0,\ y(0)=0,\ y(1)+y'(1)=0. \tag{10}$$

解　首先可以证明，对于 $\lambda<0$ 和 $\lambda=0$，(10)只有平凡解 $y=0$. 对于 $\lambda>0$ 微分方程的通解为 $y=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$. 条件 $y(0)=0$ 意味着这个解中的 $c_1=0$. 当 $y=c_2\sin\sqrt{\lambda}x$ 时，第二个边界条件 $y(1)+y'(1)=0$ 可被满足，若有

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0.$$

令 $c_2\neq 0$，我们看到上一个方程等价于

$$\tan\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}. \tag{11}$$

若令 $x=\sqrt{\lambda}$，则图 11.17 说明方程 $\tan x=-x$ 有无数个解. 由此，问题(10)的特征值就是 $\lambda_n=x_n^2$，其中 $x_n(n=1,2,3,\cdots)$是连续的正根. 借助于 CAS，保留四位小数后有 $x_1=2.028\,8$，$x_2=4.913\,2$，$x_3=7.978\,7$，及 $x_4=11.085\,5$，且相应的解为 $y_1=\sin 2.028\,8x$，$y_2=\sin 4.913\,2x$，$y_3=\sin 7.978\,7x$，及 $y_4=\sin 11.085\,5x$. 一般地，这类问题的特征函数为 $\{\sin\sqrt{\lambda_n}x\}$，$n=1,2,3,\cdots$.

令 $r(x)=1$，$q(x)=0$，$p(x)=1$，$\alpha_1=1$，$\beta_1=0$，$\alpha_2=1$，及 $\beta_2=1$，所以我们可知(10)是正则施图姆-刘维尔问题. 这样 $\{\sin\sqrt{\lambda_n}x\}(n=1,2,3,\cdots)$就为区间[0，1]上关于权函数 $p(x)=1$ 的正交集. ■

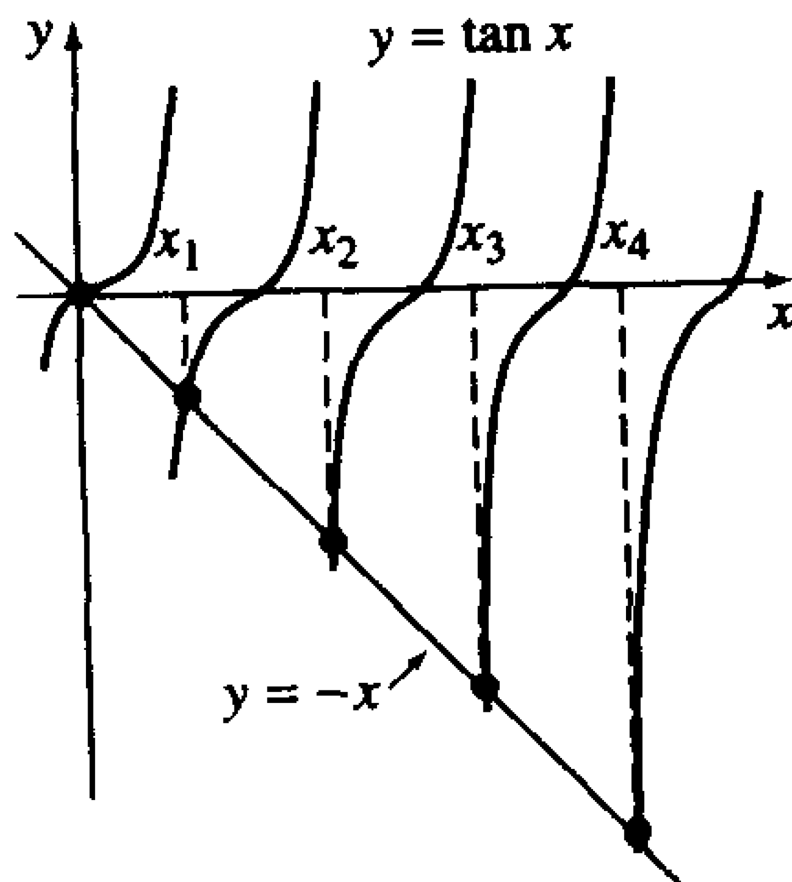


图 11.17

在有些情况下，可以证明(3)的解的正交性，而并不需要知道在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的边界条件.

奇异施图姆-刘维尔问题　如果 $r(a)=0$，或者 $r(b)=0$，或者 $r(a)=r(b)=0$，那么由微分方程(3)及边界条件(4)和(5)组成的施

图姆-刘维尔问题称为是奇异的(singular). 在第一种情况下，$x=a$ 可能是微分方程的奇点，所以(3)的解会随着 $x\to a$ 而变为无界. 然而，由(8)可知，如果 $r(a)=0$ 且方程的解在该点有界，那么要证明特征函数的正交性则无需 $x=a$ 处的边界条件. 后一个假设保证了积分的存在性. 假设(3)的解在闭区间$[a, b]$上有界，那么我们可以说

(i)如果 $r(a)=0$，那么无需有在 $x=a$ 处的边界条件，正交关系(9)成立.

(ii)如果 $r(b)=0$，那么无需有在 $x=b$ 处的边界条件[㊀]，正交关系(9)成立.

(iii)如果 $r(a)=r(b)=0$，那么无需有 $x=a$ 或 $x=b$ 处的边界条件，正交关系(9)成立.

注意在前面的讨论中，如果考虑的区间是无限的，那么施图姆-刘维尔问题是奇异的. 请参考练习 11.4 中的习题 11 和 12.

自伴形 如果系数是连续函数且对于某区间上的所有 x 有 $a(x)\neq 0$，那么任何一个二阶微分方程

$$a(x)y''+b(x)y'+(c(x)+\lambda d(x))y=0 \tag{12}$$

可通过给方程乘以积分因子

$$\frac{1}{a(x)}e^{\int (b(x)/a(x))dx} \tag{13}$$

变为自伴形(self-adjoint form)(3). 为证实这一点，我们观察到微分方程

$$e^{\int (b/a)dx}y''+\frac{b(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}y'+\left(\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}+\lambda\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}\right)y=0$$

与

$$\frac{d}{dx}\underbrace{[e^{\int (b/a)dx}y']}_{r(x)}+\left(\underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}}_{q(x)}+\lambda\underbrace{\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}}_{p(x)}\right)y=0 \tag{14}$$

等价.

为解方程，其实并不需要把二阶微分方程(12)变为自伴形(3). 我们可以利用(14)中给定的形式确定正交关系(9)中需要用到的权函数 $p(x)$. 下面两个例子给出了贝塞尔函数和勒让德多项式的正交关系.

例 3 参数贝塞尔方程

在 6.3 节中，我们看到参数贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-n^2)y=0(n=0, 1, 2, \cdots)$的通解为 $y=c_1J_n(\lambda x)+c_2Y_n(\lambda x)$. 由(13)可知 $1/x$ 是积分因子. 给贝塞尔方程乘以这个积分因子得到自伴形

$$\frac{d}{dx}[xy']+\left(\lambda^2x-\frac{n^2}{x}\right)y=0,$$

其中我们令 $r(x)=x$，$q(x)=-n^2/x$，及 $p(x)=x$，并用 λ^2代替 λ. 现有 $r(0)=0$，并且两个解 $J_n(\lambda x)$和 $Y_n(\lambda x)$中只有 $J_n(\lambda x)$在 $x=0$ 处有界. 故由(i)的结论，集合$\{J_n(\lambda_i x)\}(i=1, 2, 3, \cdots)$在区间$[0, b]$上关于权函数 $p(x)=x$ 正交. 正交关系为

$$\int_0^b xJ_n(\lambda_i x)J_n(\lambda_j x)dx=0, \lambda_i\neq\lambda_j,$$

㊀ 条件(i)和(ii)分别等价于选定 $\alpha_1=0$，$\beta_1=0$ 和 $\alpha_2=0$，$\beta_2=0$.

其中，规定特征值$\lambda_i(i=1, 2, 3, \cdots)$由

$$\alpha_2 J_n(\lambda b)+\beta_2 \lambda J'_n(\lambda b)=0^{\ominus} \tag{15}$$

在$x=b$处的边界条件定义.

令任意给定的α_2和β_2不全为0，那么(15)式有无数个根$x_i=\lambda_i b$，由此可得$\lambda_i=x_i/b$. 我们将在下一章叙述更多关于特征值的内容. ■

例4 勒让德方程

勒让德多项式$P_n(x)$是勒让德微分方程$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0(n=0, 1, 2, \cdots)$在区间$[-1, 1]$上的有界解. 由自伴形

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)y']+n(n+1)y=0$$

可以得到$r(x)=1-x^2$，$q(x)=0$，$p(x)=1$，及$\lambda=n(n+1)$. 观察到$r(-1)=r(1)=0$，由(ⅲ)可知集合$\{P_n(x)\}(n=0, 1, 2, \cdots)$在区间$[-1, 1]$上关于权函数$p(x)=1$正交. 正交关系为

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0, m \neq n.$$ ■

练习 11.4

在习题1和2中，求出给定边界值问题的特征函数及定义特征值的方程. 利用CAS近似求出前4个特征值λ_1、λ_2、λ_3及λ_4. 给出相应于这些近似值的特征函数.

1. $y''+\lambda y=0$，$y'(0)=0$，$y(1)+y'(1)=0$
2. $y''+\lambda y=0$，$y(0)+y'(0)=0$，$y(1)=0$
3. 考虑$y''+\lambda y=0$使得$y'(0)=0$，$y'(L)=0$. 证明特征函数为$\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \cdots\}$. 这个在$[0, L]$上的正交集是傅里叶余弦级数的基.
4. 考虑$y''+\lambda y=0$，周期性边界条件为$y(-L)=y(L)$，$y'(-L)=y'(L)$. 证明特征函数为
$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \cdots, \sin\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{2\pi}{L}x, \sin\frac{3\pi}{L}x, \cdots\right\}.$$
这个在$[-L, L]$上的正交集是傅里叶级数的基.
5. 求出习题1中每个特征函数的平方模.
6. 证明对于例2中的特征函数有
$$\|\sin\sqrt{\lambda_n x}\|^2=\frac{1}{2}[1+\cos^2\sqrt{\lambda_n}].$$
7. (a)求出边界值问题
$$x^2y''+xy'+\lambda y=0, y(1)=0, y(5)=0$$
的特征值和特征函数.
(b)将微分方程变为自伴形.
(c)给出一个正交关系.
8. (a)求出边界值问题
$$y''+y'+\lambda y=0, y(0)=0, y(2)=0$$
的特征值和特征函数.

⊖ 多出来的因子λ来自链式法则$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)J_n(\lambda x)=\lambda J_n'(\lambda x)$.

(b)将微分方程变为自伴形.

(c)给出一个正交关系.

9. 拉盖尔微分方程(Laguerre's differential equation)$xy''+(1-x)y'+ny=0(n=0, 1, 2, \cdots)$有多项式解 $L_n(x)$. 将方程变为自伴形，并给出正交关系.

10. 埃尔米特微分方程(Hermite's differential equation)$y''-2xy'+2ny=0(n=0, 1, 2, \cdots)$有多项式解 $H_n(x)$. 将方程变为自伴形，并给出正交关系.

11. 考虑正则施图姆-刘维尔问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1+x^2)y']+\frac{1}{1+x^2}y=0,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$$

(a)求出边界值问题的特征值和特征函数. [提示：令 $x=\tan\theta$ 然后使用链式法则.]

(b)给出正交关系.

12. (a)求出边界值问题

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-1)y=0,\ y \text{ 在 } x=0 \text{ 处有界},\ y(3)=0$$

的特征函数及定义特征值的方程.

(b)利用表 6.2 求出前 4 个特征值 λ_1、λ_2、λ_3 及 λ_4 的近似值.

讨论题

13. 考虑区间$[a, b]$上正则施图姆-刘维尔问题的特殊情况：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r(x)y']+\lambda p(x)y=0,\ y'(a)=0,\ y'(b)=0.$$

$\lambda=0$ 是这个问题的特征值吗？说明理由.

计算机试验作业

14. (a)给出习题 1 中施图姆-刘维尔问题的正交关系.

(b)借助于 CAS 证明相应于前两个特征值 λ_1 和 λ_2 的特征函数 y_1 和 y_2 的正交关系.

15. (a)给出习题 2 中施图姆-刘维尔问题的正交关系.

(b)借助于 CAS 证明相应于前两个特征值 λ_1 和 λ_2 的特征函数 y_1 和 y_2 的正交关系.

11.5 贝塞尔级数和勒让德级数

傅里叶级数、傅里叶余弦级数及傅里叶正弦级数是函数正交集展开的三种方法. 但是这样的展开决不局限于三角函数正交集. 在 11.1 节中我们看到，定义在区间(a, b)上的函数 f 可以通过正交函数系$\{\phi_n(x)\}$展开，至少在形式上可以这么做，这个函数系在$[a, b]$区间上关于某权函数正交. 很多这样的正交级数展开或一般的傅里叶级数都起源于施图姆-刘维尔问题. 为了求解物理系统的线性偏微分方程模型，我们可以推出很多这样的正交级数展开和广义傅里叶级数. 傅里叶级数和正交级数展开以及本节讨论的两种级数将会在第 12 和 13 章的应用中涉及.

11.5.1 傅里叶-贝塞尔级数

在 11.4 节的例 3 中我们看到，当特征值 λ_i 由形如

$$\alpha_2 J_n(\lambda b)+\beta_2 \lambda J'_n(\lambda b)=0 \tag{1}$$

的边界条件定义时，贝塞尔函数集$\{J_n(\lambda_i x)\}(i=1, 2, 3, \cdots)$在区间$[0, b]$上关于权函数 $p(x)=x$ 正交. 由 11.1 节的(7)和(8)知，定义在$(0, b)$上的函数 f 利用这个正交集所做的广

义傅里叶展开为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i J_n(\lambda_i x),\tag{2}$$

其中

$$c_i=\frac{\int_0^b xJ_n(\lambda_i x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^b xJ_n{}^2(\lambda_i x)\mathrm{d}x}.\tag{3}$$

以(3)为系数的级数(2)称为**傅里叶-贝塞尔级数**(Fourier-Bessel series).

微分递归关系 由 6.3 节的(14)和(15)给出的**微分递归关系**(differential recurrence relation)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n J_n(x)]=x^n J_{n-1}(x),\tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n} J_n(x)]=-x^{-n} J_{n+1}(x)\tag{5}$$

常用来求系数(3)的值.

平方模 平方模 $\|J_n(\lambda_i x)\|^2=\int_0^b xJ_n^2(\lambda_i x)\mathrm{d}x$ 的值取决于特征值 λ_i 的定义方式. 如果 $y=J_n(\lambda x)$，那么由 11.4 节的例 3 可知有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy']+\left(\lambda^2 x-\frac{n^2}{x}\right)y=0.$$

给方程两边乘以 $2xy'$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy']^2+(\lambda^2 x^2-n^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y]^2=0.$$

在$[0,b]$上对上述结果进行分部积分得

$$2\lambda^2\int_0^b xy^2\mathrm{d}x=\left([xy']^2+(\lambda^2 x^2-n^2)y^2\right)\Big|_0^b.$$

因为 $y=J_n(\lambda x)$，当 $n>0$ 时，$J_n(0)=0$，所以下限为 0. 当 $n=0$ 时，$[xy']^2+\lambda^2x^2y^2$ 的值在 $x=0$ 处为 0. 因此

$$2\lambda^2\int_0^b xJ_n^2(\lambda x)\mathrm{d}x=\lambda^2 b^2[J'_n(\lambda b)]^2+(\lambda^2 b^2-n^2)[J_n(\lambda b)]^2,\tag{6}$$

由链式法则有 $y'=\lambda J'_n(\lambda x)$.

现在考虑(1)的三种情形.

情形Ⅰ：如果选择 $\alpha_2=1$ 和 $\beta_2=0$，那么(1)为

$$J_n(\lambda b)=0.\tag{7}$$

(7)有无数个正根 x_i(请参考图 6.3)，所以特征值为正且为 $\lambda_i=x_i/b$. 因为 $J_n(-x)=(-1)^nJ_n(x)$,所以不能由(7)的负根得到新的特征值(请参考 6.3 节). 因为对于 $n=1,2,3,\cdots$，$J_n(0)=0$，且有 $J_0(0)=1$，所以对任意 n，0 不是特征值. 也就是说，对于 $n=1,2,3,\cdots$，若 $\lambda=0$，则得到平凡函数(它不可能是特征函数)，而对于 $n=0$，$\lambda=0$ 不满足方程(7). 当把(5)写成 $xJ'_n(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$ 的形式时，由(6)和(7)可得 $J_n(\lambda_i x)$的平方模为

$$\| J_n(\lambda_i x) \|^2 = \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_i b). \tag{8}$$

情形Ⅱ：如果选择 $\alpha_2 = h \geqslant 0$，$\beta_2 = b$，那么(1)为

$$hJ_n(\lambda b) + \lambda b J'_n(\lambda b) = 0. \tag{9}$$

对每个正整数 $n=1, 2, 3, \cdots$，方程(9)有无数个正根 x_i. 和前面一样，特征值可由 $\lambda_i = x_i/b$ 获得. 对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，$\lambda=0$ 不是特征值. 将 $\lambda_i b J'_n(\lambda_i b) = -hJ_n(\lambda_i b)$ 代入(6)，则求出 $J_n(\lambda_i x)$ 的平方模为

$$\| J_n(\lambda_i x) \|^2 = \frac{\lambda_i^2 b^2 - n^2 + h^2}{2\lambda_i^2} J_n^2(\lambda_i b). \tag{10}$$

情形Ⅲ：如果(9)中的 $h=0$ 且 $n=0$，那么可由

$$J'_0(\lambda b) = 0 \tag{11}$$

的根确定特征值 λ_i. 尽管(11)只是(9)的一种特殊情况，但它是唯一一种 $\lambda=0$ 时特征值的情况. 为了认识到这一点，观察到对于 $n=0$，(5)中的结果意味着

$$J'_0(\lambda b) = 0 \text{ 等价于 } J_1(\lambda b) = 0. \tag{12}$$

因为 $x_1=0$ 是这个方程的根并且 $J_0(0)=1$ 是非平凡的，所以 $\lambda_1=0$ 是特征值. 但是当 $h=0$，$n=0$，及 $\lambda_1=0$ 时我们显然不能使用(10)式. 然而由平方模的定义，有

$$\| 1 \|^2 = \int_0^b x \mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}. \tag{13}$$

当 $h=0$，$n=0$ 时，对于 $\lambda_i>0$，可利用(10)得到

$$\| J_0(\lambda_i x) \|^2 = \frac{b^2}{2} J_0^2(\lambda_i b). \tag{14}$$

接下来我们将概括级数(2)的三种形式.

定义 11.7 傅里叶-贝塞尔级数

函数 f 在区间 $(0, b)$ 上的傅里叶-贝塞尔级数(Fourier-Bessel series)可表述为

(ⅰ)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) \tag{15}$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\lambda_i b)} \int_0^b x J_n(\lambda_i x) f(x) \mathrm{d}x, \tag{16}$$

其中 λ_i 由 $J_n(\lambda b)=0$ 定义.

(ⅱ)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) \tag{17}$$

$$c_i = \frac{2\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 b^2 - n^2 + h^2) J_n^2(\lambda_i b)} \int_0^b x J_n(\lambda_i x) f(x) \mathrm{d}x, \tag{18}$$

其中 λ_i 由 $hJ_n(\lambda b) + \lambda b J_n{}'(\lambda b) = 0$ 定义.

(ⅲ)
$$f(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i J_0(\lambda_i x) \tag{19}$$

$$c_1 = \frac{2}{b^2} \int_0^b x f(x) \mathrm{d}x, \quad c_i = \frac{2}{b^2 J_0^2(\lambda_i b)} \int_0^b x J_0(\lambda_i x) f(x) \mathrm{d}x, \tag{20}$$

其中 λ_i 由 $J_0'(\lambda b) = 0$ 定义.

傅里叶-贝塞尔级数的收敛性 傅里叶-贝塞尔级数收敛的充分条件并没有特别的限制.

定理 11.4 收敛条件

如果 f 和 f' 在开区间 $(0,b)$ 上分段连续，那么 f 的傅里叶-贝塞尔展开在任何一个 f 连续的点处收敛于 $f(x)$，而在 f 的间断点处收敛于均值 $[f(x-)+f(x+)]/2$.

例 1 傅里叶-贝塞尔级数展开

利用满足边界条件 $J_1(3\lambda)=0$ 的一阶贝塞尔函数对函数 $f(x)=x, 0<x<3$ 进行傅里叶-贝塞尔级数展开.

解 利用(15)，其中系数 c_i 由(16) 给出：

$$c_i = \frac{2}{3^2 J_2^2(3\lambda_i)}\int_0^3 x^2 J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x.$$

为求这个积分，令 $t=\lambda_i x$ 并利用 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[t^2 J_2(t)] = t^2 J_1(t)$ 得

$$c_i = \frac{2}{9\lambda_i^3 J_2^2(3\lambda_i)}\int_0^{3\lambda_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^2 J_2(t)]\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda_i J_2(3\lambda_i)}.$$

所以求得的级数为

$$f(x) = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i J_2(3\lambda_i)}J_1(\lambda_i x).$$ ■

例 2 傅里叶-贝塞尔级数展开

如果例 1 中的特征值 λ_i 由 $J_1(3\lambda)+\lambda J'_1(3\lambda)=0$ 定义，那么级数展开唯一变化的地方是平方模的值. 给边界条件乘以 3 得到 $3J_1(3\lambda)+3\lambda J'_1(3\lambda)=0$，则与(9) 匹配且 $h=3, b=3$，及 $n=1$. 所以由(18) 和(17) 依次得

$$c_i = \frac{18\lambda_i J_2(3\lambda_i)}{(9\lambda_i^2+8)J_1^2(3\lambda_i)},$$

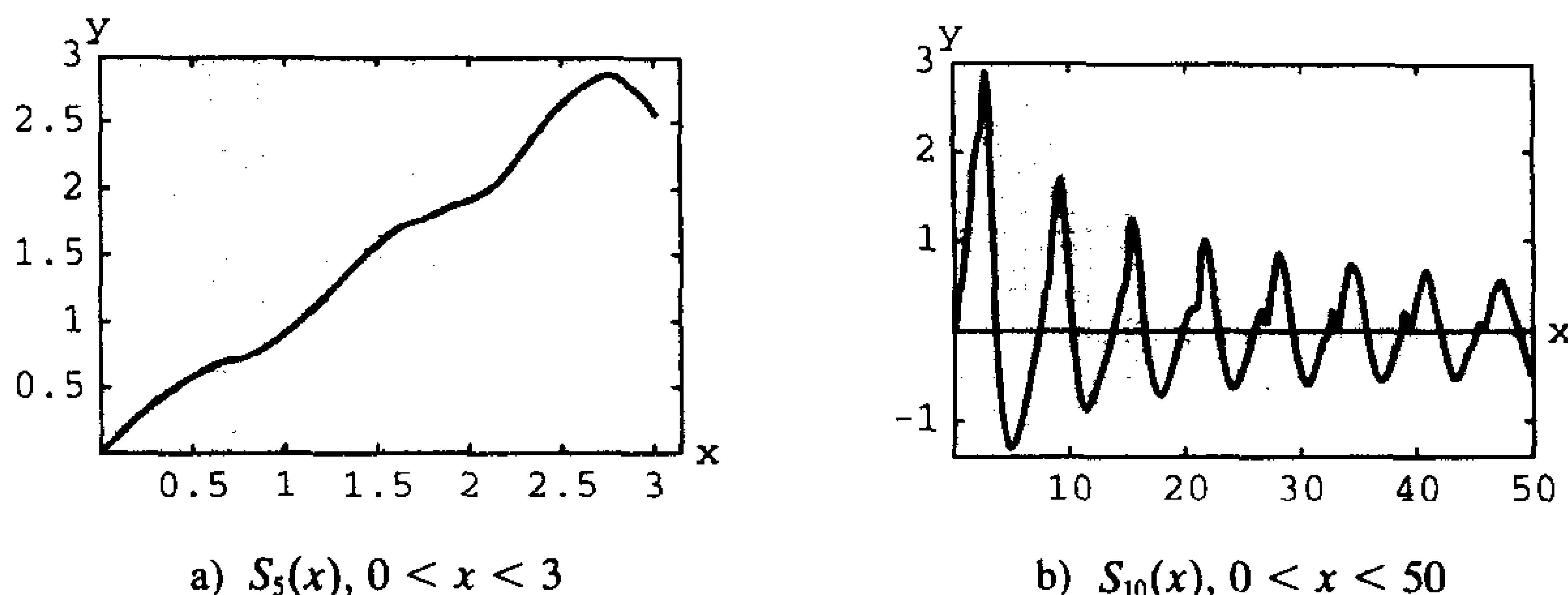
$$f(x) = 18\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i J_2(3\lambda_i)}{(9\lambda_i^2+8)J_1^2(3\lambda_i)}J_1(\lambda_i x).$$ ■

计算机应用 因为贝塞尔函数是 CAS 的内置函数，所以可以直接求出傅里叶-贝塞尔级数的特征值 λ_i 和系数 c_i 的近似值. 例如，在(9) 中可以把 $x_i=\lambda_i b$ 看成是方程 $hJ_n(x)+xJ_n'(x)=0$ 的正根. 这样可以在例 2 中利用 CAS 求出 $3J_1(x)+xJ'_1(x)=0$ 的前 5 个正根 x_i，并且由这些正根得到前 5 个特征值：$\lambda_1=x_1/3=0.983\,20$，$\lambda_2=x_2/3=1.947\,04$，$\lambda_3=x_3/3=2.957\,58$，$\lambda_4=x_4/3=3.985\,38$，$\lambda_5=x_5/3=5.020\,78$. 已知根 $x_i=3\lambda_i$ 以及特征值，再次利用 CAS 计算 $J_2(3\lambda_i)$ 和 $J_1^2(3\lambda_i)$ 的数值，从而最后得到系数 c_i. 利用这种方法我们求出例 2 中 $f(x)=x, 0<x<3$ 的傅里叶-贝塞尔级数的前五项部分和 $S_5(x)$ 为

$$\begin{aligned} S_5(x) = {} & 4.018\,44J_1(0.983\,20x) - 1.869\,37J_1(1.947\,04x) \\ & + 1.071\,06J_1(2.957\,58x) - 0.703\,06J_1(3.985\,38x) \\ & + 0.503\,43J_1(5.020\,78x). \end{aligned}$$

$S_5(x)$ 在区间 $0<x<3$ 上的图像由图 11.18(a) 给出. 在图 11.18(b) 中我们绘出了 $S_{10}(x)$ 在区间 $0<x<50$ 上的图像. 注意在定义区间 $0<x<3$ 外，级数并不收敛于 f 的周期性延拓，

这是因为贝塞尔函数并不是周期函数.请参考练习 11.5 中的习题 11 和 12.



a) $S_5(x), 0 < x < 3$　　b) $S_{10}(x), 0 < x < 50$

图 11.18　一个傅里叶-贝塞尔级数的部分和

11.5.2　傅里叶-勒让德级数

由 11.4 节中的例 4,我们知道勒让德多项式集$\{P_n(x)\}(n = 0,1,2,\cdots)$在区间$[-1,1]$上关于权函数 $p(x) = 1$ 正交.进一步,可以证明多项式 $P_n(x)$ 的平方模依赖于 n:

$$\| P_n(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}.$$

函数的勒让德多项式正交级数展开可由如下定义给出.

定义 11.8　傅里叶-勒让德级数

函数 f 在区间$(-1,1)$上的傅里叶-勒让德级数(Fourier-Legendre series)为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{21}$$

其中

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x. \tag{22}$$

傅里叶-勒让德级数的收敛性　傅里叶-勒让德级数收敛的充分条件由如下定理给出.

定理 11.5　收敛条件

如果 f 和 f' 在$(-1,1)$上分段连续,那么傅里叶-勒让德级数(21)在 f 的连续点处收敛于 $f(x)$,而在 f 的间断点处收敛于$[f(x+) + f(x-)]/2$.

例 3　傅里叶-勒让德级数展开

写出

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

的傅里叶-勒让德展开的前四个非零项.

解　前几个勒让德多项式在 6.3 节中已经给出.由这些多项式和(22)可求得

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot 1\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot x\mathrm{d}x = \frac{3}{4},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1)\mathrm{d}x = 0,$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(5x^3-3x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{16},$$

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_4(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\mathrm{d}x = 0,$$

$$c_5 = \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_5(x)\mathrm{d}x = \frac{11}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\mathrm{d}x = \frac{11}{32}.$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\frac{11}{32}P_5(x)+\cdots.$$ ■

和贝塞尔函数一样，勒让德多项式也是 Maple 和 Mathematica 等 CAS 系统内置的函数，并且上面列出的系数可通过积分程序求出. 利用 CAS 我们还可以求出 $c_6=0$ 及 $c_7=-65/256$. 例 3 中的函数 f 的傅里叶-勒让德多项式前五项部分和为

$$S_5(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\frac{11}{32}P_5(x)-\frac{65}{256}P_7(x).$$

$S_5(x)$在区间$-1<x<1$上的图像如图 11.19 所示.

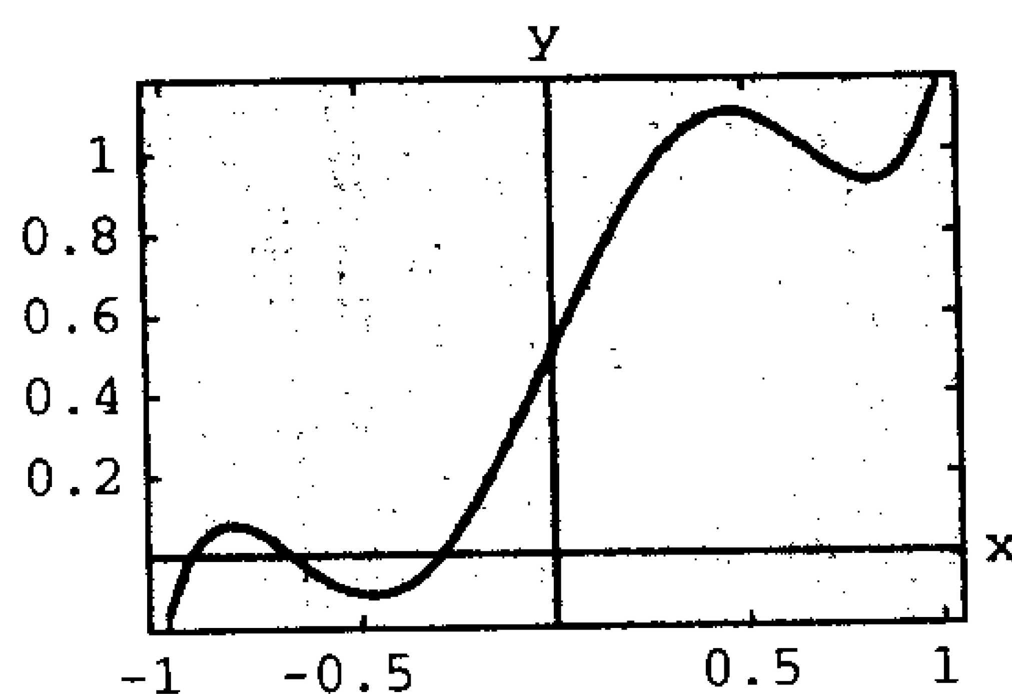


图 11.19 傅里叶-勒让德级数的部分和

级数的其他形式 在实际应用中，傅里叶-勒让德多项式会以另一种形式出现. 如果令 $x=\cos\theta$，那么 $x=1$ 意味着 $\theta=0$，而 $x=-1$ 意味着 $\theta=\pi$. 因为 $\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$，所以(21)和(22)分别变为

$$F(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta), \tag{23}$$

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} F(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta, \tag{24}$$

其中 $f(\cos\theta)$被 $F(\theta)$代替.

练习 11.5

11.5.1 傅里叶-贝塞尔级数

1. 求出由 $J_1(3\lambda)=0$ 定义的前 4 个特征值 λ_k. [提示：请参考 6.3 节的表 6.2.]
2. 求出由 $J_0'(2\lambda)$定义的前 4 个特征值 λ_k.

在习题 3～6 中，利用满足给定边界条件的零阶贝塞尔函数对函数 $f(x)=1$，$0<x<2$ 进行傅里叶-贝塞尔级数展开.

3. $J_0(2\lambda)=0$
4. $J'_0(2\lambda)=0$
5. $J_0(2\lambda)+2\lambda J'_0(2\lambda)=0$
6. $J_0(2\lambda)+\lambda J'_0(2\lambda)=0$

在习题 7～10 中，利用与边界条件相同阶数的贝塞尔函数对给定函数进行傅里叶-贝塞尔级数展开.

7. $f(x)=5x$，$0<x<4$
   $3J_1(4\lambda)+4\lambda J'_1(4\lambda)=0$
8. $f(x)=x^2$，$0<x<1$
   $J_2(\lambda)=0$
9. $f(x)=x^2$，$0<x<3$
   $J'_0(3\lambda)=0$ [提示：$t^3=t^2\cdot t$.]
10. $f(x)=1-x^2$，$0<x<1$
   $J_0(\lambda)=0$

计算机试验作业

11. (a)利用 CAS 绘出 $y=3J_1(x)+xJ'_1(x)$在某区间上的图像，使得前 5 个 x 的正截距包含在图像中.

(b)利用 CAS 中的求根程序近似求出方程 $3J_1(x)+xJ'_1(x)=0$ 的前 5 个根 x_i.

(c)利用(b)中获得的数据求出满足 $3J_1(4\lambda)+4\lambda J'_1(4\lambda)=0$ 的前 5 个正特征值 λ_i.

(d)如果方便的话，求出前 10 个正特征值.

12. (a)利用习题 11(c)求得的特征值和 CAS 近似求出在习题 7 中得到的傅里叶–贝塞尔级数的前 5 个系数 c_i 的值.

(b)利用 CAS 绘出习题 7 中傅里叶–贝塞尔级数的部分和 $S_N(x)(N=1, 2, 3, 4, 5)$的图像.

(c)如果方便的话，绘出部分和 $S_{10}(x)$在 $0<x<4$ 和 $0<x<50$ 上的图像.

11.5.2 傅里叶–勒让德级数

在习题 13 和 14 中，写出给定函数的傅里叶–勒让德展开的前五个非零项. 如果方便的话，利用 CAS 求出系数. 用 CAS 绘出部分和 $S_5(x)$的图像.

13. $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ x, & 0<x<1\end{cases}$　　14. $f(x)=e^x, \ -1<x<1$

15. 前三个勒让德多项式分别是 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，及 $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$. 如果 $x=\cos\theta$，那么 $P_0(\cos\theta)=1$ 且 $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$. 证明 $P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$.

16. 利用习题 15 给出的结果求出 $F(\theta)=1-\cos 2\theta$ 的傅里叶–勒让德展开(23).

17. 勒让德多项式 $P_n(x)$是偶函数还是奇函数，取决于 n 是偶数还是奇数. 证明如果 f 是$(-1, 1)$上的偶函数，那么(21)和(22)分别变为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}P_{2n}(x), \tag{25}$$

$$c_{2n}=(4n+1)\int_0^1 f(x)P_{2n}(x)\mathrm{d}x. \tag{26}$$

18. 证明如果 f 是$(-1, 1)$上的奇函数，那么(21)和(22)分别可写为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+1}P_{2n+1}(x), \tag{27}$$

$$c_{2n+1}=(4n+3)\int_0^1 f(x)P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x. \tag{28}$$

级数(25)和(26)也可用于 f 只定义在区间(0,1)上的情况. 级数(25)和(27)都可以表示(0,1)上的 f;但在区间(−1,0)上,(25)表示一个偶延拓而(27)表示一个奇延拓. 在习题 19 和 20 中,写出给定函数展开的前四个非零项. 级数在(−1,1)上表示什么函数?利用 CAS 绘出部分和 $S_4(x)$ 的图像.

19. $f(x)=x, 0<x<1$;(25)　　20. $f(x)=1, 0<x<1$;(27)

讨论题

21. 如果将习题 12 中的部分和图像在诸如 $-30<x<30$ 的对称区间上绘出,那么图像具有对称性吗?请解释.

22. (a) 徒手绘出习题 3 在区间 $-2<x<2$ 上收敛的傅里叶–贝塞尔级数的图像.

(b) 如果习题 7 中的特征值由 $3J_2(2\lambda)+4\lambda J_2'(2\lambda)=0$ 定义,徒手绘出在区间 $-1<x<1$ 上收敛的傅里叶–贝塞尔级数的图像.

23. 讨论为什么定义在区间(−1,1)上的多项式函数的傅里叶–勒让德展开是有限级数. 求出下列函数的有限傅里叶–勒让德级数.

(a) $f(x)=x^2$　　(b) $f(x)=x^3$

第 11 章复习题

不看教材，在习题 1 ～ 6 中填空或判断对错.

1. 函数 $f(x) = x^2 - 1$ 和 $g(x) = x^5$ 在$[-\pi,\pi]$上正交.
2. 奇函数 f 和奇函数 g 的乘积是________.
3. 为了利用适当的三角级数展开 $f(x) = |x| + 1, -\pi < x < \pi$，需要用到__________级数.
4. $y = 0$ 永远不会是施图姆-刘维尔问题的特征函数.
5. $\lambda = 0$ 永远不会是施图姆-刘维尔问题的特征值.
6. 如果函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 展开成傅里叶级数，那么这个级数在 $x = -1$ 处收敛于___________，在 $x=0$ 处收敛于__________，且在 $x=1$ 处收敛于__________.
7. 假设函数 $f(x)=x^2+1$，$0<x<3$ 展开成傅里叶级数、余弦级数和正弦级数，那么在 $x=0$ 处每个级数会收敛于何值.
8. 对于 $\lambda=25$，相应于边界值问题 $y''+\lambda y=0$，$y'(0)=0$，$y(\pi/2)=0$ 的特征函数是什么?
9. 切比雪夫微分方程(Chebyshev's differential equation)$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 有多项式解 $y=T_n(x)$，$n=0, 1, 2, \cdots$. 切比雪夫多项式集$\{T_n(x)\}$在给定区间上关于特定的权函数 $w(x)$正交. 给出正交关系.
10. 勒让德多项式集$\{P_n(x)\}$，其中 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，…在区间$[-1, 1]$上关于权函数 $w(x)=1$ 正交. 解释为什么对于 $n>0$ 有 $\int_{-1}^{1} P_n(x)\mathrm{d}x = 0$.
11. 不要做任何运算，解释为什么 $f(x)=\cos^2 x$，$0<x<\pi$ 的余弦级数为有限级数 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$.
12. (a)证明集

$$\left\{\sin\frac{\pi}{2L}x,\ \sin\frac{3\pi}{2L}x,\ \sin\frac{5\pi}{2L}x,\ \cdots\right\}$$

在区间 $0\leqslant x\leqslant L$ 上正交.

(b)求出(a)中每个函数的模. 构造一个标准正交集.

13. 将 $f(x)=|x|-x$，$-1<x<1$ 展开成傅里叶级数.
14. 将 $f(x)=2x^2-1$，$-1<x<1$ 展开成傅里叶级数.
15. 将 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$0<x<1$ 展开成下列级数：

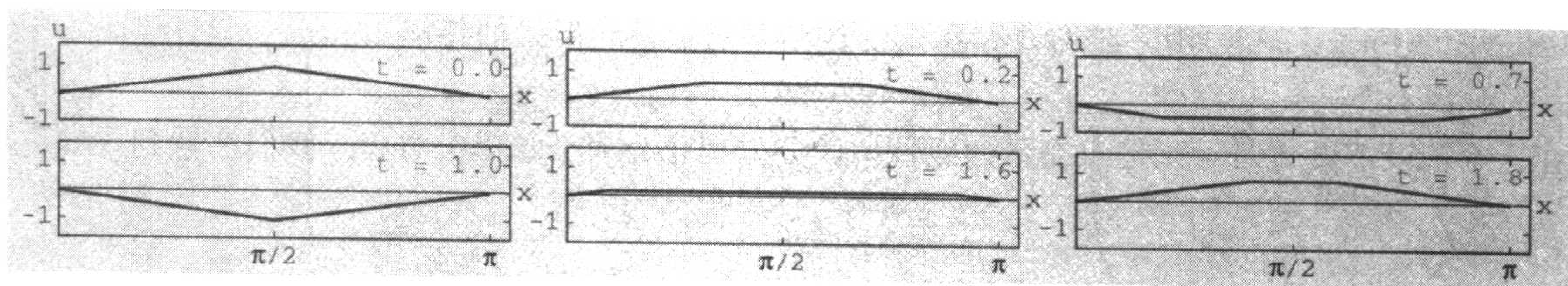
(a)余弦级数　　(b)正弦级数

16. 在习题 13、14 和 15 中，绘出每个级数所收敛的 f 的周期性延拓.
17. 求出边界值问题

$$x^2y''+xy'+9\lambda y=0,\ y'(1)=0,\ y(e)=0$$

的特征值和特征函数.

18. 给出习题 17 中特征函数的正交关系.
19. 利用满足边界条件 $J_0(4\lambda)=0$ 的零阶贝塞尔函数，将 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<2 \\ 0, & 2<x<4 \end{cases}$ 展开成傅里叶-贝塞尔级数.
20. 将 $f(x)=x^4$，$-1<x<1$ 展开成傅里叶-勒让德级数.



拨弦模型；见 12.4 节习题 21

第 12 章　偏微分方程及直角坐标系下的边界值问题

在本章以及后两章中将会强调两种求解某些特定类型偏微分方程的方法，这些方程经常出现在与温度分布、振动、势能有关的问题中．这些边界值问题可以用相对简单的线性二阶偏微分方程来描述．解它们的这两种方法其基本思想都是通过把偏微分方程化为一个或更多个常微分方程来求解．

本章我们从线性偏微分方程的变量分离法讲起．这个方法的应用可以使我们回顾第 11 章中的一个重要概念，即特征值、特征函数以及函数无穷正交级数的展开形式．

12.1　可分离的偏微分方程

与常微分方程一样，偏微分方程(PDE)也可以分为线性的或非线性的．类似于线性常微分方程(请参考 1.1 节(6))，在线性偏微分方程中因变量及其偏导数仅以一次幂的形式出现．在本章和后面几章中，我们只关注线性偏微分方程，大部分内容将是关于二阶线性方程的．

线性偏微分方程　若令 u 表示因变量，x 和 y 表示自变量，则线性二阶偏微分方程(linear second-order partial differential equation)的一般形式为

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G, \tag{1}$$

其中 A，B，C，…，G 是 x 和 y 的函数．当 $G(x, y)=0$ 时，方程(1)称为是齐次的(homogeneous)，否则它就是非齐次的(nonhomogeneous)．例如，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ 和 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=xy$$

分别是齐次和非齐次的．

偏微分方程的解　线性偏微分方程(1)的解是两个自变量的函数 $u(x, y)$，它具有在方程中出现的所有偏导数，并且在 xy 平面上的某个区域中使方程成立．

这里我们要讨论的不是求解线性偏微分方程通解的方法．不但线性二阶偏微分方程的通解通常很难得到，而且在实际应用中即使求出了通解也不总是有用的．因此，我们全部讨论的焦点集中在如何求解某些更重要的线性偏微分方程的特解，也就是在实际应用中经常遇到的那些类型的方程的特解．

分离变量法　求解线性偏微分方程的特解有几种方法．在变量分离法(method of

separation of variable)中，我们要寻找 x 函数和 y 函数乘积形式的特解

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

在这个假设下，有时可以把双变量的线性偏微分方程化为两个常微分方程. 我们注意到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

其中撇记号表示普通的微分.

例 1　分离变量法的使用

求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 的乘积形式的解.

解　如果 $u(x,\ y)=X(x)Y(y)$，那么方程变为

$$X''Y = 4XY'.$$

在两边同除以 $4XY$ 之后，我们可以进行变量分离：

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}.$$

因为上式左边是独立于 y 的，并且等于右边，右边是独立于 x 的，由此可以得出方程两端是 x、y 无关的. 换句话说，也就是方程的每边必须是常数. 在实际计算中，为了方便而把这个实的分离常数写为 λ^2 或 $-\lambda^2$ 的形式. 我们分三种情形来讨论.

情形 Ⅰ：　如果 $\lambda^2>0$，那么从这两个等式

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda^2$$

可以推出

$$X'' - 4\lambda^2 X = 0 \text{ 和 } Y' - \lambda^2 Y = 0.$$

最后两个方程的解分别为

$$X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x \text{ 及 } Y = c_3 e^{\lambda^2 y},$$

因此偏微分方程的特解是

$$\begin{aligned} u &= XY \\ &= (c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x)(c_3 e^{\lambda^2 y}) \\ &= A_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + B_1 e^{\lambda^2 y} \sinh 2\lambda x, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $A_1=c_1c_3$，$B_1=c_2c_3$.

情形 Ⅱ：　如果 $-\lambda^2<0$，那么从这两个等式

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda^2$$

可以推出

$$X'' + 4\lambda^2 X = 0 \text{ 和 } Y' + \lambda^2 Y = 0.$$

因为这些方程的解分别为

$$X = c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \sin 2\lambda x \text{ 及 } Y = c_6 e^{-\lambda^2 y},$$

所以另外一个特解为

$$u = A_2\, e^{-\lambda^2 y}\cos 2\lambda x + B_2\, e^{-\lambda^2 y}\sin 2\lambda x\,, \tag{3}$$

其中 $A_2 = c_4 c_6$，$B_2 = c_5 c_6$.

情形Ⅲ： 如果 $\lambda^2 = 0$，那么有

$$X'' = 0 \text{ 和 } Y' = 0.$$

在这种情况下，$X = c_7 x + c_8$，$Y = c_9$，因此

$$u = A_3\, x + B_3\,, \tag{4}$$

其中 $A_3 = c_7 c_9$，$B_3 = c_8 c_9$. ■

请读者证明(2)、(3)和(4)满足所给的方程. 请参考练习 2.1 的习题 29.

变量分离法不是一种求特解的通用方法；某些线性偏微分方程是不可分离的. 请读者证明在 $u = XY$ 的假设下不能求出 $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial y = x$ 的解.

叠加原理 下面的定理类似于定理 4.2，称为**叠加原理**(superposition principle).

定理 12.1 叠加原理

如果 u_1，u_2，…，u_k 是齐次线性偏微分方程的解，那么线性组合

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k$$

也是它的一个解，其中 $c_i (i=1, 2, \cdots, k)$ 是常数.

在本章余下的部分里，我们假设无论何时都有齐次线性方程解的一个无穷集 u_1，u_2，u_3，…，我们可以用无穷级数

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

构造它的另外一个解 u，其中 $c_i (i=1, 2, \cdots)$ 都是常数.

方程的分类 双自变量线性二阶常系数偏微分方程可以被分为三种类型. 这种分类方法仅仅根据其二阶导数系数的类型来分类. 当然，我们假设系数 A、B、C 至少有一个不为零.

定义 12.1 方程的分类

线性二阶偏微分方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

其中 A、B、C、D、E、F 都是实常数，分别称为是

双曲型的(hyperbolic)，　*若* $B^2 - 4AC > 0$，

抛物型的(parabolic)，　*若* $B^2 - 4AC = 0$，

椭圆型的(elliptic)，　*若* $B^2 - 4AC < 0$.

例 2 给线性二阶偏微分方程分类

给下列方程分类：

(a) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$　(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

解 (a)把所给的方程写为

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

由此可以看出 $A=3$，$B=0$，$C=0$. 因为 $B^2 - 4AC = 0$，所以方程是抛物型的.

(b)把所给的方程写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

由此可以看出 $A=1$，$B=0$，$C=-1$，$B^2-4AC=-4(1)(-1)>0$. 因此方程是双曲型的.

(c)由方程可以看出 $A=1$，$B=0$，$C=1$，$B^2-4AC=-4(1)(1)<0$，因此方程是椭圆型的. ■

关于为什么要对二阶偏微分方程进行分类更详细的解释超出了本书的范围. 但是这个答案是根据我们希望解在某种类型边界条件下的偏微分方程而考虑的，这些边界条件可以是边界值或初始条件. 适用于给定方程的边界条件的类型依赖于这个方程是双曲型的、抛物型的还是椭圆型的.

练习 12.1

在习题 1～16 中，如果可能，利用变量分离法求出所给偏微分方程乘积形式的解.

1. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$

2. $\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

3. $u_x+u_y=u$

4. $u_x=u_y+u$

5. $x\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial y}$

6. $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

8. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+u=0$

9. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=\frac{\partial u}{\partial t}$，$k>0$

10. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$，$k>0$

11. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

12. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2k\frac{\partial u}{\partial t}$，$k>0$

13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

14. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

15. $u_{xx}+u_{yy}=u$

16. $a^2u_{xx}-g=u_{tt}$，g 是常数

在习题 17～26 中，对所给偏微分方程进行分类，分为双曲型、抛物型和椭圆型三类.

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

18. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

19. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

20. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

21. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

22. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}=0$

23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0$

24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$

25. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

26. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$，$k>0$

27. 证明方程

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

有乘积形式的解

$$u=e^{-k\lambda^2 t}(AJ_0(\lambda r)+BY_0(\lambda r)).$$

28. 证明方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

有乘积形式的解

$$u=(c_1\cos\lambda\theta+c_2\sin\lambda\theta)(c_3 r^{\lambda}+c_4 r^{-\lambda}).$$

29. 证明乘积解(2)、(3)、(4)满足例 1 中的一阶方程.

30. 定义 12.1 可以扩展到系数为 x、y 函数的线性偏微分方程. 求 xy 平面上的区域，使得方程

$$(xy+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(x+2y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+xy^2 u=0$$

是双曲型、抛物型或椭圆型的.

12.2 经典方程与边界值问题

在本章后面的部分以及 13～15 章中，我们将致力于求解下面的经典数学物理方程：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad k>0 \tag{1}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{3}$$

或这些方程的变形. 偏微分方程(1)、(2)和(3)分别称为一维热传导方程(one-dimensional heat equation)、一维波动方程(one-dimensional wave equation)、二维拉普拉斯方程(Laplace's equation in two dimensions). “一维”的意思是 x 表示空间变量，而 t 表示时间. 由定理 12.1 可知热传导方程(1)是抛物型的，波动方程(2)是双曲型的，拉普拉斯方程是椭圆型的. 这点在第 15 章中非常重要.

热传导方程 方程(1)出现在热传导理论中，也就是热通过导体杆或细的导线转移的理论. 函数 $u(x,t)$表示物体的 x 处在某个时刻 t 的温度. 而在机械振动中，经常会用到波动方程(2). 出于讨论的需要，(2)的解 $u(x,t)$表示一个理想化弦的位移. 最后，拉普拉斯方程(3)的解 $u(x,t)$可以解释为二维平面上稳定的(也就是和时间无关)温度分布.

尽管我们不得不做出许多简化的假设，但是还是很值得看看这些方程是如何构造的.

设一个长为 L 的细杆，横截面大小为 A，处在 x 轴的$[0,L]$区间上. 请参考图 12.1，假设：

- 杆上的热传导仅发生在沿 x 轴的方向.
- 杆的侧面或弯曲的表面是绝热的；即没有热量从表面散失.
- 杆本身不会产生任何热量.
- 杆是同质的；即每单位体积的质量 ρ 是恒定的.
- 杆的比热 γ 和导热系数 K 是恒定的.

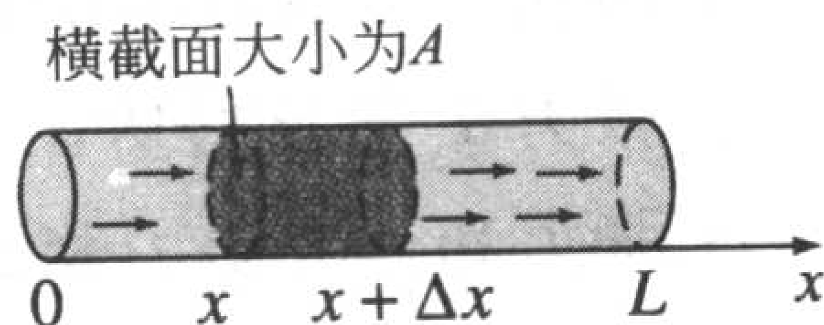


图 12.1

为了推导温度 $u(x, t)$满足的偏微分方程，我们需要两个热传导的经验法则：

(ⅰ)质量 m 所具有的热量 Q 为

$$Q = \gamma m u, \tag{4}$$

其中 u 是物质的温度.

(ⅱ)如图 12.1 所示的热量沿横截面传导的速率 Q_t 与横截面的大小 A 以及温度对 x 的偏导数成正比：

$$Q_t = -KAu_x. \tag{5}$$

因为热量沿温度递减的方向流动，所以(5)式中的负号使得 Q_t 在 $u_x<0$ 的情况下是正的(热量向右流动)，在 $u_x>0$ 的情况下是负的(热量向左流动). 如果图 12.1 中杆在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的圆切面非常薄，那么 $u(x, t)$可以看作是这个区间内每一点温度的近似值. 切面的质量为 $m=\rho(A\Delta x)$，再由(4)可知其上的热量为

$$Q = \gamma\rho A\Delta x u. \tag{6}$$

进一步，当热量沿着 x 正方向流动时，由(5)式可以看到切面中热量的净流动速率为

$$-KAu_x(x,t) - [-KAu_x(x+\Delta x,t)] = KA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)]. \tag{7}$$

对(6)式求关于 t 的微分，我们可以看到这种净流动速率也可以用

$$Q_t = \gamma\rho A\Delta x u_t \tag{8}$$

给出.

由(7)和(8)式相等可得

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = u_t. \tag{9}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，对(9)式取极限，最后可以得到形如[⊖]

$$\frac{K}{\gamma\rho}u_{xx} = u_t$$

的(1)式. 习惯上定义 $k=K/\gamma\rho$，并称这个正常数为热扩散系数(thermal diffusivity).

波动方程　考虑一个长为 L 的弦，比如吉他的琴弦，在 x 轴上 $x=0$ 和 $x=L$ 之间张紧. 当弦开始振动时，假设运动发生在 xu 平面内，弦上每一点的运动都发生在垂直于 x 轴的方向上(横向振动). 如图 12.2(a)所示，令 $u(x, t)$表示弦上任一点在 $t>0$ 时距离 x 轴的垂直位移. 我们进一步假设：

- 弦具有很好的弹性.
- 弦是同质的；即每单位长度的质量 ρ 是恒定的.
- 位移 u 相对于弦的长度来说是很小的.
- 曲线在所有点处的斜率都是很小的.
- 张力 $\mathbf{T}$ 与弦相切，并且 T 的大小在所有点都相同.
- 张力和地心引力相比是很大的.
- 没有外部力作用在弦上.

⊖ 由微积分的知识可知 $u_{xx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x+\Delta x, t)-u_x(x, t)}{\Delta x}$.

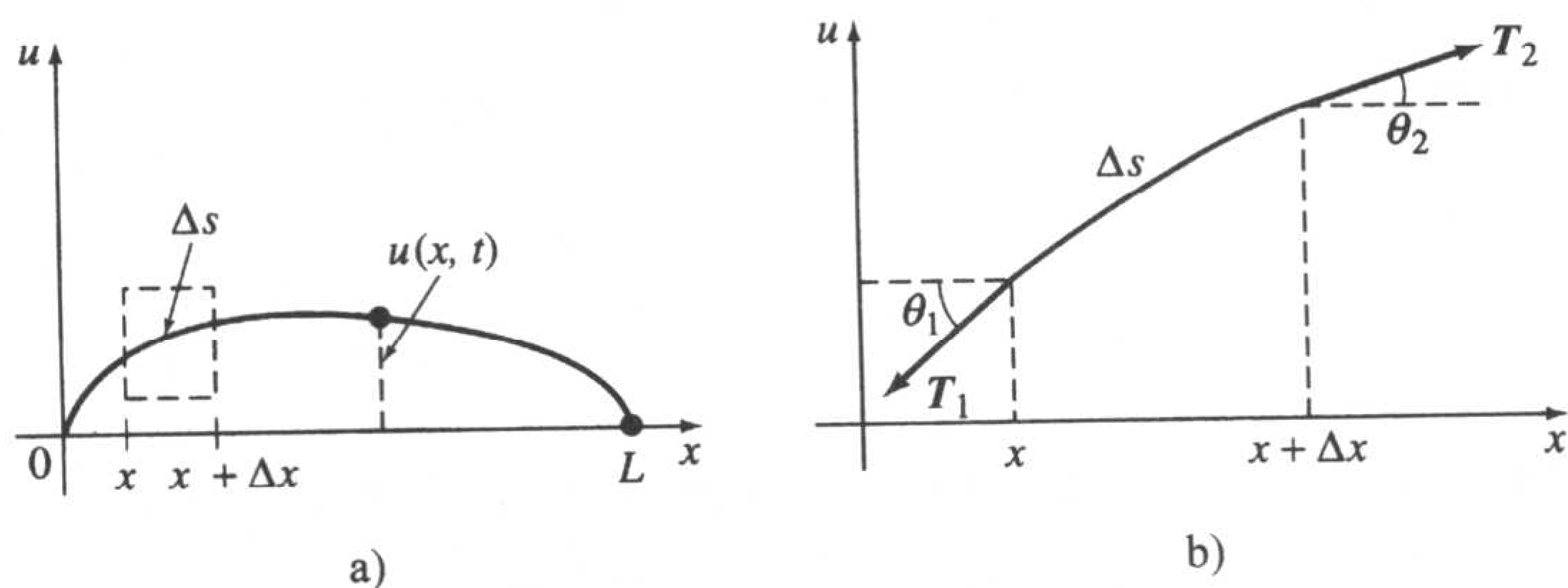


图 12.2

如图 12.2(b)所示，张力 $\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 与曲线在$[x,\ x+\Delta x]$上的末端相切．当 θ_1 和 θ_2 很小时，作用在弦 Δs 上垂直方向的净力为

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 \approx T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 = T[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)],^{\ominus}$$

其中 $T=|\boldsymbol{T}_1|=|\boldsymbol{T}_2|$．因为 $\rho\Delta s\approx\rho\Delta x$ 是弦在$[x,\ x+\Delta x]$上的质量，所以由牛顿第二定律可得

$$T[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] = \rho\Delta x u_{tt}$$

或

$$\frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

若对 $\Delta x\to 0$ 取极限，则上面的方程变为 $u_{xx}=(\rho/T)u_{tt}$．令 $a^2=T/\rho$ 就得到(2)式．

拉普拉斯方程 尽管我们这里不介绍拉普拉斯方程是如何推导来的，但二维或三维拉普拉斯方程经常在与时间无关的势能问题中出现，如静电场、重力场以及流体力学中的速度问题．此外，拉普拉斯方程的解可以被解释为是一种稳定的温度分布．正如图 12.3 所示，(3)的解 $u(x,\ y)$可以表示一个矩形平面上不同点的温度，它和时间无关．二维和三维拉普拉斯方程可以简写为 $\nabla^2 u=0$，其中

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ 和 } \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

分别称为函数 u 的二维拉普拉斯算子(Laplacian)和三维拉普拉斯算子．

我们通常希望求出方程(1)、(2)和(3)满足一定边界条件的解．

初始条件 因为(1)和(2)的解依赖于时间 t，所以我们可以描述当 $t=0$ 时的情况；也就是我们可以给出初始条件(initial condition，IC)．若 $f(x)$表示图 12.1 中沿杆的初始温度分布，则(1)的解 $u(x,\ t)$必须满足单一的初始条件

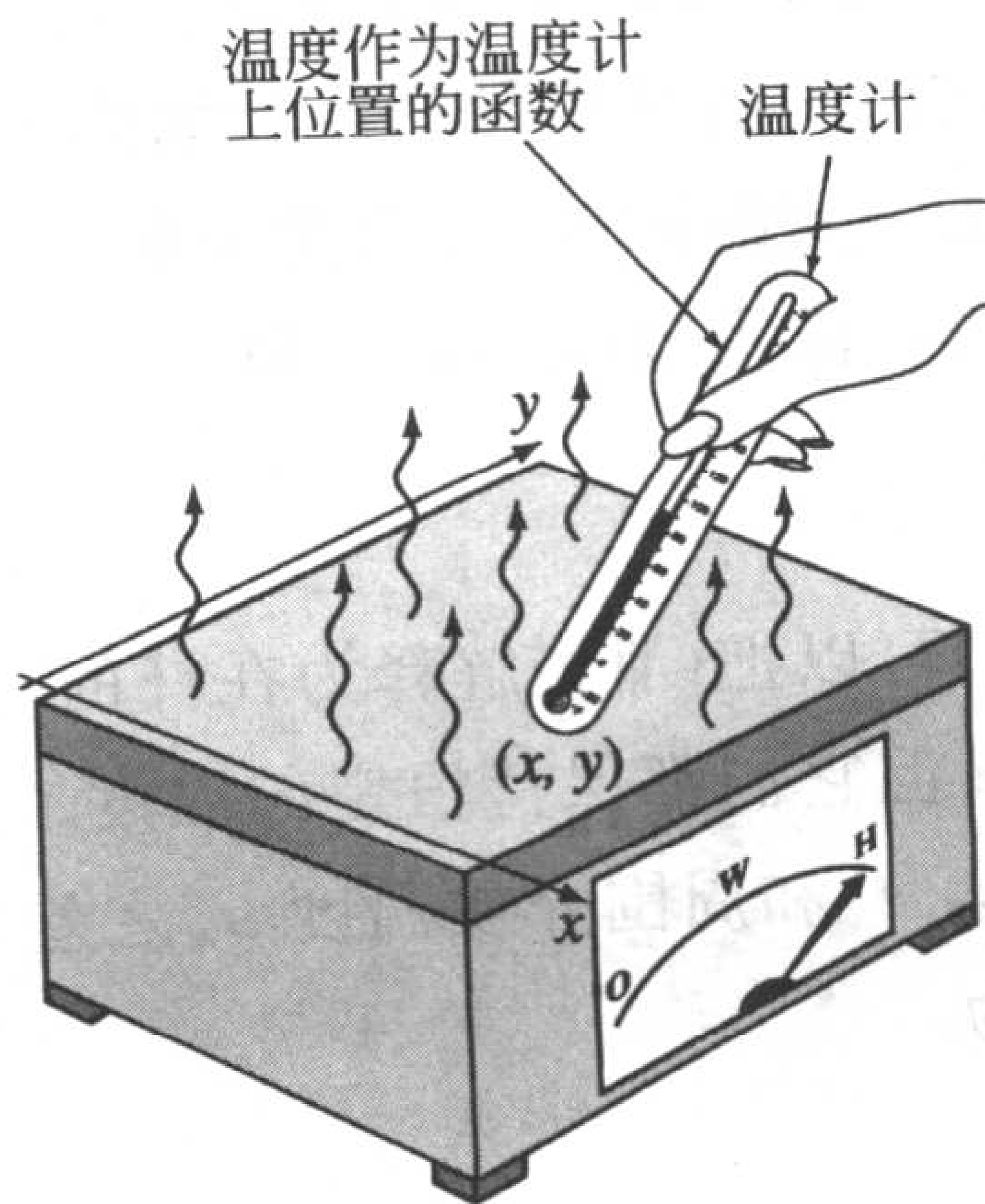


图 12.3

⊖ $\tan\theta_2=u_x(x+\Delta x,\ t)$和 $\tan\theta_1=u_x(x,\ t)$是斜率的等价表示．

$u(x, 0)=f(x)$，$0<x<L$. 另一方面，对于振动的弦我们可以给出它的初始位移(或形状)$f(x)$以及它的初始速度 $g(x)$. 用数学语言表达就是，我们要求一个函数 $u(x, t)$满足(2)式和两个初始条件：

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \tag{10}$$

例如，如图 12.4 所示，弦可以被拉起，然后以静止状态释放($g(x)=0$).

边界条件 图 12.4 中的弦无论在何时都固定在 x 轴的 $x=0$ 和 $x=L$ 之间. 我们可以用两个边界条件(boundary condition, BC)来描述：

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

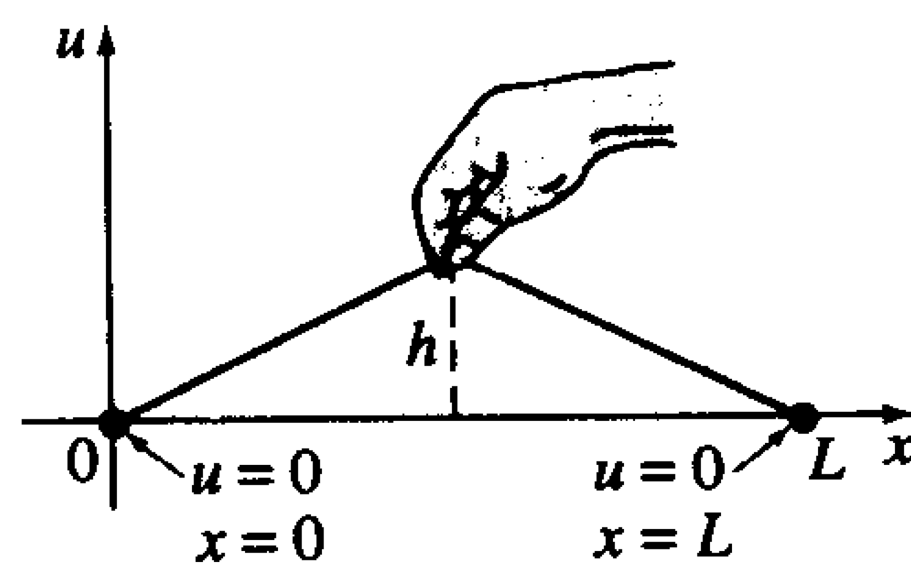


图 12.4

注意在这里，(10)中的函数 $f(x)$是连续的，因此 $f(0)=0$，$f(L)=0$. 一般地，和方程(1)、(2)、(3)相关的边界条件有三种类型. 在边界上，我们可以给出下列类型边界条件之一的值：

$$(\text{i})\ u, \quad (\text{ii})\ \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (\text{iii})\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu, h \text{ 是常数}.$$

这里 $\partial u/\partial n$ 表示 u 的法向导数(u 沿垂直于边界方向的方向导数). 第一种类型的边界条件(ⅰ)称为狄利克雷条件(Dirichlet condition)；第二种类型的边界条件(ⅱ)称为诺伊曼条件(Neumann condition)；第三种类型的边界条件(ⅲ)称为罗宾条件(Robin condition). 例如，对 $t>0$，图 12.1 中杆右端的典型条件为

$$(\text{i})'\ u(L,t) = u_0, \quad u_0 \text{ 是常数},$$

$$(\text{ii})'\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,$$

$$(\text{iii})'\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -h(u(L,t) - u_m), h > 0 \text{ 和 } u_m \text{ 是常数}.$$

条件(ⅰ)′仅仅表示边界 $x=L$ 在 $t>0$ 时刻时具有恒定的温度 u_0. 条件(ⅱ)′表示边界 $x=L$ 是绝热的. 由热传导的经验法则可知，热量在边界上的流量(也就是单位时间内热量流过边界上单位面积的数量)与温度 u 的法向导数值 $\partial u/\partial n$ 成正比. 因此，若边界 $x=L$ 是绝热的，则没有热量流入或流出，所以有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

我们可以把(ⅲ)′解释为在杆的右端由于和介质的接触而损失的热量，这些介质可以是空气或水，但它们都保持恒定的温度. 从牛顿的冷却定律知，由杆向外流出的热量与杆边界上的温度 $u(L, t)$和周围介质温度 u_m之差成正比. 我们注意到如果热量从杆的左端流失，那么边界条件就为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(u(0,t) - u_m).$$

代数符号的改变和我们的假设一致，假设杆的温度比周围介质温度高，则必有 $u(0, t)>u_m$，

$u(L, t)>u_m$. 在 $x=0$ 和 $x=L$ 处，斜率 $u_x(0, t)$ 和 $u_x(L, t)$ 必须分别是正的和负的.

当然，在杆的两端，我们可以同时给出不同的条件. 例如，可以有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \text{ 和 } u(L,t)=u_0,t>0.$$

我们注意到边界条件(ⅰ)′是齐次的，若 $u_0=0$；是非齐次的，若 $u_0\neq0$. 边界条件(ⅱ)′是齐次的. (ⅲ)′是齐次的，若 $u_m=0$；是非齐次的，若 $u_m\neq0$.

边界值问题 诸如

$$\text{解}:a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<L,\quad t>0$$

$$\text{约束}:(\text{BC})\ u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad t>0 \tag{11}$$

$$(\text{IC})\ u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),0<x<L$$

和

$$\text{解}:\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$

$$\text{约束}:(\text{BC})\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0,\quad 0<y<b\\ u(x,0)=0,\quad u(x,b)=f(x),\quad 0<x<a\end{cases} \tag{12}$$

的问题称为边界值问题(boundary-value problem).

修正 在加入内部或外部对物理系统的影响后，偏微分方程(1)、(2)、(3)必须加以修正. 一维热传导方程和波动方程更一般的形式分别为

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G(x,t,u,u_x)=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{13}$$

和

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t,u,u_t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14}$$

例如，若从杆的侧面有热量传导入温度恒为 u_m 的周围介质，则热传导方程(13)为

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_m)=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

在(14)中，函数 F 可以表示作用在弦上的各种力. 例如，当考虑外部力、阻尼力以及弹性回复力时，(14)的形式为

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\underset{\text{外力}}{\underset{\uparrow}{f(x,t)}}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\underset{\text{阻尼力}}{\underset{\uparrow}{c\frac{\partial u}{\partial t}}}+\underset{\text{回复力}}{\underset{\uparrow}{ku}}. \tag{15}$$

注 对大量不同类型现象的分析使我们得到了数学模型(1)、(2)、(3)或它们包含更多空间变量的广义形式. 例如，(1)有时称为扩散方程(diffusion equation)，因为溶液中可溶物质的扩散类似于固体中热的流动. 在这种情况下，满足偏微分方程的函数 $u(x, t)$ 表示溶解物的浓度. 类似地，方程(1)也可以由电缆或传输线路中电荷流动的规律推出. 在这种情况下(1)式称为电报方程(telegraph equation). 可以证明在某种

假设下，线路中的电流和电压降均是满足和(1)式相同的两个方程的函数. 波动方程(2)也经常出现在高频传输线路、流体力学、声学和弹性学的理论中. 拉普拉斯方程(3)在薄膜的静态位移中也会用到.

练习 12.2

在习题 1～4 中，长为 L 的杆放置在 x 轴的区间$[0, L]$上. 构造一个温度 $u(x, t)$的边界值问题.

1. 左端温度恒为零，右端是绝热的. 初始温度为 $f(x)$.
2. 左端温度恒为 u_0，右端温度恒为 u_1. 整个杆的初始温度为零.
3. 左端温度恒为 100，右端和温度为零的介质之间发生热量转移. 初始温度为 $f(x)$.
4. 两端都是绝热的，杆的侧面和温度为 50 的介质之间发生热量转移. 整个杆的初始温度为 100.

在习题 5～8 中，长为 L 的弦放置在 x 轴的区间$[0, L]$上. 构造位移 $u(x, t)$的边界值问题.

5. 两端都固定在 x 轴上. 弦从初始位移 $x(L-x)$处由静止释放.
6. 两端都固定在 x 轴上. 初始时刻弦没有位移，但是有初始速度 $\sin(\pi x/L)$.
7. 左端固定在 x 轴上，但是右端以 $\sin\pi t$ 的规律横向运动. 弦从初始位移 $f(x)$处以静止状态释放. 当 $t>0$ 时，横向振动受到与瞬时速率成正比的阻力的干扰.
8. 两端都固定在 x 轴上，初始时刻弦在轴上处于静止状态. 当 $t>0$ 时，一个外部垂直力作用于弦上，这个力的大小和力与弦左端的距离成比例.

在习题 9～10 中，构造稳定温度 $u(x, y)$的边界值问题.

9. 一个薄矩形板放在区域 $0\leqslant x\leqslant 4$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 上. 板的左端和底部是绝热的. 板的顶部温度恒为零，板右端的温度恒为 $f(y)$.
10. 一个半无限的板放在区域 $0\leqslant x\leqslant \pi$，$y\geqslant 0$ 上. 左端的温度恒为 e^{-y}，右端在 $0<y\leqslant 1$ 处温度恒为 100，在 $y>1$ 处恒为零. 板的底部温度恒为 $f(x)$.

12.3 热传导方程

考虑一个长为 L 的细杆，初始温度为 $f(x)$，其两端的温度对 $t>0$ 时恒为零. 如果图 12.5 所示的杆满足 12.2 节所做的假设，那么杆的温度 $u(x, t)$可以由下列边界值问题决定：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<L,\quad t>0 \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad t>0 \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L. \tag{3}$$

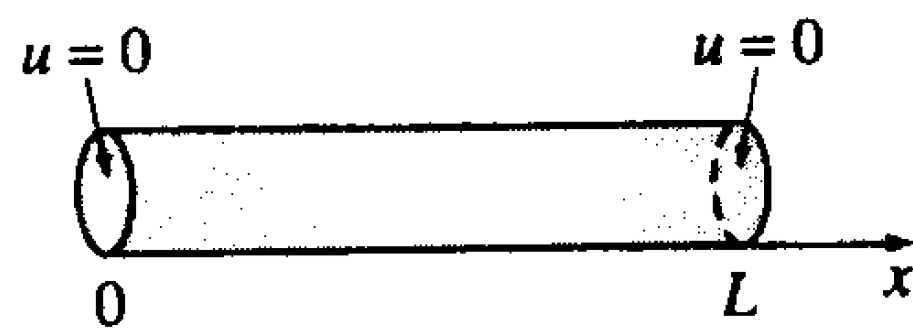


图 12.5

边界值问题的解 利用乘积 $u(x, t)=X(x)T(t)$和分离常数$-\lambda^2$可得

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{kT}=-\lambda^2, \tag{4}$$

$$X''+\lambda^2 X=0, \tag{5}$$

$$T'+k\lambda^2 T=0,$$

$$X=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x, \tag{6}$$

$$T=c_3 e^{-k\lambda^2 t}. \tag{7}$$

由 $u(0, t)=X(0)T(t)=0$ 和 $u(L, t)=X(L)T(t)=0$，我们有 $X(0)=0$，$X(L)=0$. 这些齐次边界条件和齐次方程(5)构成了正则施图姆-刘维尔问题. 把第一个条件代入(6)式马上可以

得到 $c_1=0$. 因此

$$X = c_2 \sin\lambda x.$$

由第二个边界条件可以得到 $X(L)=c_2\sin\lambda L=0$. 若 $c_2=0$，则有 $X=0$，因此 $u=0$. 为了得到非平凡解 u，我们必须有 $c_2\neq0$，所以当

$$\sin\lambda L = 0$$

时上面的方程得以满足. 这意味着 $\lambda L=n\pi$ 或 $\lambda=n\pi/L$，这里 $n=1, 2, 3, \cdots$. 所得到的值

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1,2,3,\cdots \tag{8}$$

以及相应的解

$$X = c_2 \sin\frac{n\pi}{L}x, n = 1,2,3,\cdots \tag{9}$$

分别是这个问题的特征值(eigenvalue)和特征函数(eigenfunction).

由(7)式可得 $T=c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}$，所以有

$$u_n = XT = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi}{L}x, \tag{10}$$

这里我们用 A_n 代替常数 c_2c_3. 乘积 $u_n(x, t)$满足偏微分方程(1)和边界条件(2)，并且对所有正整数 n 都成立.[⊖]然而，为了使(10)中的函数满足初始条件(3)，我们可以用下面的方式来选择系数 A_n：

$$u_n(x,0) = f(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{11}$$

一般地，条件(11)不会满足任意的 f. 因此我们不得不承认 $u_n(x, t)$不是所给问题的解. 但是应用叠加原理，函数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{12}$$

一定满足(1)和(2). 把 $t=0$ 代入(12)可得

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

这个表达式是函数 f 正弦形式的半域展开. 因此若我们令 $A_n=b_n$，$n=1, 2, 3, \cdots$，由 11.3 节的(5)式有

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

由此我们可以得出一个结论，(1)、(2)、(3)所描述的边界值问题的解可以由无穷级数

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

给出.

在有些特殊情况下，若 $u(x, 0)=100$，$L=\pi$，$k=1$，则读者可以证明系数 A_n 为

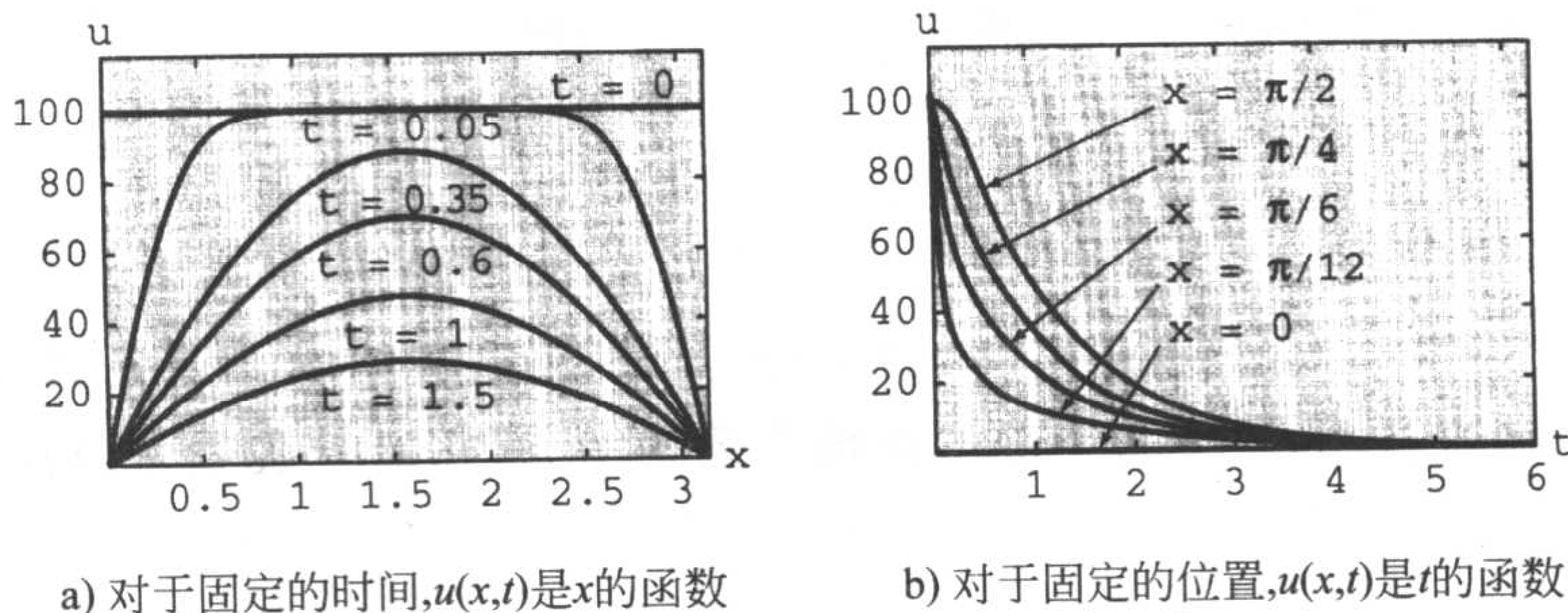
⊖ 请读者证明若分离常数为 $\lambda^2=0$ 或 $\lambda^2>0$，则(1)满足(2)的唯一解是 $u=0$.

$$A_n=\frac{200}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right],$$

并且有

$$u(x,t)=\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]e^{-n^2t}\sin nx. \tag{13}$$

解(13)的图像是三维空间中的曲面．我们可以用计算机代数系统的3D绘图程序绘制出部分和$S_n(x,t)$在一个由$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant t\leqslant T$所定义的矩形区域上的图形来近似这个曲面．此外，我们也可以借助CAS中的2D绘图程序绘出解$u(x,t)$在x轴的$[0,\pi]$上随时间t增加的图像．请参考图12.6(a)．在图12.6(b)中所绘制的是解$u(x,t)$在t轴$[0,6]$上随x增加的图像($x=0$是杆的左端，$x=\pi/2$是长为π的杆的中点)．这些函数图像说明了(13)式中一个很明显的事情，即当$t\to+\infty$时，$u(x,t)\to0$.



a) 对于固定的时间,$u(x,t)$是x的函数　　b) 对于固定的位置,$u(x,t)$是t的函数

图 12.6

练习 12.3

在习题1～2中，解热传导方程(1)，约束条件如下所示．设杆的长度为L.

1. $u(0,t)=0$，$u(L,t)=0$

$$u(x,0)=\begin{cases}1, & 0<x<L/2\\ 0, & L/2<x<L\end{cases}$$

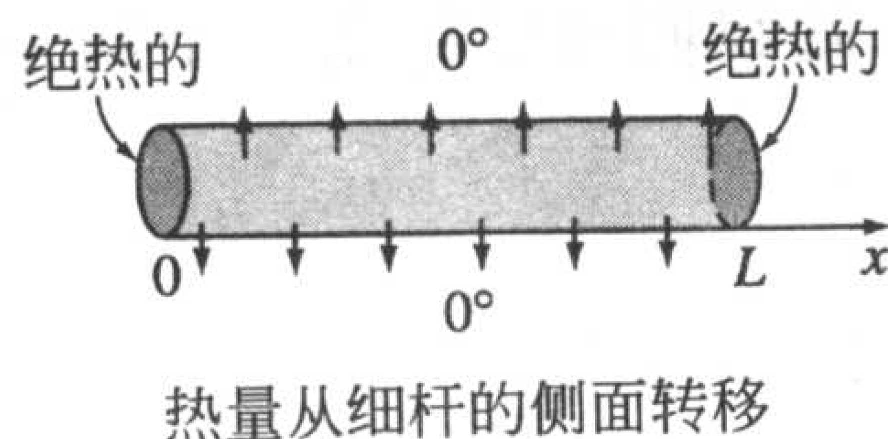
2. $u(0,t)=0$，$u(L,t)=0$

$u(x,0)=x(L-x)$

3. 长为L的杆，初始温度为$f(x)$，若它的端点$x=0$和$x=L$都是绝热的，求杆中的温度$u(x,t)$.

4. 若$L=2$，$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$，解习题3.

5. 设一个长为L的细杆，热量从它的侧面散失到周围温度为零的介质中．如果热传导服从线性规律，那么热传导方程可以写为$k\partial^2u/\partial x^2-hu=\partial u/\partial t$，$0<x<L$，$t>0$，$h$是常数．初始温度为$f(x)$，两端点$x=0$和$x=L$是绝热的，求杆的温度$u(x,t)$．请参考图12.7.



热量从细杆的侧面转移

图 12.7

6. 若端点$x=0$和$x=L$的温度恒为零，解习题5.

计算机实验作业

7. (a)解热传导方程(1)，约束条件为

$$u(0,t)=0,u(100,t)=0,t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0.8x, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.8(100-x), & 50<x\leqslant 100.\end{cases}$$

(b)用 CAS 系统的 3D 绘图程序绘制部分和 $S_5(x,\ t)$的图像，这个部分和是由(a)中解的前五个非零项组成的，并且 $0\leqslant x\leqslant 100$，$0\leqslant t\leqslant 200$. 设 $k=1.635\ 2$. 用各种不同的三维视角来观察这个曲面(在 Mathematica 中称为 **ViewPoint**).

讨论题

8. 在图 12.6(b)中，我们已经绘出了 $u(x,\ t)$在区间 $0\leqslant t\leqslant 6$ 上，在 $x=0$，$x=\pi/12$，$x=\pi/6$，$x=\pi/4$，$x=\pi/2$ 处的图像. 绘出或描述出 $u(x,\ t)$在同样的时间区间上，但是在 $x=3\pi/4$，$x=5\pi/6$，$x=11\pi/12$，$x=\pi$ 处的图像.

12.4 波动方程

现在我们能够解 12.2 节中所讨论的边界值问题(11)了. 如图 12.2(a)所示的长度为 L 的振动弦，它的垂直位移由如下条件决定：

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<L,t>0 \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad t>0 \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x). \tag{3}$$

边界值问题 利用一般的假设 $u(x,\ t)=X(x)T(t)$，对(1)式进行变量分离，可得

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda^2$$

使得

$$X''+\lambda^2X=0 \text{ 和 } T''+\lambda^2a^2T=0,$$

因此有

$$X=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x,$$
$$T=c_3\cos\lambda at+c_4\sin\lambda at.$$

如前所示，边界条件(2)可以化为 $X(0)=0$，$X(L)=0$. 依次可以求出

$$c_1=0 \text{ 及 } c_2\sin\lambda L=0.$$

由最后一个方程可以得到特征值 $\lambda=n\pi/L$，其中 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$. 相应的特征函数为

$$X=c_2\sin\frac{n\pi}{L}x,\quad n=1,2,3,\cdots$$

因此满足边界条件(2)的方程(1)的解为

$$u_n=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x, \tag{4}$$

以及

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{5}$$

令(5)中的 $t=0$，可以得到

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

它是函数 f 正弦形式的半域展开. 正如在热传导方程中所讨论的一样，我们记 $A_n=b_n$：

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx. \tag{6}$$

为求 B_n，我们对(5)式求关于 t 的微分，然后令 $t=0$：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi a}{L}t + B_n\frac{n\pi a}{L}\cos\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

为了使最后一个级数成为函数 g 在这个区间上正弦形式的半域展开，总系数 $B_n n\pi a/L$ 必须由形如 11.3 节中的(5)式给出，即

$$B_n\frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,$$

由此可以得到

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx. \tag{7}$$

这个问题的解由带有 A_n和 B_n的级数(5)组成，A_n和 B_n的定义分别如(6)和(7)式.

我们注意到当弦由静止状态释放时，有 $g(x)=0$，对 $0\leqslant x\leqslant L$ 中的每一个 x 都成立，因此 $B_n=0$.

驻波 回顾 12.2 节中波动方程的推导，边界值问题(1)、(2)、(3)解中的常数 a 为 $\sqrt{T/\rho}$，其中 ρ 为每单位长度的质量，T 是弦的张力. 当 T 足够大时，振动弦会产生乐音. 这种声音是由驻波产生的. (5)式是乘积解的叠加，称为驻波(standing waves)或正规方式(normal modes)：

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \cdots.$$

由 5.1 节的(6)和(7)式可知，乘积解(4)可以写为

$$u_n(x,t) = C_n\sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x, \tag{8}$$

其中 $C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，ϕ_n 的定义为 $\sin\phi_n = A_n/C_n$，$\cos\phi_n = B_n/C_n$. 对于 $n=1,2,3,\cdots$，驻波的图像以 $\sin(n\pi x/L)$ 的图像为基础，随时间变化的振幅为

$$C_n\sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right).$$

另外，从(8)式可以看出，对于 x 的一个固定值，每个乘积函数 $u_n(x,t)$都表示振幅为 $C_n|\sin(n\pi x/L)|$，频率为 $f_n=na/2L$ 的简谐振动. 换句话说，驻波上的每一点都有不同的振幅，但是有相同的频率. 当 $n=1$ 时，

$$u_1(x,t) = C_1\sin\left(\frac{\pi a}{L}t + \phi_1\right)\sin\frac{\pi}{L}x$$

称为第一类驻波(first standing wave)、第一类正规方式(first normal mode)或振动的基本方式(fundamental mode of vibration). 前三类驻波或正规方式如图 12.8 所示. 虚线表示不同时间的驻波. 在区间(0，L)内，驻波上满足 $\sin(n\pi/L)x=0$ 的点没有运动，这些点称为波节

(node). 例如，在图 12.8(b)和(c)中，我们可以看到第二类驻波在 $L/2$ 处有一个波节，第三类驻波在 $L/3$ 和 $2L/3$ 处有两个波节. 一般地，第 n 类振动的正规方式有 $n-1$ 个波节.

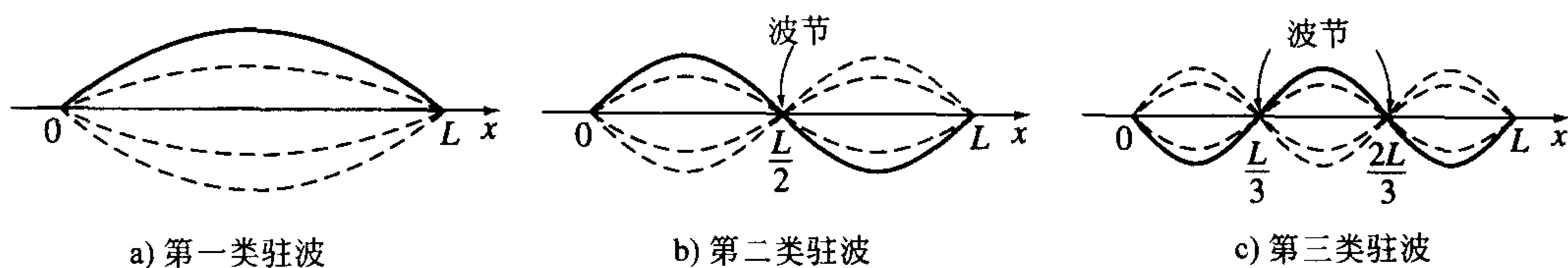


图 12.8

第一类正规方式的频率

$$f_1=\frac{a}{2L}=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

称为基频(fundamental frequency)或第一谐波(first harmonic)，它和有弦乐器的音调有直接关系. 很明显，弦的张力越大，它所产生的声音的频率就越高. 其他正规方式的频率都是基频的整数倍，称为泛音(overtone). 第二类谐波是第一泛音，如此类推.

练习 12.4

在习题 1～8 中，解波动方程(1)，约束条件如下所给.

1. $u(0,\ t)=0,\ u(L,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)=\frac{1}{4}x(L-x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

2. $u(0,\ t)=0,\ u(L,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x(L-x)$

3. $u(0,\ t)=0,\ u(L,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)$，由图 12.9 定义，$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

4. $u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)=\frac{1}{6}x(\pi^2-x^2),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

5. $u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x$

6. $u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)=0.01\sin 3\pi x,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

7. $u(0,\ t)=0,\ u(L,\ t)=0$

   $$u(x,\ 0)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{L}, & 0<x<\dfrac{L}{2}\\ 2h\left(1-\dfrac{x}{L}\right), & \dfrac{L}{2}\leqslant x<L\end{cases},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

8. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0$

   $u(x,\ 0)=x,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

   这个问题描述了一个振动弹性杆的纵向位移 $u(x,\ t)$. 在 $x=0$ 和 $x=L$ 处的边界条件称为自由端条件(free-end condition). 请参考图 12.10.

9. 一个弦的两端固定在 x 轴的 $x=0$ 和 $x=L$ 处，$t>0$. 若横向振动发生在介质中，这种介质对运动施加的阻力与瞬时速率成正比，那么波动方程的形式为

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\beta\frac{\partial u}{\partial t},0<\beta<1,t>0.$$

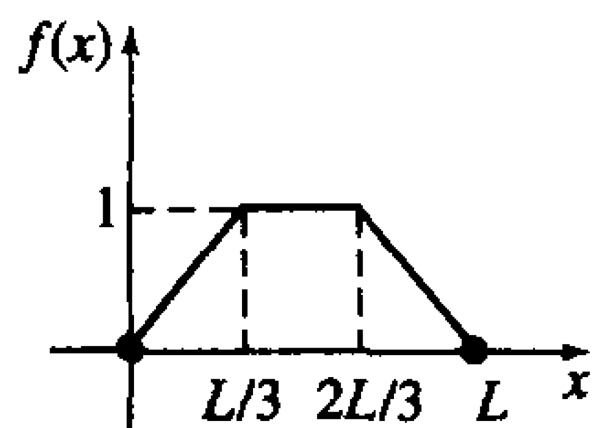


图 12.9

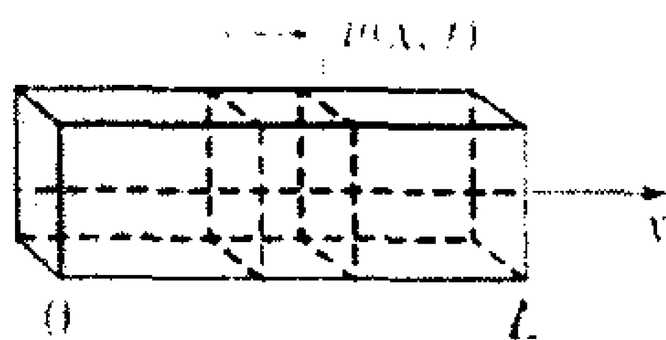


图 12.10

若弦在初始位移 $f(x)$ 处由静止释放，求位移 $u(x, t)$.

10. 证明边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u,0<x<\pi,t>0$$

$$u(0,t)=0,u(\pi,t)=0,t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi/2\\ \pi-x, & \pi/2\leqslant x<\pi\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<x<\pi$$

的解为 $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)x\cos\sqrt{(2k-1)^2+1}t$.

11. 长为 L 的振动梁，其横向位移 $u(x, t)$ 由下面的四阶偏微分方程决定：

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,0<x<L,t>0.$$

如果梁是简单支撑的(simply supported)，如图 12.11 所示，边界和初始条件为

$$u(0,t)=0,u(L,t)=0,t>0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0,t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),0<x<L.$$

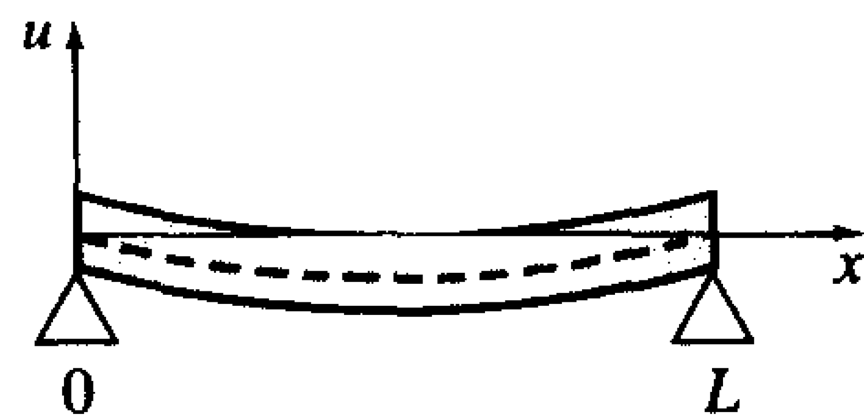


图 12.11 简单支撑的梁

解出 $u(x, t)$. [提示：为了求解方便，分离变量时我们用 λ^4 代替 λ^2.]

12. 若习题 11 中梁的两端在 $x=0$ 和 $x=L$ 处是嵌入式的(embedded)，那么对于 $t>0$，边界条件为

$$u(0,t)=0,u(L,t)=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0.$$

(a)证明这个问题的特征值是 $\lambda=x_n/L$，其中 $x_n(n=1, 2, 3, \cdots)$是方程 $\cosh x\cos x=1$ 的正根.

(b)用图形说明(a)中的方程有无穷个根.


(c)用计算器或计算机求前四个特征值的近似值. 结果保留四位小数.

13. 考虑本节所给的边界值问题(1)、(2)、(3). 若在 $0<x<L$ 上，$g(x)=0$，证明这个问题的解可以写为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)].$$

[提示：利用积化和差公式 $2\sin\theta_1\cos\theta_2=\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)$.]

14. 无限长弦的垂直位移 $u(x, t)$ 由如下初值问题决定：

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},-\infty<x<\infty,t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g(x). \tag{9}$$

解这个问题可以不用变量分离法.

(a)证明通过代换 $\xi=x+at$ 和 $\eta=x-at$ 可以把波动方程变为 $\partial^2 u/\partial\eta\partial\xi=0$.

(b)对(a)中的偏微分方程进行积分，先对 η 进行积分，再对 ξ 进行积分，证明 $u(x,t)=F(x+at)+G(x-at)$ 是波动方程的解，其中 F 和 G 是任意的二次可微函数. 用这个解和所给的初值条件证明

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\mathrm{d}s+c,$$

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\mathrm{d}s-c.$$

(c)利用(b)中的结果证明

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\mathrm{d}s. \tag{10}$$

注意当初始速度 $g(x)=0$ 时，我们可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)],-\infty<x<\infty.$$

这个解可以看作是两个行波(travelling wave)的叠加，一个向右传播$\left(\text{即}\frac{1}{2}f(x-at)\right)$，另一个向左传播$\left(\frac{1}{2}f(x+at)\right)$. 两个波的传播速度都为 a，初始位移 $f(x)$相同. (10)中 $u(x,t)$的形式称为达朗贝尔解(d'Alembert's solution).

在习题 15～17 中，利用达朗贝尔解(10)解习题 14 中的初值问题，约束条件如下所给.

15. $f(x)=\sin x$, $g(x)=1$

16. $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$

17. $f(x)=0$, $g(x)=\sin 2x$

18. 设习题 14 中的初值条件为 $f(x)=1/(1+x^2)$，$g(x)=0$，$a=1$. 绘出达朗贝尔解在时刻 $t=0$，$t=1$，$t=3$ 时的图像.

计算机实验作业

19. 考虑一个无限长弦的模型. 在初始时刻，弦固定在三个点(−1，0)，(1，0)和(0，1)上，并且在 $t=0$ 时刻同时在这三个点处释放，这个模型可以由(9)给出，并且有

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}\text{和 } g(x)=0.$$

(a)绘出弦在区间[−6，6]上的初始位置.

(b)用 CAS 绘出达朗贝尔解(10)在[−6，6]上 $t=0.2k(k=0,1,2,\cdots,25)$的图像.

(c)用计算代数系统模拟这个解. 描述弦随时间变化的运动.

20. x 轴上一个无限长的弦，在原点处用一个锤子打击这个弦，锤头的直径为 0.2in. 描述弦运动的模型由(9)给出，并且有

$$f(x)=0\quad\text{和}\quad g(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 0.1\\ 0, & |x|>0.1\end{cases}.$$

(a)用 CAS 绘出达朗贝尔解(10)在[−6，6]上 $t=0.2k(k=0,1,2,\cdots,25)$的图像.

(b)用计算代数系统模拟这个解. 描述弦随时间变化的运动.

21. 习题 7 中振动弦的模型称为拨弦模型(plucked string). 弦两端固定在 $x=0$ 和 $x=L$ 处，$x=L/2$ 处高出 x 轴 h 单位高度. 请参考图 12.4. 从 $t=0$ 时刻开始，弦由静止状态释放.

(a)用 CAS 绘出部分和 $S_6(x,t)$的图形，即解在 $t=0.1k(k=0,1,2,\cdots,20)$处前六个非零项的和. 设 $a=1$，$h=1$，$L=\pi$.

(b)用计算机代数系统模拟习题 7 解的运动.

12.5 拉普拉斯方程

假设我们希望求出矩形平板上稳定的温度 $u(x,y)$，矩形板的垂直边缘是绝热的，如图 12.12 所示．当没有热量从板的侧面散失时，我们解下列边界值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0,\quad 0<y<b \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\quad u(x,b)=f(x),\quad 0<x<a. \tag{3}$$

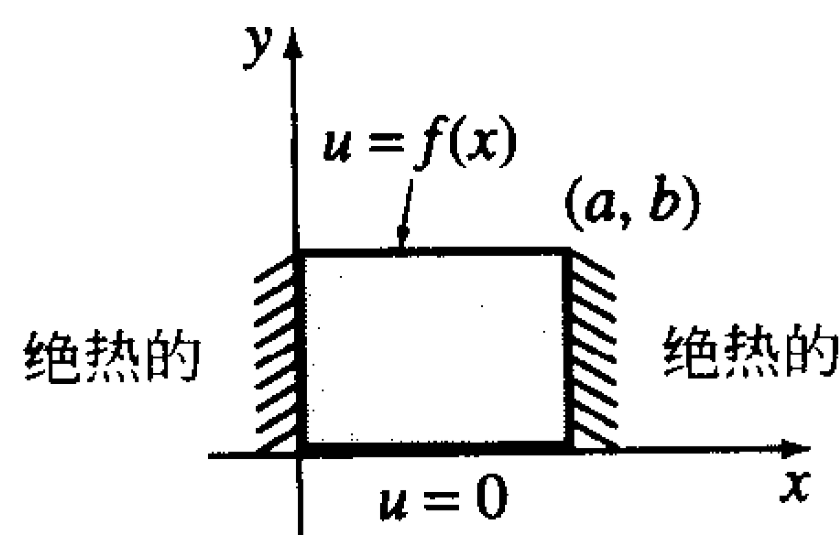


图 12.12

边界值问题的解 对(1)式应用变量分离法 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，可得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

$$X''+\lambda^2 X=0 \tag{4}$$

$$Y''-\lambda^2 Y=0 \tag{5}$$

$$X=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x, \tag{6}$$

因为 $0<y<b$ 是有限区间，因此有解

$$Y=c_3\cosh\lambda y+c_4\sinh\lambda y. \tag{7}$$

前三个边界条件可以化为 $X'(0)=0$，$X'(a)=0$，$Y(0)=0$. 对 X 微分，并令 $x=0$，可得 $c_2=0$，因此有 $X=c_1\cos\lambda x$. 对这个表达式求微分，并令 $x=a$，可得 $-c_1\lambda\sin\lambda a=0$. 当 $\lambda=0$ 或当 $\lambda a=n\pi$，$\lambda=n\pi/a$，$n=1,2,\cdots$时满足最后一个条件．观察到 $\lambda=0$ 意味着(4)为 $X''=0$. 这个方程的通解是线性函数 $X=c_1+c_2x$，而不是(6)．在这种情况下，由边界条件 $X'(0)=0$，$X'(a)=0$ 可得 $X=c_1$. 这个例子和前两个例子不同，在这里 $\lambda=0$ 是一个特征值．当 $\lambda=0$ 时令 $n=0$，可得特征函数

$$X=c_1,\quad n=0 \text{ 和 } X=c_1\cos\frac{n\pi}{a}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

最后，当 $\lambda>0$ 时把条件 $Y(0)=0$ 代入(7)可得 $c_3=0$. 然而，当 $\lambda=0$ 时，方程(5)可以写为 $Y''=0$，因此解为 $Y=c_3+c_4y$，而不是(7)．但 $Y(0)=0$ 再一次表示 $c_3=0$，所以 $Y=c_4y$. 因此，方程满足前三个边界条件的乘积解为

$$A_0\,y,\quad n=0 \text{ 和 } A_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\cos\frac{n\pi}{a}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

由叠加原理可得另外一个解

$$u(x,y)=A_0\,y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\cos\frac{n\pi}{a}x. \tag{8}$$

在(8)式中做代换 $y=b$，可得

$$u(x,b)=f(x)=A_0\,b+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sinh\frac{n\pi}{a}b\right)\cos\frac{n\pi}{a}x,$$

它是函数 f 余弦形式的半域展开．若我们令 $A_0b=a_0/2$，$A_n\sinh(n\pi b/a)=a_n$，$n=1,2,$

3，…，由 11.3 节的(2)和(3)可得

$$2A_0 b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

$$A_0 = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

以及

$$A_n \sinh\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x,$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

这个问题的解由(8)中的级数构成，其中 A_0 和 A_n 的定义分别是(9)和(10).

狄利克雷问题 有一类边界值问题我们称之为狄利克雷问题(Dirichlet problem). 在这些边界值问题中，我们要在一个有界区域 R 中(在平面上或 3 维空间中)求椭圆型偏微分方程的解，如拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$ 的解，以使得 u 可以在整个区域范围内取指定的值. 在练习 12.5 的习题 1 中，要求证明矩形区域上的狄利克雷问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$
$$u(0,y)=0,\quad u(a,y)=0,\quad 0<y<b$$
$$u(x,0)=0,\quad u(x,b)=f(x),\quad 0<x<a$$

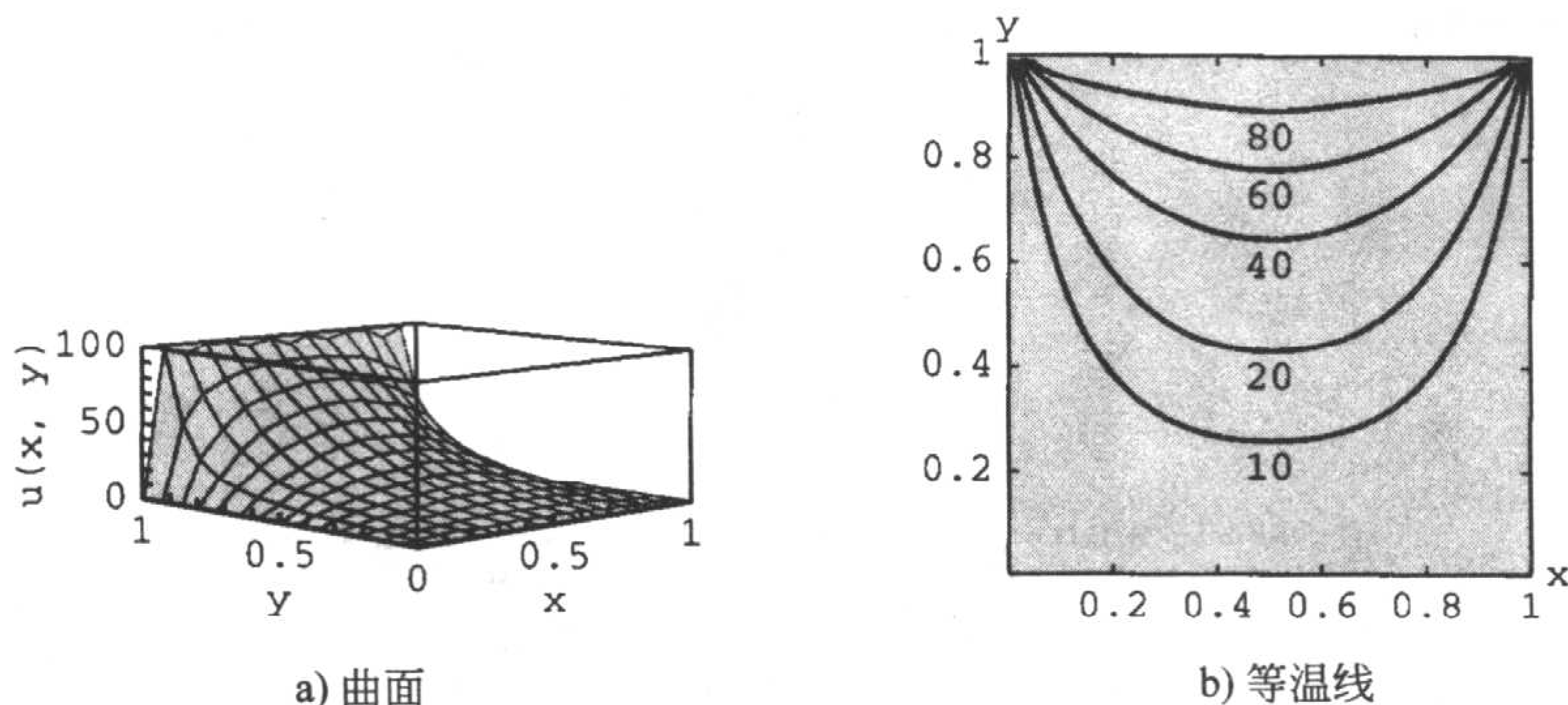
的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\sin\frac{n\pi}{a}x,\quad 其中\ A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.$$

在特殊情况下，$f(x)=100$，$a=1$、$b=1$，系数 A_n 为 $A_n=200\,\frac{1-(-1)^n}{n\pi\sinh n\pi}$. 利用 CAS 软件，我们可以在区域 R：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上绘出 $u(x, y)$所定义的曲面，如图 12.13(a)所示. 在图中可以看到边界条件是满足的；特别注意到 $y=1$ 时，$u=100$，$0\leqslant x\leqslant 1$. 等温线(isotherm)或矩形区域上温度 $u(x, y)$为常数的曲线可以用 CAS 软件中等高线绘图程序得到，如图 12.13(b)所示. 等温线也可以看成是水平面 $u=80$，$u=60$ 等与图 12.13(a)所示的曲面相交的曲线(投影在 xy 平面上). 注意整个区域上最高温度为 $u=100$，发生在 $y=1$ 的边界上. 这并不是巧合. 极大值原理(maximum principle)说明，拉普拉斯方程在具有边界 B(如矩形、圆形、球形等等)的区域 R 上的解 u 在 B 上取得最大和最小值. 此外，可以证明 u 在 R 的内部不存在相对极值(极大或极小值). 这个解释可以清楚地从图 12.13(a)中的曲面上看出来.

叠加原理 若两个平行边界上的边界条件为齐次的，则矩形区域上的狄利克雷问题可以很容易地用变量分离法求解. 但是，若矩形区域四边上的边界条件不是齐次的，那么变量分离法就不适合这种狄利克雷问题. 为了解决这个难题，我们把问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$



a) 曲面　　b) 等温线

图　12.13

$$u(0,y)=F(y),\quad u(a,y)=G(y),\quad 0<y<b \tag{11}$$
$$u(x,0)=f(x),\quad u(x,b)=g(x),\quad 0<x<a$$

分解为两个问题，每一个问题的平行边界上都具有齐次边界条件，如下所示：

$$\overbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0,0<x<a,0<y<b}^{\text{问题1}}$$
$$u_1(0,y)=0,\qquad u_1(a,y)=0,\quad 0<y<b$$
$$u_1(x,0)=f(x),\quad u_1(x,b)=g(x),\quad 0<x<a$$

$$\overbrace{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,0<x<a,0<y<b}^{\text{问题2}}$$
$$u_2(0,y)=F(y),u_2(a,y)=G(y),0<y<b$$
$$u_2(x,0)=0,u_2(x,b)=0,0<x<a.$$

设 u_1 和 u_2 分别是问题 1 和问题 2 的解. 若定义 $u(x,\ y)=u_1(x,\ y)+u_2(x,\ y)$，则可以看到 u 满足原始问题(11)的所有边界条件. 例如，

$$u(0,y)=u_1(0,y)+u_2(0,y)=0+F(y)=F(y),$$
$$u(x,b)=u_1(x,b)+u_2(x,b)=g(x)+0=g(x),$$

等等. 进一步，根据定理 12.1 可知 u 是拉普拉斯方程的解. 也就是说，通过解问题 1 和问题 2，并把它们的解相加可以得到原始问题的解. 解的这种可加性被称为叠加原理. 请参考图 12.14.

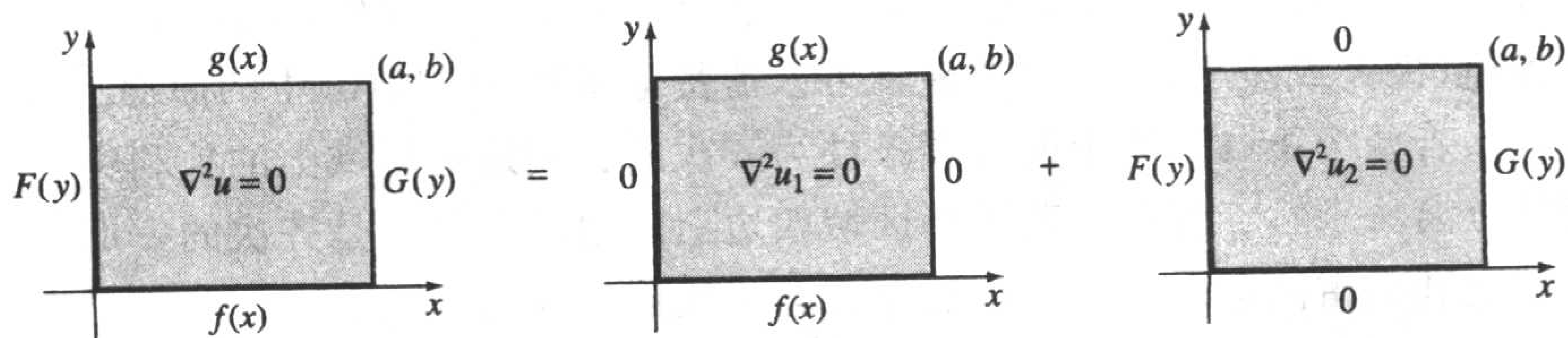


图 12.14　解 u=问题 1 的解 u_1＋问题 2 的解 u_2

请读者自行证明问题 1(请参考练习 12.5 的习题 13 和 14)的解为

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

其中

$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

$$B_n=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\left(\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx-A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b\right),$$

问题 2 的解为

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cosh\frac{n\pi}{b}x+B_n\sinh\frac{n\pi}{b}x\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

其中

$$A_n=\frac{2}{b}\int_0^b F(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy,$$

$$B_n=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{b}a}\left(\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy-A_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right).$$

练习 12.5

在习题 1～10 中，解矩形平板的拉普拉斯方程(1)，约束是如下所给的边界条件.

1. $u(0,\ y)=0$，$u(a,\ y)=0$

   $u(x,\ 0)=0$，$u(x,\ b)=f(x)$

2. $u(0,\ y)=0$，$u(a,\ y)=0$

   $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$u(x,\ b)=f(x)$

3. $u(0,\ y)=0$，$u(a,\ y)=0$

   $u(x,\ 0)=f(x)$，$u(x,\ b)=0$

4. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0$，

   $u(x,\ 0)=x$，$u(x,\ b)=0$

5. $u(0,\ y)=0$，$u(1,\ y)=1-y$

   $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=0$

6. $u(0,\ y)=g(y)$，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$

   $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi}=0$

7. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=u(0,\ y)$， $u(\pi,\ y)=1$

   $u(x,\ 0)=0$， $u(x,\ \pi)=0$

8. $u(0,\ y)=0$， $u(1,\ y)=0$

   $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=u(x,\ 0)$， $u(x,\ 1)=f(x)$

9. $u(0,\ y)=0$， $u(1,\ y)=0$

   $u(x,\ 0)=100$， $u(x,\ 1)=200$

10. $u(0,\ y)=10y$， $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=-1$

    $u(x,\ 0)=0$， $u(x,\ 1)=0$

在习题 11 和 12 中，解拉普拉斯方程(1)，它描述了沿 y 轴方向的半无穷平板. 在两道题中均设当 $y\to+\infty$时，$u(x,\ y)$是有界的.

11.

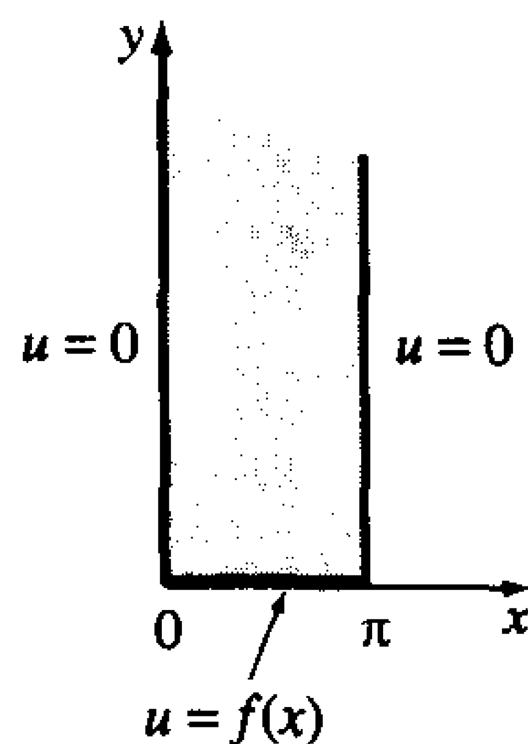


图 12.15

12.

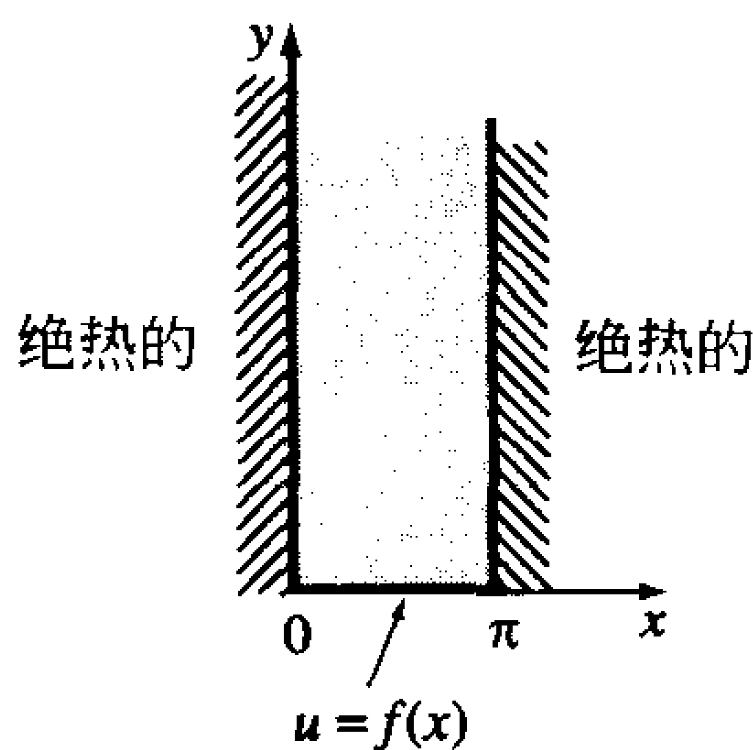


图 12.16

在习题 13 和 14 中，解矩形平板的拉普拉斯方程(1)，约束是如下所给的边界条件.

13. $u(0, y)=0$, $u(a, y)=0$

$u(x, 0)=f(x)$, $u(x, b)=g(x)$

14. $u(0, y)=F(y)$, $u(a, y)=G(y)$

$u(x, 0)=0$, $u(x, b)=0$

在习题 15 和 16 中，用叠加原理解方板的拉普拉斯方程(1)，约束是如下所给的边界条件.

15. $u(0, y)=1$, $u(\pi, y)=1$

$u(x, 0)=0$, $u(x, \pi)=1$

16. $u(0, y)=0$, $u(2, y)=y(2-y)$

$u(x, 0)=0$,

$$u(x, 2)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2-x, & 1\leqslant x<2 \end{cases}$$

计算机实验作业

17. (a)用 CAS 的等高线绘图程序绘出习题 9 的解在 $u=170$，140，110，80，60，30 处的等温线.

(b)用 CAS 的 3D 绘图程序绘出部分和 $S_5(x, y)$的图形.

18. 用 CAS 的等高线绘图程序绘出习题 10 的解在 $u=2$，1，0.5，0.2，0.1，0.05，0，-0.05 处的等温线.

讨论题

19. (a)在习题 1 中，设 $a=b=\pi$，$f(x)=100x(\pi-x)$. 不使用解 $u(x, y)$，徒手绘制出定义在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$ 上的曲面.

(b)温度 u 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$ 上的最大值是多少?



(c)利用(a)中的信息计算习题 1 中所得答案的系数. 然后，利用 CAS 中的 3D 绘图程序绘出部分和 $S_5(x, t)$，它是(a)中在 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$ 上的解前五个非零项的和. 从不同的角度比较它和(a)中绘出的图形.

20. 在习题 16 中，温度 u 在 $0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 上的最大值是多少?

12.6 非齐次方程与边界条件

若偏微分方程或边界条件是非其次的，则变量分离法将不适用于解这类边界值问题. 例如，若有限长度的杆的内部以常速率 r 产生热量，则热传导方程变为下面的形式：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

方程(1)是非齐次的，很容易可以证明它是不可分离的. 另一方面，我们希望当边界 $x=0$ 和 $x=L$ 分别维持在非零温度 k_1 和 k_2 时解一般的热传导方程 $ku_{xx}=u_t$. 尽管代换 $u(x,t)=X(x)T(t)$可以分离偏微分方程，但是我们很快会发现不能求出特征值和特征函数，因为从 $u(0,t)=X(0)T(t)=k_1$和 $u(L,t)=X(L)T(t)=k_2$得不到任何结果.

因变量的改变 有一些包含非齐次方程和非齐次边界条件的问题可以通过把因变量 u 变为新的因变量 v 的方法来求解，需要做代换 $u=v+\psi$. 这种方法的基本思想是求出 ψ，它是单变量函数，然后可以使得双变量函数 v 满足齐次偏微分方程和齐次边界条件. 下面的例子给出了具体的求解过程.

例 1 非齐次方程与边界条件

解方程(1)，边界条件为

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=u_0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<1.$$

解 在 $x=1$ 处的方程和边界条件都是非齐次的. 如果令 $u(x,t)=v(x,t)+\psi(x)$，那么有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\psi'' \text{ 和 } \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}.$$

把这个结果代入(1)式，得到

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+k\psi''+r=\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2}$$

若令 ψ 满足

$$k\psi''+r=0 \text{ 或 } \psi''=-\frac{r}{k},$$

则方程(2)可以化为齐次方程.

对上面的方程积分两次，然后可以得到

$$\psi(x)=-\frac{r}{2k}x^2+c_1x+c_2. \tag{3}$$

然后有

$$u(0,t)=v(0,t)+\psi(0)=0,$$
$$u(1,t)=v(1,t)+\psi(1)=u_0.$$

若有

$$\psi(0)=0 \text{ 和 } \psi(1)=u_0,$$

则可得 $v(0,t)=0$，$v(1,t)=0$.

把最后两个条件代入(3)式依次可得 $c_2=0$，$c_1=\frac{r}{2k}+u_0$. 因此

$$\psi(x)=-\frac{r}{2k}x^2+\left(\frac{r}{2k}+u_0\right)x.$$

最后，把初始条件 $u(x,0)=v(x,0)+\psi(x)$代入，得到 $v(x,0)=u(x,0)-\psi(x)=f(x)-\psi(x)$. 因此为了求 $v(x,t)$，我们可以用变量分离法解这个新的边界值问题

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t},0<x<1,t>0$$
$$v(0,t)=0,v(1,t)=0,t>0$$
$$v(x,0)=f(x)+\frac{r}{2k}x^2-\left(\frac{r}{2k}+u_0\right)x.$$

用一般的方法可以解出

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{-kn^2\pi^2t}\sin n\pi x,$$

其中

$$A_n=2\int_0^1\left[f(x)+\frac{r}{2k}x^2-\left(\frac{r}{2k}+u_0\right)x\right]\sin n\pi x\mathrm{d}x. \tag{4}$$

最后，把 $\psi(x)$和 $v(x,\ t)$相加，可以得到原始问题的解

$$u(x,t)=-\frac{r}{2k}x^2+\left(\frac{r}{2k}+u_0\right)x+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{-kn^2\pi^2t}\sin n\pi x, \tag{5}$$

这里 A_n的定义如(4). ■

观察(5)式发现当 $t\to+\infty$时，$u(x,\ t)\to\psi(x)$. 在解热传导方程的教程里，ψ 称为是稳定解(steady-state solution). 因为当 $t\to+\infty$时，$v(x,\ t)\to 0$，所以 v 称为是瞬时解(transient solution).

代换 $u=v+\psi$ 也可以用在包含波动方程和拉普拉斯方程的问题中.

练习 12.6

在习题 1～2 中，解热传导方程 $ku_{xx}=u_t$，$0<x<1$，$t>0$，约束条件如下所给.

1. $u(0,\ t)=100$，$u(1,\ t)=100$
   $u(x,\ 0)=0$
2. $u(0,\ t)=u_0$，$u(1,\ t)=0$
   $u(x,\ 0)=f(x)$

在习题 3～4 中，解偏微分方程(1)，约束条件如下所给.

3. $u(0,\ t)=u_0$，$u(1,\ t)=u_0$
   $u(x,\ 0)=0$
4. $u(0,\ t)=u_0$，$u(1,\ t)=u_1$
   $u(x,\ 0)=f(x)$
5. 解边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A\mathrm{e}^{-\beta x}=\frac{\partial u}{\partial t},\beta>0,0<x<1,t>0$$
$$u(0,t)=0,u(1,t)=0,t>0$$
$$u(x,0)=f(x),0<x<1.$$

当热量产生于一个细杆内部，并且来源于某种物质的放射性衰减时，偏微分方程的形式为热传导方程.

6. 解边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<\pi,t>0$$
$$u(0,t)=0,u(\pi,t)=u_0,t>0$$
$$u(x,0)=0,0<x<\pi.$$

7. 求边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0)=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<1,\quad t>0$$
$$u(0,t)=u_0,u(1,t)=0,t>0$$

$$u(x,0)=f(x),0<x<1$$

的稳定解 $\psi(x)$.

8. 如果习题 7 中的细杆沿 x 轴方向是半无限的，并且热量从它的侧面辐射到温度为零的介质中，同时还有

$$u(0,t)=u_0,\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,t>0,$$
$$u(x,0)=f(x),x>0.$$

求稳定解 $\psi(x)$.

9. 当振动弦受外部垂直力作用，并且这种外力的大小和其与弦左端的水平距离有关，那么波动方程的形式为

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Ax=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

这里 A 是常数. 解这个偏微分方程，约束条件为

$$u(0,t)=0,u(1,t)=0,t>0$$
$$u(x,0)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<x<1.$$

10. 一个弦初始时刻静止在 x 轴上，并且在 $x=0$ 和 $x=1$ 处被固定在 x 轴上. 如果 $t>0$ 时，弦在其自身重力作用下向下弯曲，那么位移 $u(x,\ t)$满足

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-g=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},0<x<1,t>0,$$

这里 g 是重力加速度. 解出 $u(x,\ t)$.

11. 求如图 12.17 所示半无穷平板上的稳定温度 $u(x,\ y)$. 设当 $x\to+\infty$时，温度是有界的. [提示：试一下 $u(x,\ y)=v(x,\ y)+\psi(y)$.]

12. 泊松方程(Poisson's equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-h,h>0$$

在许多与电势相关的问题中都能碰到. 解上面这个方程，其约束条件为

$$u(0,y)=0,u(\pi,y)=1,y>0$$
$$u(x,0)=0,0<x<\pi.$$

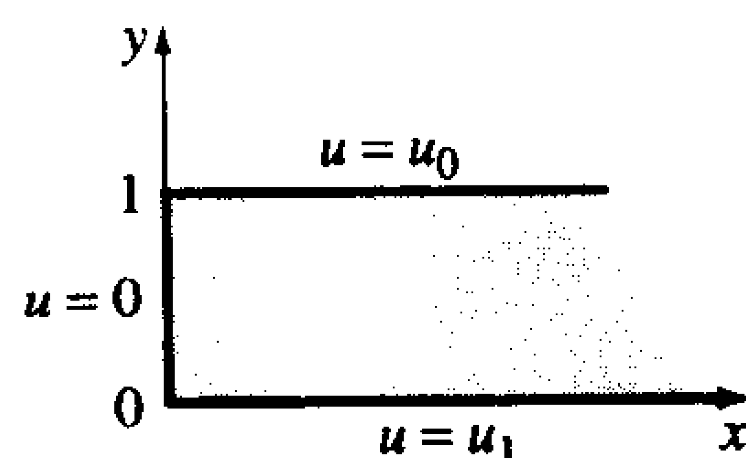


图 12.17

12.7 正交级数展开

对某种类型的边界条件，用变量分离法和叠加原理可以得到其三角函数形式的级数展开，而不是傅里叶级数. 在本节中，为了解这类问题我们将使用正交级数展开的概念或 11.1 节中介绍的广义傅里叶级数.

例 1　正交级数展开的使用

一个单位长度的杆，热量从它的右边界散失到周围介质中，介质温度恒为零，那么这个杆的温度由下面的约束条件决定：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<1,\quad t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=-hu(1,t),\quad h>0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=1,\quad 0<x<1.$$

解出 $u(x,t)$.

解 由变量分离法可得

$$X''+\lambda^2 X=0, T'+k\lambda^2 T=0, \tag{1}$$

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \text{ 和 } T(t)=c_3\mathrm{e}^{-k\lambda^2 t}.$$

因为 $u=XT$，所以我们可以把边界条件写为

$$X(0)=0 \text{ 和 } X'(1)=-hX(1). \tag{2}$$

由(2)中的第一个条件马上可以得到 $c_1=0$. 把(2)的第二个条件代入 $X(x)=c_2\sin\lambda x$，可得

$$\lambda\cos\lambda=-h\sin\lambda \text{ 或 } \tan\lambda=-\frac{\lambda}{h}. \tag{3}$$

由 11.4 节例 2 的分析可知，(3)中后一个方程有无穷个根. 这个正根序列 $\lambda_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是该问题的特征值，相应的特征函数是 $X(x)=c_2\sin\lambda_n x$，$n=1, 2, 3, \cdots$. 因此有

$$u_n=XT=A_n\mathrm{e}^{-k\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x \text{ 和 } u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathrm{e}^{-k\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x.$$

令 $t=0$，$u(x,0)=1$，$0<x<1$，所以有

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\lambda_n x. \tag{4}$$

(4)中的级数不是傅里叶正弦级数；它是正交函数形式的级数展开，这些正交函数是由正则施图姆-刘维尔问题得到的，而这个正则施图姆-刘维尔问题是由(1)中的第一个微分方程和边界条件(2)构成的. 因此我们有一个特征函数集合$\{\sin\lambda_n x\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，这里 λ 的定义为 $\tan\lambda=-\lambda/h$，在区间$[0, 1]$上它关于权函数 $p(x)=1$ 是正交的. 令 11.1 节(8)中的 $f(x)=1$，可得

$$A_n=\frac{\int_0^1\sin\lambda_n x\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\sin^2\lambda_n x\,\mathrm{d}x}. \tag{5}$$

为了计算每个特征函数平方形式的积分，我们使用三角恒等式

$$\int_0^1\sin^2\lambda_n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1[1-\cos 2\lambda_n x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n\right]. \tag{6}$$

利用 $\sin 2\lambda_n=2\sin\lambda_n\cos\lambda_n$，$\lambda_n\cos\lambda_n=-h\sin\lambda_n$，可以把(6)式简化为

$$\int_0^1\sin^2\lambda_n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2h}[h+\cos^2\lambda_n].$$

并且有

$$\int_0^1\sin\lambda_n x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\lambda_n}\cos\lambda_n x\Big|_0^1=\frac{1}{\lambda_n}[1-\cos\lambda_n].$$

因此(5)式可以写为

$$A_n=\frac{2h(1-\cos\lambda_n)}{\lambda_n(h+\cos^2\lambda_n)}.$$

最后，边界值问题的解为

$$u(x,t)=2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda_n}{\lambda_n(h+\cos^2\lambda_n)}e^{-k\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x.$$ ■

例 2 正交级数展开的使用

单位长度的扭转振动杆，其扭角为 $\theta(x, t)$ 由下面的约束条件决定：

$$a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},\quad 0<x<1,\quad t>0$$

$$\theta(0,t)=0,\quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\quad t>0$$

$$\theta(x,0)=x,\quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0<x<1.$$

请参考图 12.18. $x=1$ 处的边界条件被称为悬空端条件. 解出 $\theta(x, t)$.

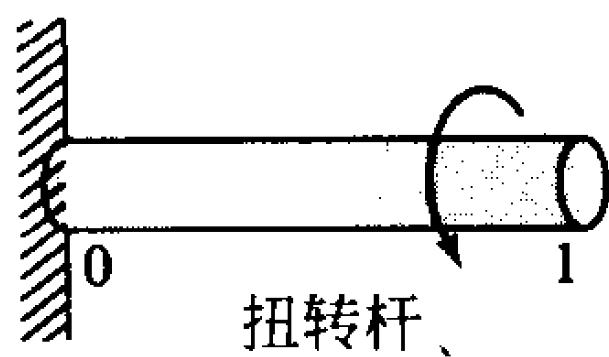


图 12.18

解 利用 $\theta=XT$，可得

$$X''+\lambda^2X=0,T''+a^2\lambda^2T=0,$$

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \text{ 和 } T(t)=c_3\cos a\lambda t+c_4\sin a\lambda t.$$

由边界条件 $X(0)=0$ 以及 $X'(1)=0$ 分别可得 $c_1=0$，$c_2\cos\lambda=0$. 因为余弦函数在 $\pi/2$ 的奇数倍处等于零，所以这个问题的特征值为 $\lambda=(2n-1)(\pi/2)$，$n=1, 2, 3, \cdots$，再由初始条件 $T'(0)=0$ 可得 $c_4=0$，因此有

$$\theta_n=XT=A_n\cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x.$$

为了满足剩下的初始条件，我们构造

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{7}$$

当 $t=0$ 时，对 $0<x<1$，我们一定有

$$\theta(x,0)=x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{8}$$

如例 1 所示，特征函数的集合 $\left\{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\right\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 在区间 $[0, 1]$ 上关于权函数 $p(x)=1$ 是正交的. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x$ 不是傅里叶正弦级数，因为正弦的参数不是 $\pi x/L$ 的整数倍(本例中 $L=1$). 这个级数是广义傅里叶级数. 因此由 11.1 节的(8)式可知，(7)的系数是

$$A_n=\frac{\int_0^1 x\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\,dx}{\int_0^1\sin^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\,dx}.$$

计算这两个积分，然后可以得到

$$A_n=\frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

所以扭角为

$$\theta(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x.$$ ■

练习 12.7

1. 在例 1 中，若杆的左端是绝热的，求温度 $u(x,\ t)$.

2. 解边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},0<x<1,t>0$$

$$u(0,t)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=-h(u(1,t)-u_0),h>0,t>0$$

$$u(x,0)=f(x),0<x<1.$$

3. 求矩形板的稳定温度，其边界条件为

$$u(0,y)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=-hu(a,y),0<y<b$$

$$u(x,0)=0,u(x,b)=f(x),0<x<a.$$

4. 解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,0<y<1,x>0$$

$$u(0,y)=u_0,\lim_{x\to\infty}u(x,y)=0,0<y<1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=-hu(x,1),h>0,x>0.$$

5. 长为 L 的杆，若初始温度为 $f(x)$，并且 $x=0$ 端有恒定的温度零度，$x=L$ 端是绝热的，求温度 $u(x,\ t)$.

6. 解边界值问题

$$a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},0<x<L,t>0$$

$$u(0,t)=0,E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=F_0,t>0$$

$$u(x,0)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<x<L.$$

解 $u(x,\ t)$表示振动弹性杆的纵向位移，左端固定，右端受到大小为 F_0的常力，请参考图 12.10. E 是常数，称为弹性模量.

7. 解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,0<x<1,0<y<1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,u(1,y)=u_0,0<y<1$$

$$u(x,0)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=0,0<x<1.$$

8. 单位长度的杆，其初始温度为 $f(x)$. 在它的两端 $x=0$ 和 $x=1$ 处和周围介质有热交换，介质温度恒为零. 证明

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathrm{e}^{-k\lambda_n^2 t}(\lambda_n\cos\lambda_n x+h\sin\lambda_n x),$$

其中 $A_n=\frac{2}{(\lambda_n^2+2h+h^2)}\int_0^1 f(x)(\lambda_n\cos\lambda_n x+h\sin\lambda_n x)\mathrm{d}x$，$\lambda_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$是 $\tan\lambda=2\lambda h/(\lambda^2-h^2)$ 的连续正根.

9. 一个振动的悬臂梁左端($x=0$)嵌在支撑物内，右端($x=1$)是自由的．请参考图 12.19．梁的横向位移 $u(x,t)$由如下边界值问题决定：

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,0<x<1,t>0$$

$$u(0,t)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,t>0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1}=0,\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=1}=0,t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),x>0.$$

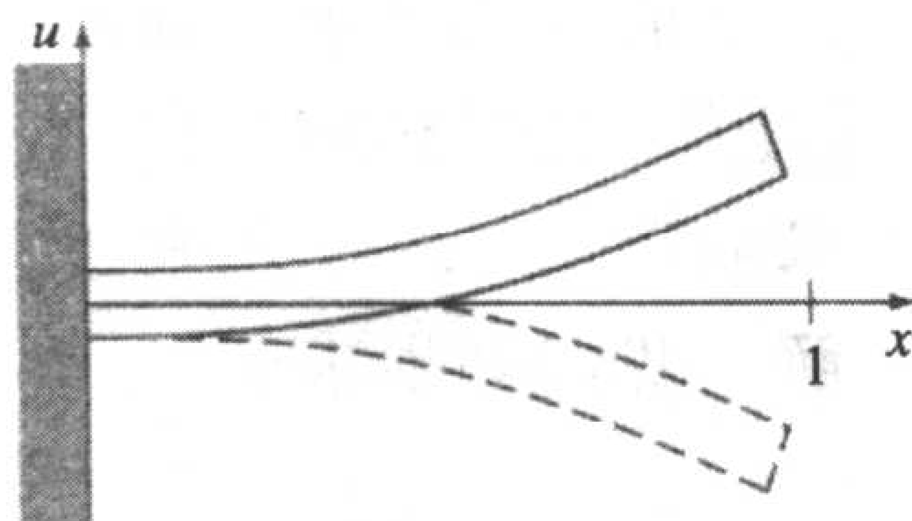


图 12.19

(a)利用分离常数 λ^4，证明这个问题的特征值由方程 $\cos\lambda\cosh\lambda=-1$ 决定．


(b)用计算器或计算机求出前两个正特征值的近似值．

10. (a)求一个方程，当习题 9 中梁的端点 $x=0$ 和 $x=1$ 都是嵌入式时，它定义了这个问题的特征值．


(b)用计算器或计算机求出前两个正特征值的近似值．

12.8 含有双变量傅里叶级数的边界值问题

到目前为止，我们只介绍了求解一维热传导方程和波动方程的解法．在本节中，我们将介绍如何扩展变量分离法求解包含二维偏微分方程的问题．因为未知函数 u 是三个自变量 x、y、t 的函数，所以若假设特解的形式为 $X(x)Y(y)T(t)$，则会很自然地推出双变量 x 和 y 的傅里叶级数．

在本节的练习中，我们也将会考虑三维空间的拉普拉斯方程．

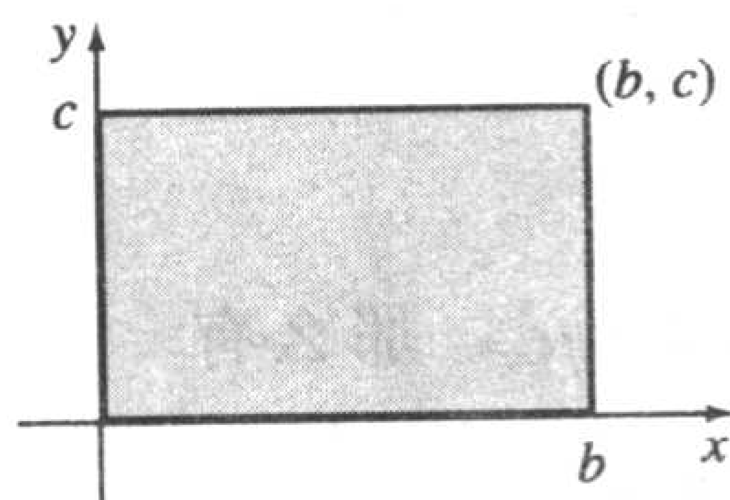


图 12.20

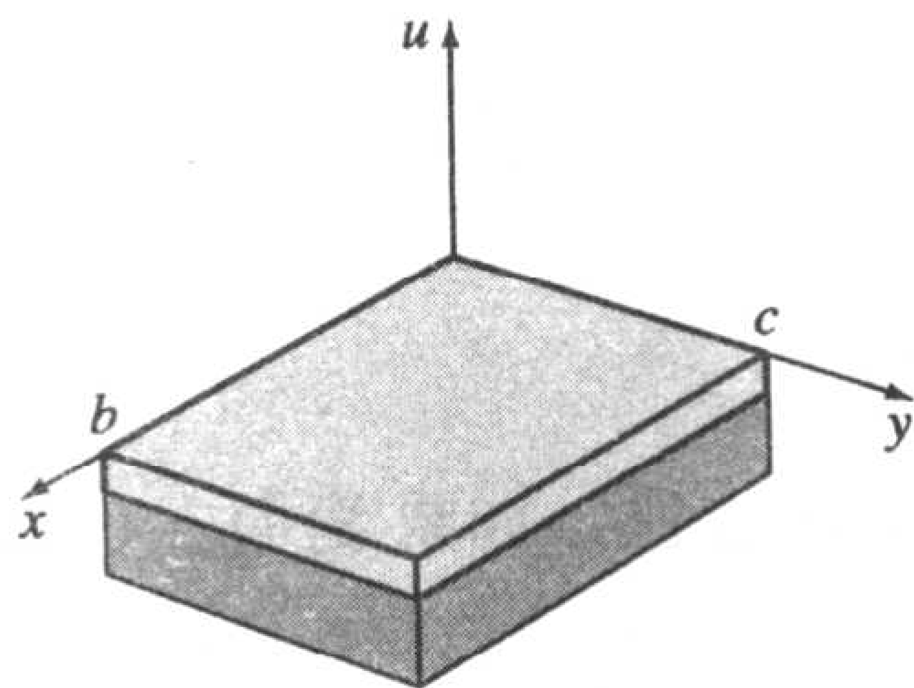


图 12.21

二维热传导方程和二维波动方程 设如图 12.20 所示的矩形区域是一个薄板，其上温度 u 是时间 t 和位置(x, y)的函数．那么，在合适的条件下，可以证明 $u(x,y,t)$满足二维热传导方程(two-dimensional heat equation)

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

另一方面，设图 12.21 表示一个矩形框架，它上面有一个弹性薄膜被伸展成矩形(形成一个矩形鼓膜)．如果薄膜振动起来，那么它的位移 u 也是 t 和位置(x, y)的函数，这个位移在 xy 平面上测量(横向振动)．若振动是微小的、自由无阻尼的，那么 $u(x,y,t)$满足二维波动方程(two-dimensional wave equation)

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

在下面的例子中，我们对含有(1)式的边界值问题使用变量分离法求解.

例 1　二维热流方程

求如图 12.20 所示平板上的温度 $u(x, y, t)$，初始温度为 $f(x, y)$，边界温度恒为零.

解　我们必须求解

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<b,\quad 0<y<c,\quad t>0,$$

约束条件为

$$u(0,y,t)=0,\quad u(b,y,t)=0,\quad 0<y<c,t>0$$
$$u(x,0,t)=0,\quad u(x,c,t)=0,\quad 0<x<b,t>0$$
$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad 0<x<b,\quad 0<y<c.$$

为了分离偏微分方程中的三个自变量，我们试图找到一个乘积解 $u(x, y, t)=X(x)Y(y)T(t)$. 把这个假设代入方程中得到

$$k(X''YT+XY''T)=XYT'$$

或

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}+\frac{T'}{kT}. \tag{3}$$

因为(3)的左边仅依赖于 x，右边仅依赖于 y 和 t，所以我们必须令两边同时等于一个常数 $-\lambda^2$：

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}+\frac{T'}{kT}=-\lambda^2,$$

因此有

$$X''+\lambda^2 X=0, \tag{4}$$
$$\frac{Y''}{Y}=\frac{T'}{kT}+\lambda^2. \tag{5}$$

用同样的推导过程，如果我们在(5)式中引进另外一个分离常数 $-\mu^2$，那么有

$$\frac{Y''}{Y}=-\mu^2\quad 和\quad \frac{T'}{kT}+\lambda^2=-\mu^2,$$
$$Y''+\mu^2 Y=0,\quad T'+k(\lambda^2+\mu^2)T=0. \tag{6}$$

方程(4)和(6)的解分别为

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x, \tag{7}$$
$$Y(y)=c_3\cos\mu y+c_4\sin\mu y, \tag{8}$$
$$T(t)=c_5\,\mathrm{e}^{-k(\lambda^2+\mu^2)t}. \tag{9}$$

但是由边界条件

$$\left.\begin{array}{l}u(0,y,t)=0,\quad u(b,y,t)=0\\ u(x,0,t)=0,\quad u(x,c,t)=0\end{array}\right\}可以得到\left\{\begin{array}{l}X(0)=0,\quad X(b)=0\\ Y(0)=0,\quad Y(c)=0.\end{array}\right.$$

把这些条件代入(7)和(8)式，可得 $c_1=0$，$c_3=0$，$c_2\sin\lambda b=0$，$c_4\sin\mu c=0$. 从后两个方程依次得到

$$\lambda=\frac{m\pi}{b},\quad m=1,2,3,\cdots;\quad \mu=\frac{n\pi}{c},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

因此满足边界条件的二维热传导方程的乘积解为

$$u_{mn}(x,y,t) = A_{mn}\ \mathrm{e}^{-k[(m\pi/b)^2+(n\pi/c)^2]t}\ \sin\frac{m\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y,$$

其中 A_{mn} 是任意常数. 因为我们有两个独立的特征值集合，所以我们易于用叠加原理求出双和形式的解

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\ \mathrm{e}^{-k[(m\pi/b)^2+(n\pi/c)^2]t}\ \sin\frac{m\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y. \tag{10}$$

在 $t=0$ 处，我们一定有

$$u(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\ \sin\frac{m\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y. \tag{11}$$

我们可以给(11)式两端乘以 $\sin(m\pi x/b)\sin(n\pi y/c)$ 并在矩形 $0\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant c$ 上积分求得系数 A_{mn}，可得

$$A_{mn} = \frac{4}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{12}$$

因此这个边界值问题的解为(10)，系数 A_{mn} 的定义为(12). ■

系数为(12)的级数(11)称为双变量正弦级数(sine series in two variable)或双正弦级数(double sine series). 下面我们介绍双变量余弦级数(cosine series in two variable).

定义在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant c$ 的函数 $f(x, y)$ 的双余弦级数(double cosine series)为

$$f(x,y) = A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0}\cos\frac{m\pi}{b}x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n}\cos\frac{n\pi}{c}y + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cos\frac{m\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{c}y,$$

其中

$$A_{00} = \frac{1}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$A_{m0} = \frac{2}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x,y)\cos\frac{m\pi}{b}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$A_{0n} = \frac{2}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x,y)\cos\frac{n\pi}{c}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$A_{mn} = \frac{4}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x,y)\cos\frac{m\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{c}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

请参考练习 12.8 的习题 2.

练习 12.8

在习题 1～2 中，解热传导方程(1)，约束条件如下所给.

1. $u(0,\ y,\ t)=0$，$u(\pi,\ y,\ t)=0$

   $u(x,\ 0,\ t)=0$，$u(x,\ \pi,\ t)=0$

   $u(x,\ y,\ 0)=u_0$

2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$

   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=0$

$u(x, y, 0)=xy$

在习题 3～4 中，解波动方程(2)，约束条件如下所给.

3. $u(0, y, t)=0$，$u(\pi, y, t)=0$

$u(x, 0, t)=0$，$u(x, \pi, t)=0$

$u(x, y, 0)=xy(x-\pi)(y-\pi)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

4. $u(0, y, t)=0$，$u(b, y, t)=0$

$u(x, 0, t)=0$，$u(x, c, t)=0$

$u(x, y, 0)=f(x, y)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x, y)$

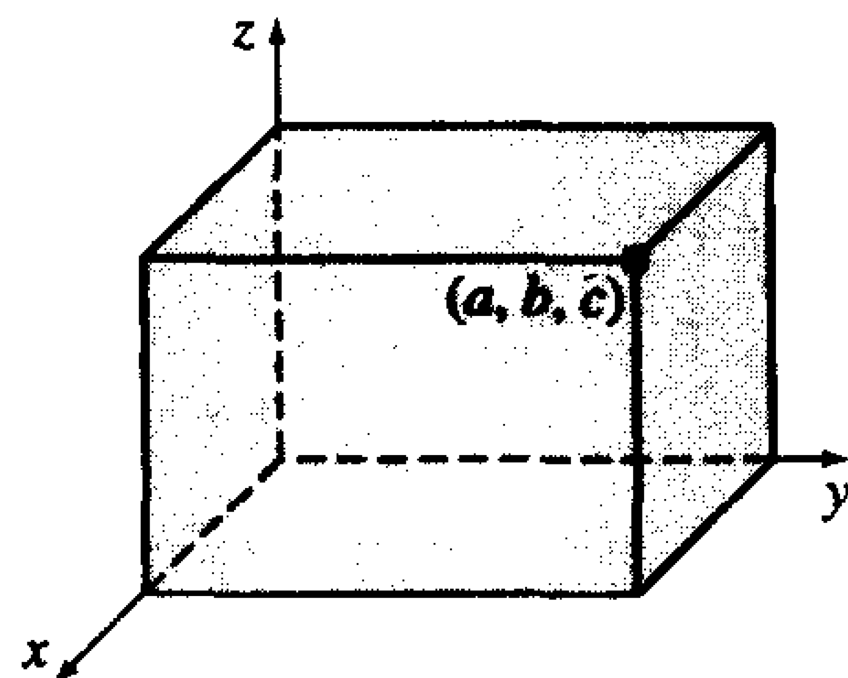


图 12.22

在如图 12.22 所示的直角平行六面体中，稳定的温度 $u(x, y, z)$满足三维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{13}$$

5. 若平行六面体的顶部($z=c$)保持温度 $f(x, y)$，并且其余各面温度恒为零度，解拉普拉斯方程(13).
6. 若平行六面体的底部($z=0$)保持温度 $f(x, y)$，并且其余各面温度恒为零度，解拉普拉斯方程(13).

第 12 章复习题

1. 利用变量分离法求

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=u$$

的乘积解.

2. 用变量分离法求

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的乘积解. 有可能选择一个分离常数使得 X 和 Y 都是振荡函数吗?

3. 求边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, 0<x<\pi, t>0$$

$$u(0,t)=u_0,\quad -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi}=u(\pi,t)-u_1, t>0$$

$$u(x,0)=0, 0<x<\pi$$

的稳定解 $\psi(x)$.

4. 对习题 3 中的边界条件做出物理上的解释.
5. 单位长度的弦在 $t=0$ 时沿 x 轴正向展开. 弦的两端 $x=0$ 和 $x=1$ 在$t>0$ 时固定在 x 轴上. 若初始速度 $g(x)$如图 12.23 所示，求其位移 $u(x, t)$.

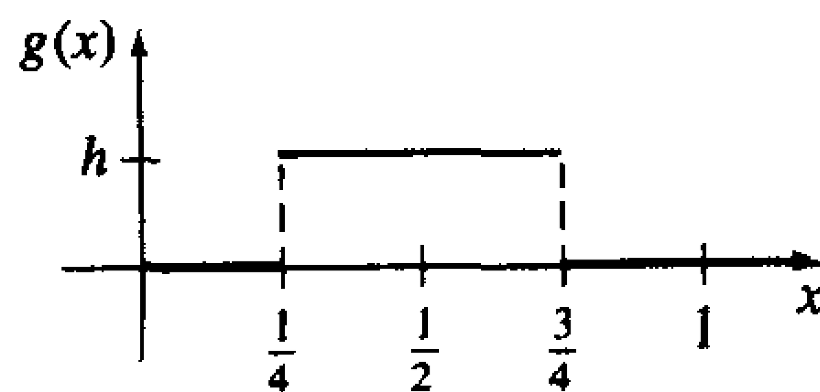


图 12.23

6. 若作用于弦上的外部垂直方向的力正比于其与弦左端的水平距离，则偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

是波动方程. $t>0$ 时，在 $x=0$ 处弦固定在 x 轴上方一单位处，在 $x=1$

处固定在 x 轴上．若弦的初始位移为 $f(x)$，求位移 $u(x, t)$．

7．如图 12.24 所示，求方板上稳定的温度分布 $u(x, y)$．

8．如图 12.25 所示，求半无限板上稳定的温度分布 $u(x, y)$．

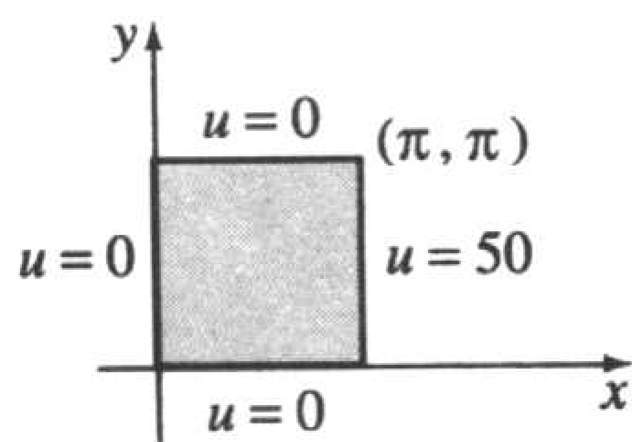


图 12.24

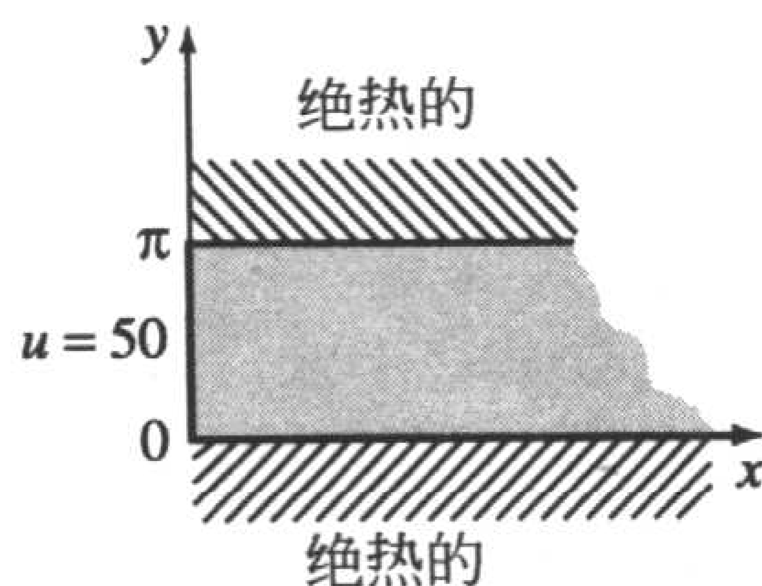


图 12.25

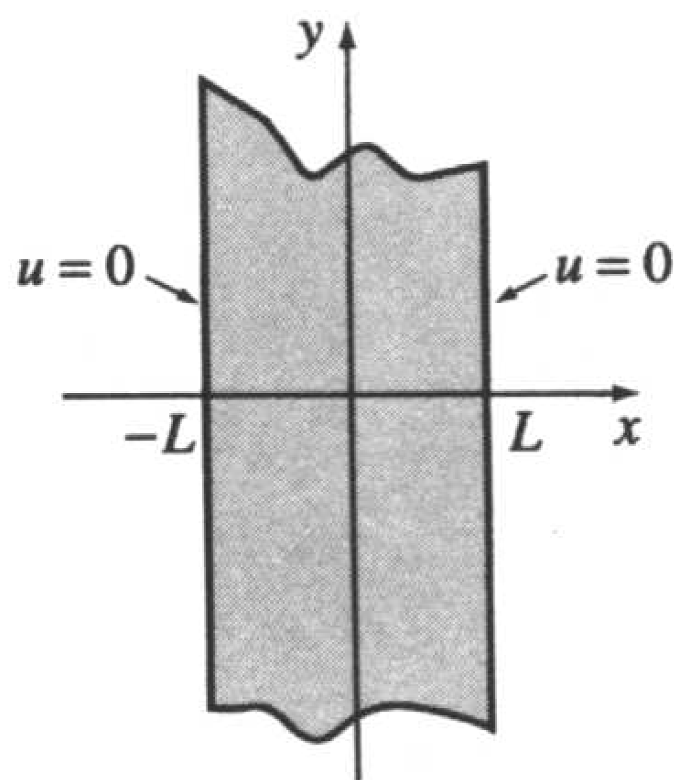


图 12.26

9．若边界 $y=0$ 和 $y=\pi$ 处在任何时刻温度都为零，在这种情况下解习题 8．

10．如图 12.26 所示，若初始温度为 u_0，求宽度为 $2L$ 的无限板上的温度 $u(x, t)$．［提示：$u(x, 0)=u_0$ $(-L<x<L)$是 x 的偶函数．］

11．解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},0<x<\pi,t>0$$

$$u(0,t)=0,u(\pi,t)=0,t>0$$

$$u(x,0)=\sin x,0<x<\pi.$$

12．解边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 2\pi x=\frac{\partial u}{\partial t},0<x<1,t>0$$

$$u(0,t)=0,u(1,t)=0,t>0$$

$$u(x,0)=\sin \pi x,0<x<1.$$

13．求问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial u}{\partial t}+u,0<x<\pi,t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,t>0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<x<\pi$$

级数形式的解．不要计算级数中的系数．

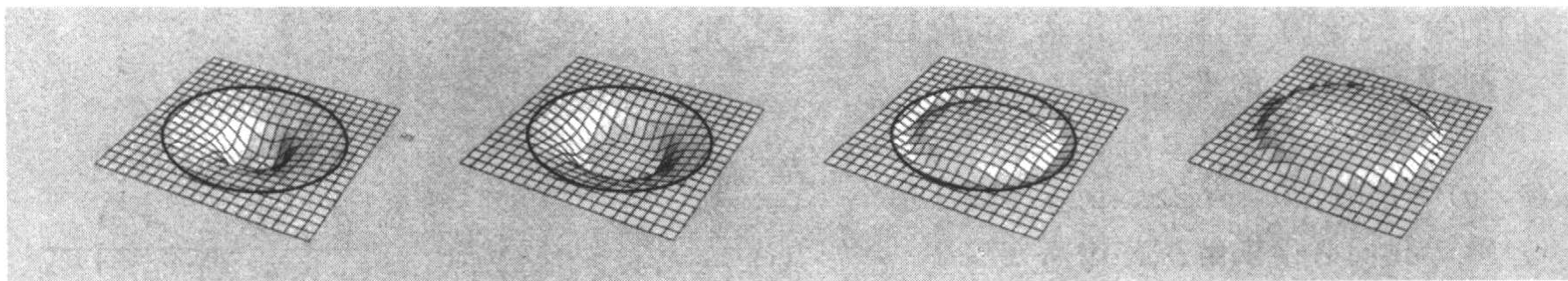
14．一种既在介质中扩散又在介质中对流的物质，它的浓度 $c(x, t)$满足偏微分方程 $k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-h\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial c}{\partial t}$，$h$ 是常数．

解这个方程，约束条件为

$$c(0,t)=0,c(1,t)=0,t>0$$

$$c(x,0)=c_0,0<x<1,$$

这里 c_0 是常数．



鼓声的形状；见 13.2 节习题 13

第 13 章　其他坐标系下的边界值问题

到目前为止，所有关于边界值问题的讨论都是在直角坐标系下进行的．但是，如果我们希望求圆盘、圆柱或球内的温度，那么就分别需要在极坐标、柱坐标和球坐标下来描述这些问题．在这三种不同的坐标系下表述拉普拉斯算子 $\nabla^2 u$ 是很基本的．在 13.2 和 13.3 节中，我们将使用傅里叶-贝塞尔级数和傅里叶-勒让德级数的原理求解方程．

13.1　极坐标下含有拉普拉斯方程的问题

极坐标系和直角坐标系下坐标的关系为

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \text{ 以及 } r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = y/x.$$

请参考图 13.1. 第一对方程把极坐标$(r,\ \theta)$转换为直角坐标$(x,\ y)$；第二对方程把直角坐标转换为极坐标．这些方程使得我们可以把函数 $u(x,\ y)$的二维拉普拉斯算子

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

转换成极坐标系下表示的算子．

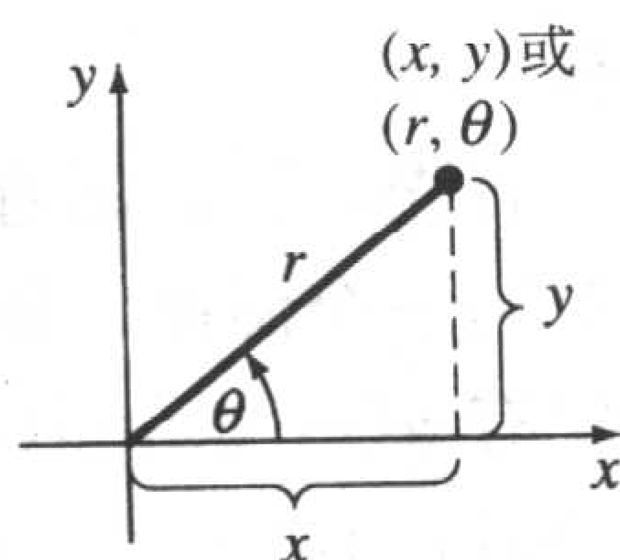


图　13.1

极坐标系下的拉普拉斯算子　读者可以用偏导数的链式法则证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2}$$

把(1)式和(2)式相加，并简化可得 u 在极坐标系下的拉普拉斯算子

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

在本节中，我们将集中讨论极坐标系下拉普拉斯方程的问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

我们的第一个例子是圆盘的狄利克雷问题.

例 1 圆盘上的稳态温度

求半径为 c 的圆盘上稳定的温度分布 $u(r, \theta)$，若圆周的温度为 $u(c, \theta)=f(\theta)$，$0<\theta<2\pi$. 请参考图 13.2.

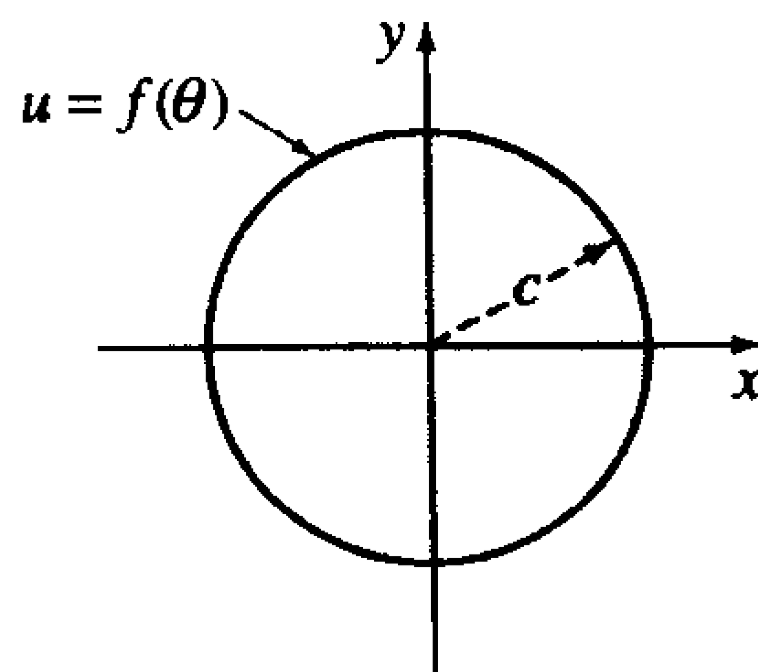


图 13.2

解 我们必须求解拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, 0<\theta<2\pi, 0<r<c,$$

其约束条件为 $u(c, \theta)=f(\theta)$，$0<\theta<2\pi$.

如果我们定义 $u=R(r)\Theta(\theta)$，那么由变量分离法可得

$$\frac{r^2 R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda^2$$

以及

$$r^2R''+rR'-\lambda^2R=0, \tag{3}$$

$$\Theta''+\lambda^2\Theta=0. \tag{4}$$

(4)的解为

$$\Theta=c_1\cos\lambda\theta+c_2\sin\lambda\theta. \tag{5}$$

方程(3)是柯西一欧拉方程. 它的通解为

$$R=c_3r^{\lambda}+c_4r^{-\lambda}. \tag{6}$$

这个问题没有显式条件使得我们可以求出任何一个系数或特征值. 但是这里有一些隐式条件.

首先，我们的直觉是希望温度 $u(r, \theta)$在圆周 $r=c$ 的范围内. 并且温度 u 应该在圆内给定点有同一个温度，即使是用极坐标表示这个点. 因为点$(r, \theta+2\pi)$等价于点(r, θ)，所以我们一定有 $u(r, \theta)=u(r, \theta+2\pi)$. 换句话说，温度 $u(r, \theta)$的周期为 2π. 当且仅当 $\lambda=n$，这里 $n=0, 1, 2, \cdots$时，(4)的解的周期为 2π. 因此对于 $n>0$，(5)和(6)式可以写为

$$\Theta=c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta, \tag{7}$$

$$R=c_3r^n+c_4r^{-n}. \tag{8}$$

观察到(8)中 $r^{-n}=1/r^n$. 为了把解的范围限制在圆盘的中心(即 $r=0$)，我们必须定义 $c_4=0$. 因此对 $\lambda=n>0$，有

$$u_n=R\Theta=r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \tag{9}$$

其中 c_3c_1和 c_3c_2分别用 A_n和 B_n替代.

关于上面这个表达式有一点要说明，即 $n=0$ 是一个特征值. 对于这个值，(3)和(4)的解不能由(5)和(6)式给出. 微分方程 $\Theta''=0$ 和 $r^2R''+rR'=0$ 的解是

$$\Theta=c_5\theta+c_6 \text{ 以及 } R=c_7+c_8\ln r.$$

周期性要求 $c_5=0$，并且我们希望温度在 $r=0$ 处是有限的，因此有 $c_8=0$. 在本例中，偏微分方程的乘积解仅为

$$u_0=A_0, \tag{10}$$

其中 A_0表示 c_6c_7.

然后由叠加原理可得 $u(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 或

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{11}$$

最后，把 $r=c$ 处的边界条件代入(11)中的结果，可得

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

它是函数 f 的完全傅里叶级数展开. 因此，可以看出

$$A_0 = a_0/2, c^n A_n = a_n, c^n B_n = b_n.$$

也就是

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{12}$$

$$A_n = \frac{1}{c^n\ \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \tag{13}$$

$$B_n = \frac{1}{c^n\ \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta. \tag{14}$$

这个问题的解为(11)表示的级数，其中 A_0、A_n和 B_n分别由(12)、(13)和(14)所定义. ■

观察例 1，相应于每个正的特征值，都有两个不同的特征函数 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$($n=1$, 2, 3, …). 在这种情形下，特征值有时称为双特征值(double eigenvalue).

例 2 半圆盘内的稳态温度

求如图 13.3 所示的半圆盘内稳定的温度分布 $u(r, \theta)$.

解 边界值问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < r < c,$$

$$u(c,\theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi,$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi) = 0, \quad 0 < r < c.$$

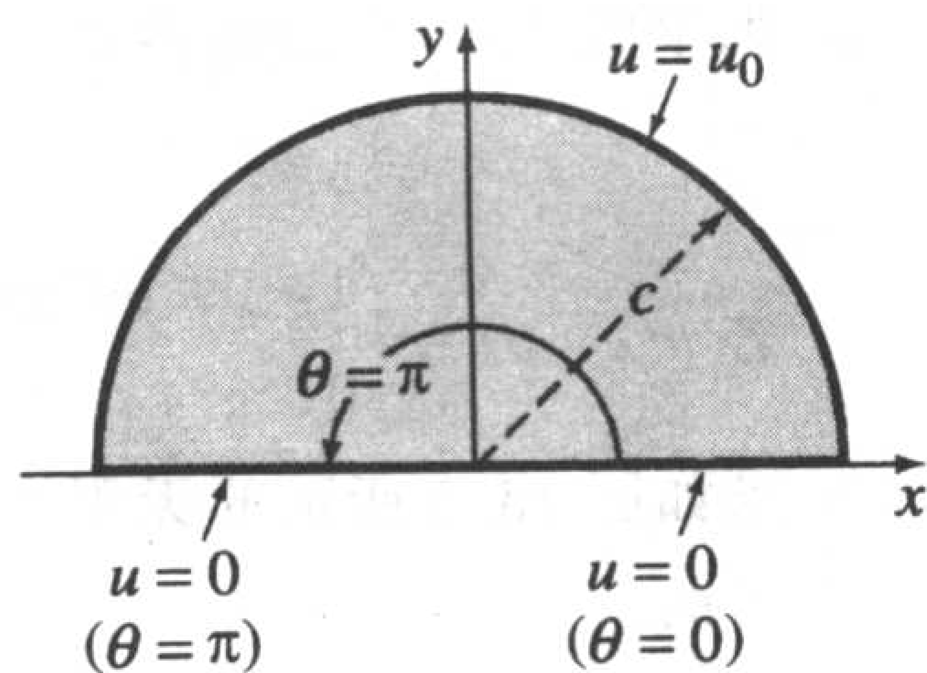


图 13.3

定义 $u=R(r)\Theta(\theta)$，并由变量分离法可得

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda^2,$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0, \tag{15}$$

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0. \tag{16}$$

依次把边界条件 $\Theta(0)=0$ 和 $\Theta(\pi)=0$ 代入(16)的解 $\Theta=c_1\cos\lambda\theta+c_2\sin\lambda\theta$ 可得 $c_1=0$，$\lambda=n$，$n=1,2, 3$, …因此，$\Theta=c_2\sin n\theta$. 和例 1 不同，在这个问题中，$n=0$ 不是特征值. 令 $\lambda=n$，(15)的解为 $R=c_3 r^n+c_4 r^{-n}$. 但是由 $u(r, \theta)$限制在 $r=0$ 处的假设可知 $c_4=0$. 因此，$u_n=R(r)\Theta(\theta)=A_n r^n \sin n\theta$，以及

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta.$$

由 $r=c$ 处的边界条件可得正弦级数

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c^n \sin n\theta.$$

因此有

$$A_n c^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0 \sin n\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$A_n = \frac{2u_0}{\pi c^n}\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

所以该问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \sin n\theta.$$ ■

练习 13.1

在习题 1～4 中，求半径为 r 的圆平面上稳定的温度分布 $u(r,\theta)$，其周边温度如下所给.

1. $u(1,\theta)=\begin{cases}u_0, & 0<\theta<\pi\\ 0, & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$

2. $u(1,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<\theta<\pi\\ \pi-\theta, & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$

3. $u(1,\theta)=2\pi\theta-\theta^2$，$0<\theta<2\pi$

4. $u(1,\theta)=\theta$，$0<\theta<2\pi$

5. 解半径为 c 的圆盘的外狄利克雷问题，$u(c,\theta)=f(\theta)$，$0<\theta<2\pi$. 即在整个 xy 平面上，以原点为圆心挖去一个半径为 c 的圆孔，求剩余平面上稳定的温度分布 $u(r,\theta)$，孔周围的温度为 $f(\theta)$. [提示：设当 $r\to+\infty$时，温度是有界的.]

6. 求四分之一圆上稳定的温度分布，如图 13.4 所示.

7. 如果图 13.4 中的边界 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi/2$ 是绝热的，那么我们分别有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2}=0.$$

若 $u(c,\theta)=\begin{cases}1, & 0<\theta<\pi/4\\ 0, & \pi/4<\theta<\pi/2\end{cases}$，求它上面稳定的温度分布.

8. 求如图 13.5 所示的无限有边平板上稳定的温度分布. [提示：设当 $r\to 0$ 和 $r\to+\infty$时，温度都是有界的.]

9. 求如图 13.6 所示的圆环上稳定的温度分布 $u(r,\theta)$. [提示：用例 1 的求解方法来解.]

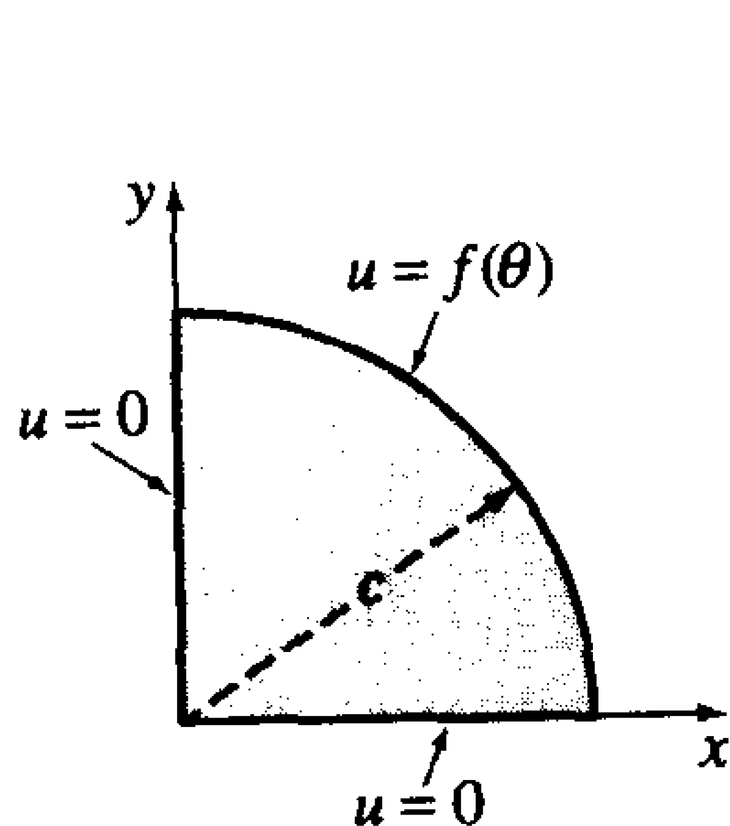


图 13.4

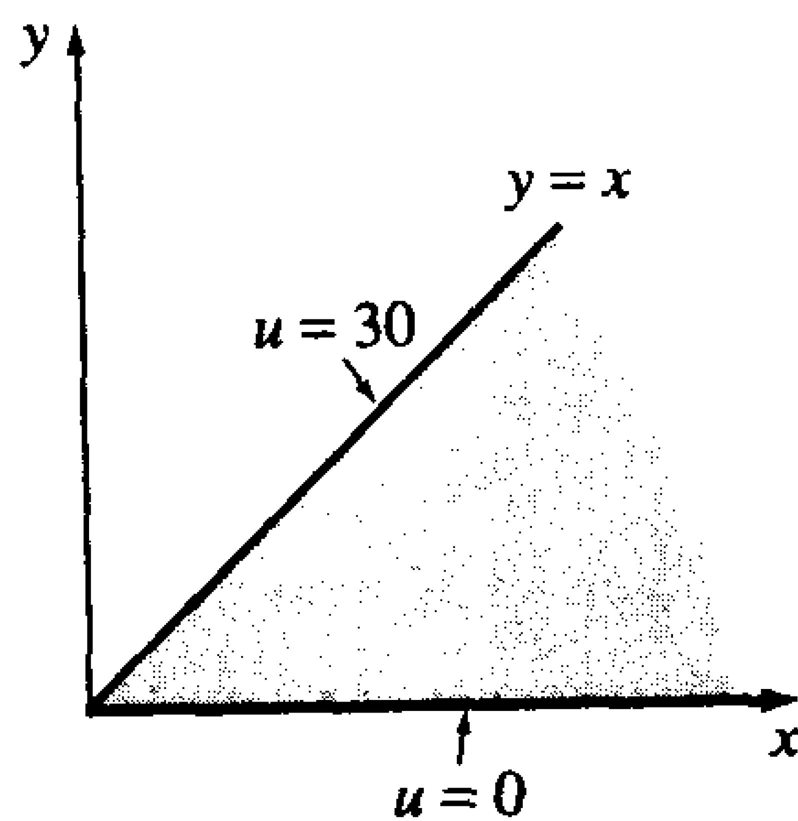


图 13.5

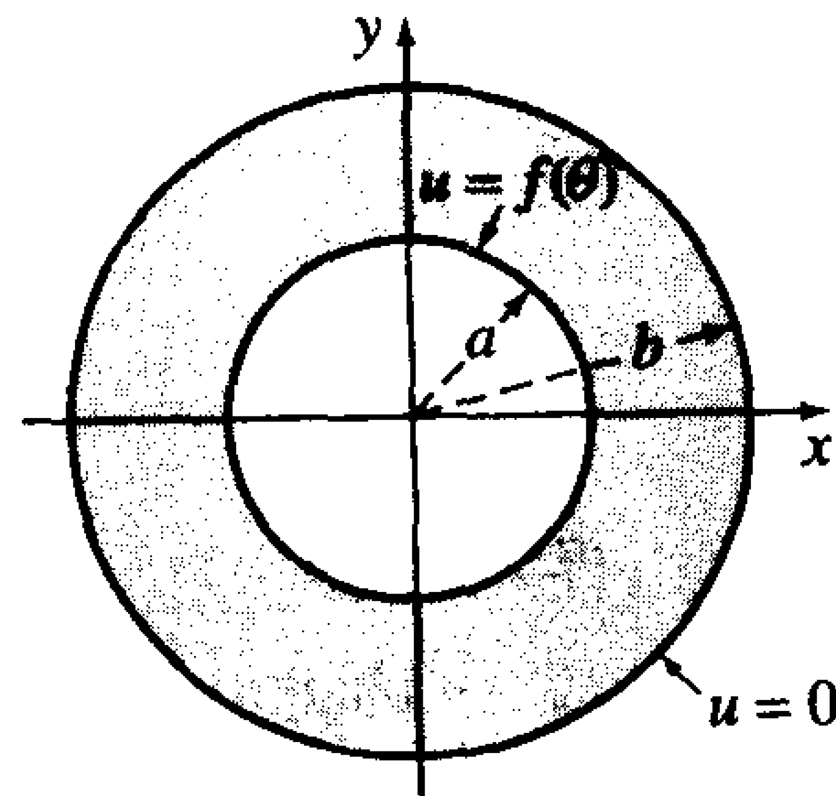


图 13.6

10. 如果图 13.6 中圆环的边界条件为 $u(a,\theta)=u_0$，$u(b,\theta)=u_1$，$0<\theta<2\pi$，u_0 与 u_1 是常数，证明稳定的温度分布为

$$u(r,\theta)=\frac{u_0\ln(r/b)-u_1\ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

[提示：试一下形如 $u(r,\ \theta)=v(r,\ \theta)+\psi(r)$ 的解.]

11. 求半圆环上稳定的温度分布 $u(r,\ \theta)$，若有

$$u(a,\theta)=\theta(\pi-\theta),\quad u(b,\theta)=0,\quad 0<\theta<\pi,$$
$$u(r,0)=0,\quad u(r,\pi)=0,\quad a<r<b.$$

12. 求半径为 $r=1$ 的半圆平板上稳定的温度分布，若有

$$u(1,\theta)=u_0,\quad 0<\theta<\pi,$$
$$u(r,0)=0, u(r,\pi)=u_0,\quad 0<r<1,$$

u_0是常数.

13. 求半径为 $r=2$ 的半圆平板上稳定的温度分布，若有

$$u(2,\theta)=\begin{cases}u_0, & 0<\theta<\pi/2\\ 0, & \pi/2<\theta<\pi,\end{cases}$$

u_0是常数，边界 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 均是绝热的.

讨论题

14. (a)求例 1 中 $u(r,\ \theta)$的级数解，若有

$$u(1,\theta)=\begin{cases}100, & 0<\theta<\pi\\ 0, & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}$$

(请见习题 1.)

(b)用绘图工具绘出部分和 $S_5(r,\ \theta)$的图形，它分别是(a)中的解在 $r=0.9$，$r=0.7$，$r=0.5$，$r=0.3$ 和$r=0.1$ 处前五个非零项之和. 在同一坐标系下绘出这些图形.

(c)求出 $u(0.9,\ 1.3)$，$u(0.7,\ 2)$，$u(0.5,\ 3.5)$，$u(0.3,\ 4)$，$u(0.1,\ 5.5)$的近似值. 然后，求出 $u(0.9,\ 2\pi-1.3)$,$u(0.7,\ 2\pi-2)$，$u(0.5,\ 2\pi-3.5)$，$u(0.3,\ 2\pi-4)$，$u(0.1,\ 2\pi-5.5)$的近似值.

(d)圆盘中心处的温度是多少？讨论为什么把这个值称作板上的平均温度. [提示：请参考(b)中所得到的图形和(c)中所得到的数值.]

15. 考虑一个如图 13.6 所示的圆环. 讨论当边界条件为 $u(a,\ \theta)=f(\theta)$，$u(b,\ \theta)=g(\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 时，如何求出稳定的温度分布 $u(r,\ \theta)$.

13.2 极坐标和柱坐标下的问题：贝塞尔函数

二维热传导方程和波动方程

$$k\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}\text{ 和 }a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

在极坐标下依次表示为

$$k\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}\text{ 和 }a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right)=\frac{\partial^2u}{\partial t^2},$$

这里 $u=u(r,\ \theta,\ t)$. 为了用变量分离法解包含这两类方程的边界值问题，我们定义 $u=R(r)\Theta(\theta)T(t)$. 如 12.8 节所示，这个假设可以推导出多重无穷级数. 请参考练习 13.2 的习题 12. 在接下来的讨论中，我们将考虑一类更简单但仍很重要的问题.

放射对称性 在极坐标下的边界值问题称为具有*放射对称性*(radial symmetry)，在这类问

题中未知函数 u 独立于角坐标 θ. 在这种情形下，热传导和波动方程的形式分别为

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \text{ 和 } a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

这里 $u=u(r, t)$. (1)中第二个方程所描述的振动称为*放射性振动*(radial vibration).

本节第一个例子是关于圆形薄膜自由放射性振动的问题. 假设薄膜的位移很微小，并且薄膜上每一点的运动都垂直于 xy 平面(横向振动)，也就是 u 轴垂直于 xy 平面. 当读者学习这个例子时，请记住这个振动鼓膜的物理模型.

例 1　圆形鼓膜的放射性振动

求半径为 c 的圆形鼓膜的位移 $u(r, t)$，它的周边被固定住，且初始位移为 $f(r)$，初始速度为 $g(r)$. 请参考图 13.7.

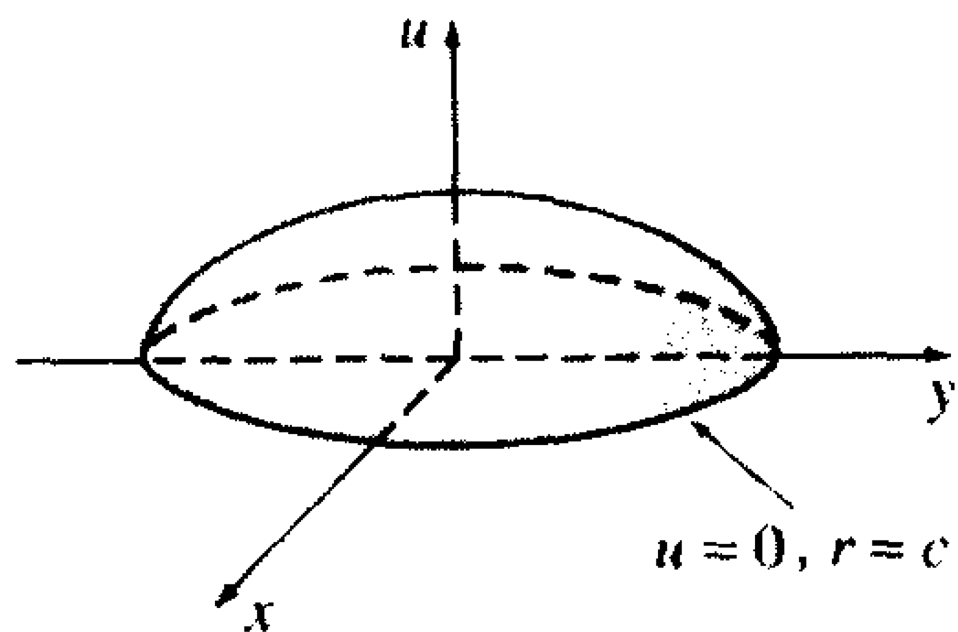


图　13.7

解　我们要解的边界值问题为

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0<r<c, t>0$$

$$u(c,t)=0, \quad t>0$$

$$u(r,0)=f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r), \quad 0<r<c.$$

把 $u=R(r)T(t)$代入偏微分方程，并分离变量可得

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=\frac{T''}{a^2 T}=-\lambda^2,$$

$$rR''+R'+\lambda^2 rR=0, \tag{2}$$

$$T''+a^2\lambda^2 T=0. \tag{3}$$

(2)式不是柯西－欧拉方程，而是一个带参数的贝塞尔微分方程，$v=0$. 它的通解为

$$R=c_1 J_0(\lambda r)+c_2 Y_0(\lambda r).$$

同类型方程(3)的通解为

$$T=c_3\cos a\lambda t+c_4\sin a\lambda t.$$

回顾当 $r\to 0^+$ 时，有 $Y_0(\lambda r)\to-\infty$. 因此，这个隐含的假设为位移 $u(r, t)$应该限制在 $r=0$ 处，所以我们可以定义 $c_2=0$. 因此，$R=c_1 J_0(\lambda r)$.

因为边界条件 $u(c, t)=0$ 等价于 $R(c)=0$，所以必有 $c_1 J_0(\lambda c)=0$. 我们排除 $c_1=0$ 的情况(它会产生偏微分方程的一个平凡解)，因此有

$$J_0(\lambda c)=0. \tag{4}$$

这个方程定义了该问题的一个正的特征值 λ_n：如果 x_n是(4)式的正根，那么 $\lambda_n=x_n/c$. 满足偏微分方程和边界条件的乘积解为

$$u_n=RT=(A_n\cos a\lambda_n t+B_n\sin a\lambda_n t)J_0(\lambda_n r), \tag{5}$$

其中我们使用了通常用的常数记号. 然后由叠加原理可得

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos a\lambda_n t+B_n\sin a\lambda_n t)J_0(\lambda_n r). \tag{6}$$

由给定的初始条件可以求出系数 A_n和 B_n.

令(6)式中的 $t=0$，并利用 $u(r, 0)=f(r)$ 可得

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r). \tag{7}$$

这个结果是函数 f 在区间$(0, c)$上的傅里叶-贝塞尔展开. 因此，把(4)、(7)式和 11.5 节的(7)、(15)式加以比较，我们可以发现 A_n 和 11.5 节(16)式中所给的是一致的：

$$A_n=\frac{2}{c^2 J_1^2(\lambda_n c)}\int_0^c r J_0(\lambda_n r) f(r)\,\mathrm{d}r. \tag{8}$$

接下来，我们对(6)式求关于 t 的微分，并令 $t=0$，利用 $u_t(r, 0)=g(r)$：

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n B_n J_0(\lambda_n r).$$

这是函数 g 的傅里叶-贝塞尔展开. 总系数 $a\lambda_n B_n$ 和 11.5 节中的(16)式是相同的，有

$$B_n=\frac{2}{a\lambda_n c^2 J_1^2(\lambda_n c)}\int_0^c r J_0(\lambda_n r) g(r)\,\mathrm{d}r. \tag{9}$$

最后，所给的边界值问题的解是(6)所给的级数，A_n 和 B_n 的定义为(8)和(9). ■

类似于 12.4 节的(8)式，乘积解(5)称为驻波(standing wave). 对 $n=1, 2, 3, \cdots$，驻波的图形以 $J_0(\lambda_n r)$ 为基础，并具有随时间可变的振幅

$$A_n\cos a\lambda_n t+B_n\sin a\lambda_n t.$$

驻波在不同时刻的图形如图 13.8 中的虚线所示. 区间$(0, c)$上每个驻波的零点都是 $J_0(\lambda_n r)=0$ 的根，这些零点对应于驻波上波节的集合. 这个集合称为结点线(nodal line). 如果 $J_0(\lambda_n r)=0$ 的正根(如例 1 所示)表示为 x_n，那么 $\lambda_n c=x_n$ 意味着 $\lambda_n=x_n/c$，因此驻波的零点由下式决定：

$$J_0(\lambda_n r)=J_0\left(\frac{x_n}{c}r\right)=0.$$

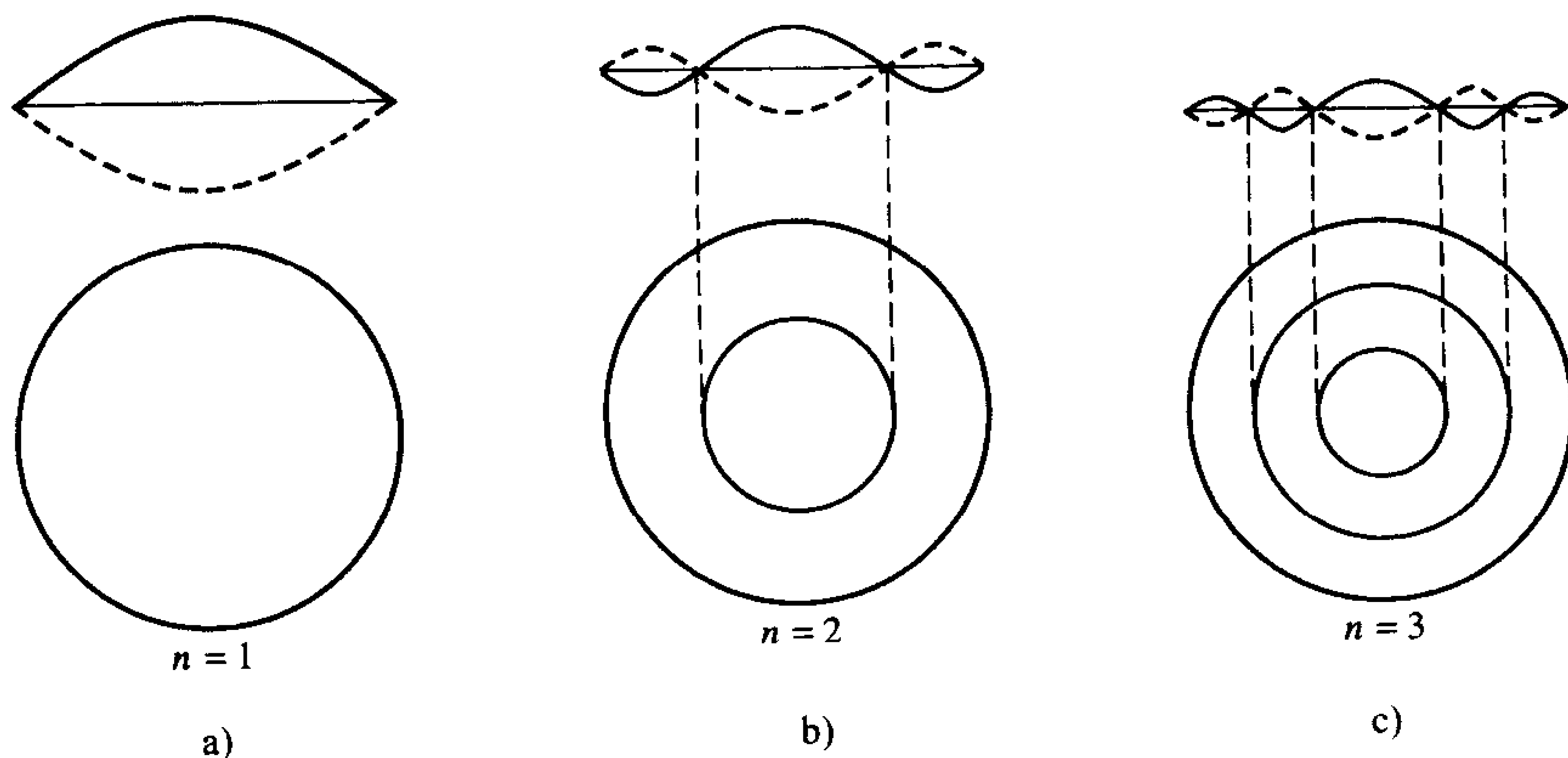


图 13.8

J_0 的前三个正根(近似值)为 $x_1=2.4$，$x_2=5.5$，$x_3=8.7$. 因此，当 $n=1$ 时，

$$J_0\left(\frac{x_1}{c}r\right)=0$$

的正根为$\frac{2.4}{c}r=2.4$，或$r=c$. 因为我们要在开区间$(0, c)$上求驻波的零点，所以最后一个结果意味着第一类驻波没有结点线. 当$n=2$时，

$$J_0\left(\frac{x_2}{c}r\right)=0$$

的前两个正根由$\frac{5.5}{c}r=2.4$和$\frac{5.5}{c}r=5.5$决定. 因此，第二类驻波有一个结点线，定义为$r=x_1c/x_2=2.4c/5.5$. 注意到$r\approx0.44c<c$. 当$n=3$时，用类似的分析可以证明它有两个结点线，它们分别定义为$r=x_1c/x_3=2.4c/8.7$，$r=x_2c/x_3=5.5c/8.7$. 一般地，第n类驻波有$n-1$个结点线$r=x_1c/x_n$，$r=x_2c/x_n$，$\cdots r=x_{n-1}c/x_n$. 因为$r=$常数是极坐标下圆的方程，所以我们在图 13.8 中看到驻波的结点线是一组同心圆.

柱坐标下的拉普拉斯算子 从图 13.9 中我们可以看到，空间点的柱坐标和直角坐标的关系为

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z.$$

马上可以得到极坐标下拉普拉斯算子的推导(13.1 节)，在柱坐标系下三维拉普拉斯算子

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\text{变为}\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}.$$

例 2　圆柱体上稳定的温度分布

求如图 13.10 所示的圆柱体上稳定的温度分布.

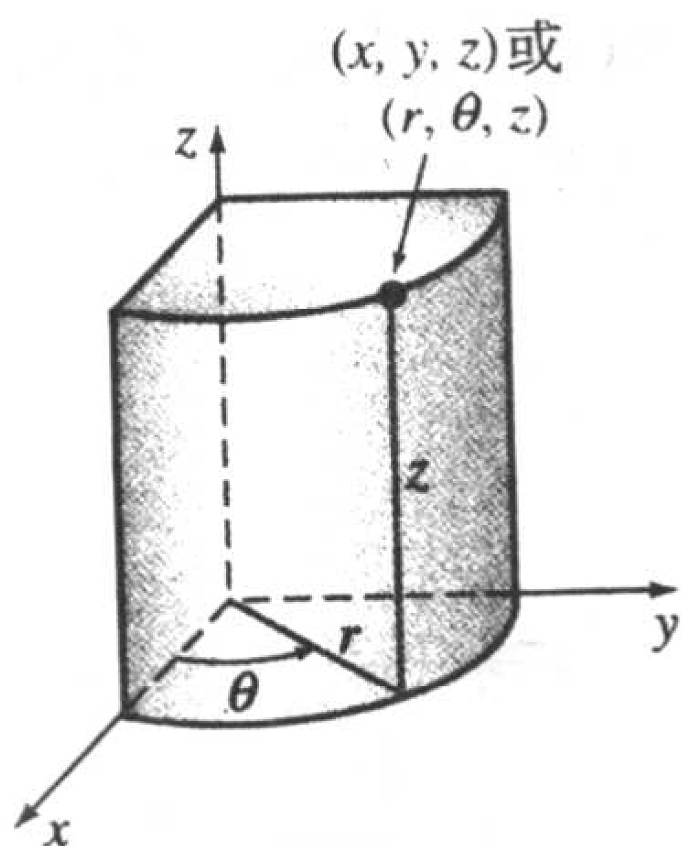


图　13.9

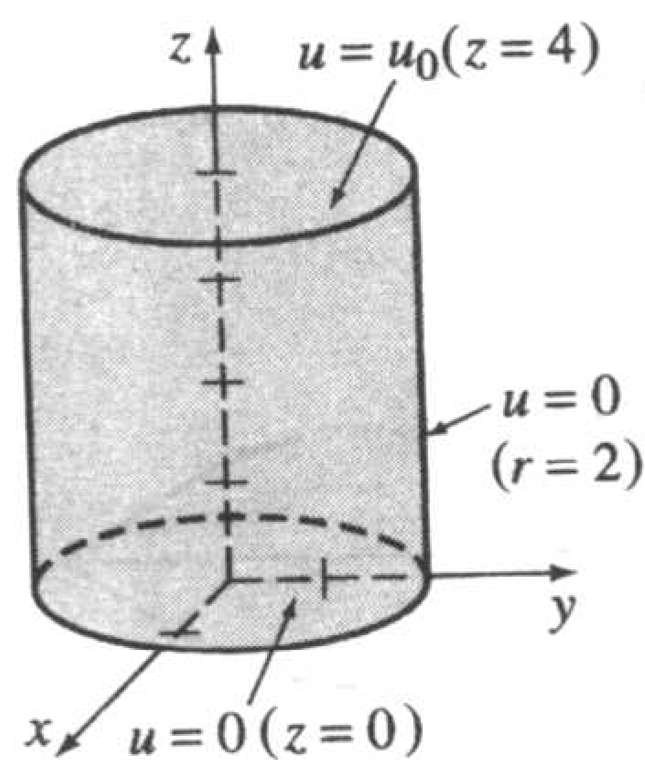


图　13.10

解　边界条件表明温度u具有放射对称性的性质. 因此，$u(r, z)$由下式决定：

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0, 0<r<2, 0<z<4,$$

$$u(2,z)=0, 0<z<4,$$

$$u(r,0)=0, u(r,4)=u_0, 0<r<2.$$

利用$u=R(r)Z(z)$和变量分离法可得

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{Z''}{Z}=-\lambda^2,$$

$$rR''+R'+\lambda^2rR=0, \tag{10}$$

$$Z''-\lambda^2Z=0. \tag{11}$$

这里使用负的分离常数，因为解 $u(r, z)$不可能在 z 上是周期性的. (10)的解为

$$R = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r),$$

并且由于(11)的解定义在有限区间[0, 2]上，所以我们可以把它的通解写为

$$Z = c_3 \cosh\lambda z + c_4 \sinh\lambda z.$$

如例 1 所示，假设函数 u 限制在 $r=0$ 处要求有 $c_2=0$ 成立. 条件 $u(2, z)=0$ 意味着 $R(2)=0$. 方程

$$J_0(2\lambda) = 0 \tag{12}$$

定义了该问题正的特征值 λ_n. 最后，$Z(0)=0$ 表示 $c_3=0$. 因此，我们有 $R=c_1 J_0(\lambda_n r)$，$Z=c_4 \sinh\lambda_n z$，并有

$$u_n = RZ = A_n \sinh\lambda_n z J_0(\lambda_n r),$$

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\lambda_n z J_0(\lambda_n r).$$

然后由在 $z=4$ 处的边界条件可得傅里叶-贝塞尔级数

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh 4\lambda_n J_0(\lambda_n r),$$

因此根据(12)式，11.5 节(16)式所定义的系数为

$$A_n \sinh 4\lambda_n = \frac{2u_0}{2^2 J_1^2(2\lambda_n)} \int_0^2 r J_0(\lambda_n r)\,\mathrm{d}r.$$

为了计算这个积分，我们首先进行代换 $t=\lambda_n r$，有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[tJ_1(t)]=tJ_0(t)$：

$$A_n \sinh 4\lambda_n = \frac{u_0}{2\lambda_n^2 J_1^2(2\lambda_n)} \int_0^{2\lambda_n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[tJ_1(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{u_0}{\lambda_n J_1(2\lambda_n)}.$$

最后，我们得到

$$A_n = \frac{u_0}{\lambda_n \sinh 4\lambda_n J_1(2\lambda_n)}.$$

因此，圆柱体上的温度为

$$u(r,z) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\lambda_n z J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n \sinh 4\lambda_n J_1(2\lambda_n)}.$$ ■

练习 13.2

1. 若例 1 中 $f(r)=0$，圆形鼓膜有向上的初始单位速度，求位移 $u(r, t)$.
2. 半径为 1 的圆形鼓膜，圆周被固定住. 若鼓膜的初始位移为 $f(r)=1-r^2$，$0<r<1$，并由静止开始运动，求位移 $u(r, t)$. [提示：请参考练习 11.5 的习题 10.]
3. 在例 2 中，若边界条件为 $u(2, z)=0$，$0<z<4$，$u(r, 0)=u_0$，$u(r, 4)=0$，$0<r<2$，求柱体内稳定的温度分布 $u(r, z)$.
4. 若例 2 中柱体的侧面是绝热的，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 0, 0 < z < 4.$$

(a)当 $u(r, 4)=f(r)$，$0<r<2$ 时，求稳定的温度分布 $u(r, z)$.

(b)证明当 $f(r)=u_0$时，(a)中的稳定温度可以化为 $u(r, z)=u_0 z/4$. [提示：利用 11.5 节的(11)式.]

5. 半径为 c 的圆形板，它上面的温度由下面的边界值问题决定：

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},0<r<c,t>0$$

$$u(c,t)=0,t>0$$

$$u(r,0)=f(r),0<r<c.$$

解出 $u(r, t)$.

6. 若圆盘的边界 $r=c$ 处是绝热的，重新求解习题 5.

7. 若半径为单位长度的无限圆柱体的侧面有热量散失到周围温度为零的介质中(见图 13.11)，则圆柱体内部的温度由下式决定：

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},0<r<1,t>0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=-hu(1,t),h>0,t>0$$

$$u(r,0)=f(r),0<r<1.$$

解出 $u(r, t)$.

8. 半径为单位长度的半无限圆柱体($z\geqslant 0$)，若它的侧面有热量散失到周围介质中，介质的温度为零，并且柱体的底部 $z=0$ 处温度恒为 u_0，求柱体内稳定的温度分布 $u(r, z)$.

9. 一个圆形板是由同心圆的两种不同材料复合而成. 请参考图 13.12. 板上的温度由下面的边界值问题决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial t},0<r<2,t>0$$

$$u(2,t)=100,\quad t>0$$

$$u(r,0)=\begin{cases}200, & 0<r<1\\ 100, & 1<r<2.\end{cases}$$

解出 $u(r, t)$. [提示：令 $u(r, t)=v(r, t)+\psi(t)$.]

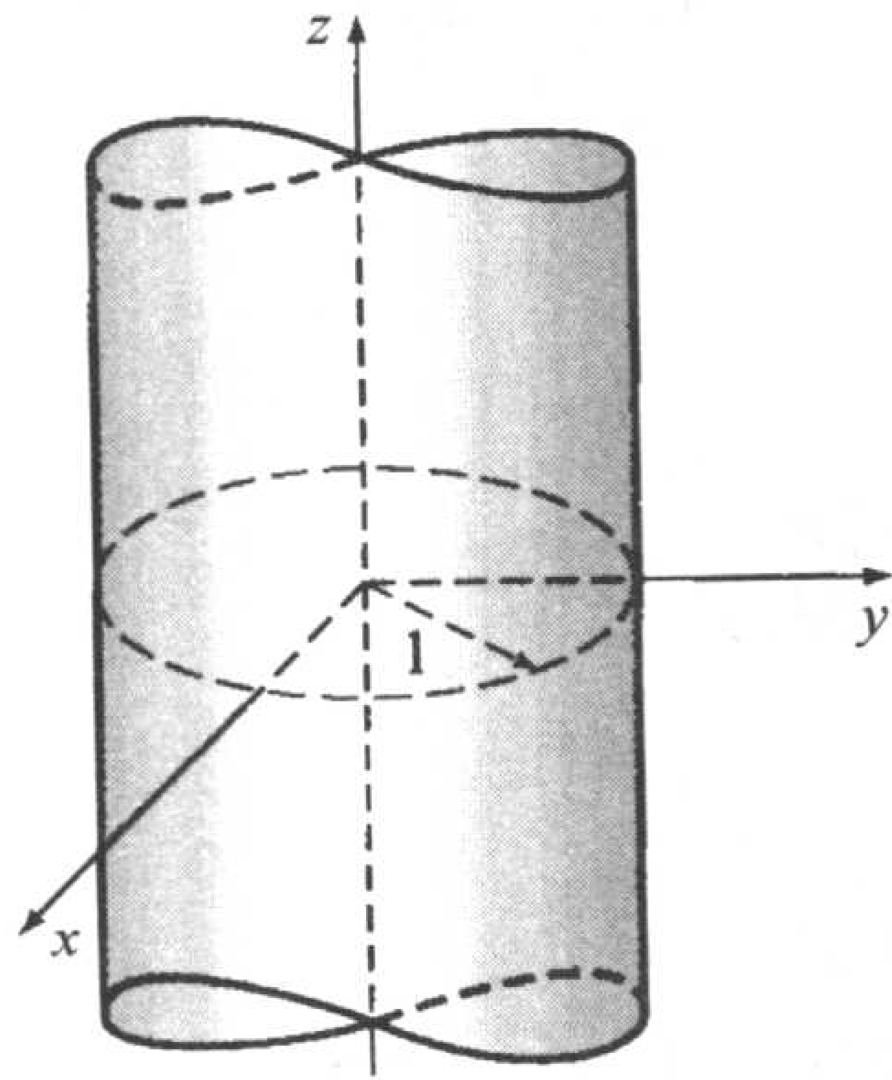


图 13.11

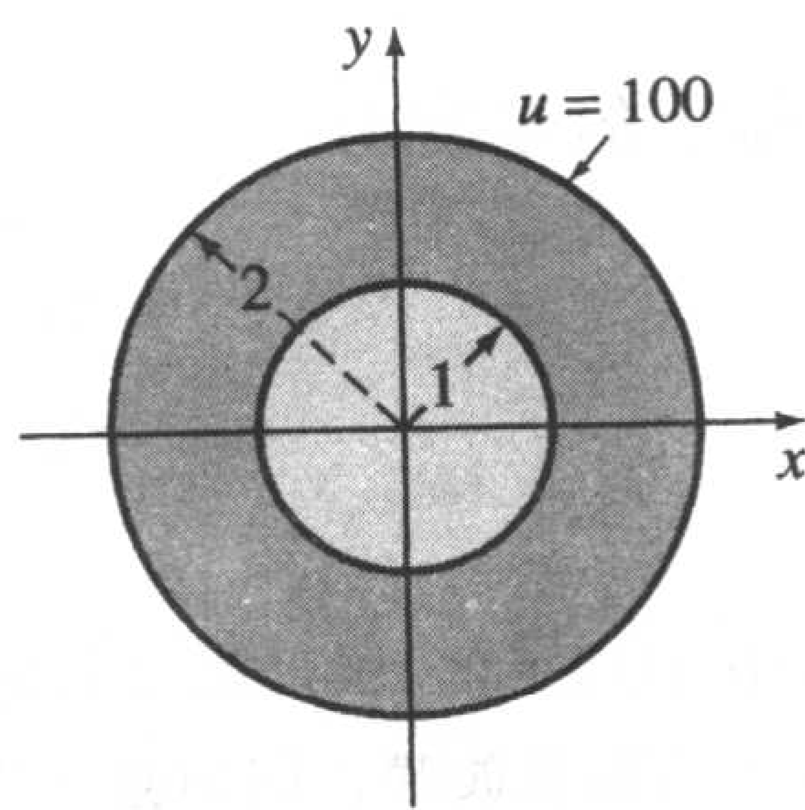


图 13.12

10. 解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\beta=\frac{\partial u}{\partial t},0<r<1,t>0,\beta\text{是常数}$$

$$u(1,t)=0,\quad t>0$$

$$u(r,0)=0,\quad 0<r<1.$$

11. 长 L 的重链条在垂直平面内摆动，水平位移 $u(x, t)$ 满足偏微分方程

$$g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},0<x<L,t>0.$$

请参考图 13.13.

(a)用$-\lambda^2$作为分离常数，证明空间变量 x 的常微分方程为 $xX''+X'+\lambda^2X=0$. 用代换 $x=\tau^2/4$ 解这个方程.

(b)利用(a)中的结果解出所给的偏微分方程，约束条件为

$$u(L,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0<x<L.$$

[提示：设在自由端 $x=0$ 处的摆动是有限的.]

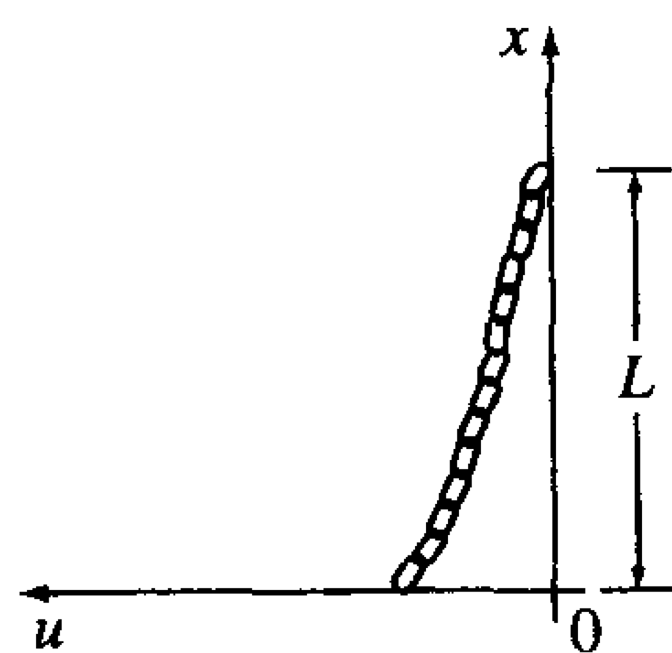


图 13.13

12. 在本题中，我们考虑半径为 c 的振动圆形鼓膜的一般情况，即和 θ 有关：

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},0<r<c,t>0$$

$$u(c,\theta,t)=0,0<\theta<2\pi,t>0$$

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta),0<r<c,0<\theta<2\pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r,\theta),0<r<c,0<\theta<2\pi.$$

(a)设 $u=R(r)\Theta(\theta)T(t)$，分离常数为$-\lambda^2$和$-v^2$. 证明被分离后的微分方程为

$$T''+a^2\lambda^2T=0,\Theta''+v^2\Theta=0$$

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-v^2)R=0.$$

(b)解分离的方程.

(c)证明这个问题的特征值和特征函数如下：

特征值：$v=n$，$n=0$，1，2，…；特征函数：1，$\cos n\theta$，$\sin n\theta$.

特征值：$\lambda_{ni}=x_{ni}/c$，$i=1$，2，…，其中对每一个 n，x_{ni}都是 $J_n(\lambda c)=0$ 的正根；特征函数：$J_n(\lambda_{ni}r)=0$.

(d)用叠加原理求多重级数解. 不用计算系数.

计算机实验作业

13. 考虑一个理想化的鼓，它的半径为单位长度，一个薄膜沿圆周固定在上面. 当敲击鼓的中心时，听到的是沉闷的声音而不是悦耳的声音. 我们可以用例 1 中的边界值问题来给打鼓产生的声音建模.

(a)若 $c=1$，$f(r)=0$，

$$g(r)=\begin{cases}-v_0,0\leqslant r<b\\0,\quad b\leqslant r<1.\end{cases}$$

求(6)的解 $u(r,t)$.

(b)证明驻波 $u_n(r,t)$的频率是 $f_n=a\lambda_n/2\pi$，这里 λ_n是 $J_0(x)$的第 n 个正根. 和 12.4 节的一维波动方程的解不同，这个频率不是基频 f_1的整数倍. 证明 $f_2\approx2.295f_1$ 和 $f_3\approx3.598f_1$. 我们称击鼓产生的是不和谐的泛音(anharmonic overtone). 因此，位移函数 $u(r,t)$不是周期性的，理想化的鼓不能产生稳定的声音.

(c)令(a)中所得的解中，$a=1$，$b=1/4$，$v_0=1$. 用 CAS 绘出第五个部分和 $S_5(r,t)$在 $t=0$，0.1，0.2，0.3，…，5.9，6.0 处，在$-1\leqslant r\leqslant1$ 上的图形. 用 CAS 的模拟程序模拟振动的过程.

(d)用 CAS 的 3D 绘图程序绘出圆形鼓鼓顶的振动过程，也就是(c)中所得横截面的运动过程. [提示：这里有几种方法可以做. 对某个固定的时间，用 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 绘出 x 和 y 的函数 u，或者用与 Mathematica 的 **CylindricalPlot3D** 类似的命令.]

14. (a)考虑例 1 中，$a=1$，$c=10$，$g(r)=0$，$f(r)=1-r/10$，$0<r<10$. 借助于 CAS 求出这个边界值问题前三个特征值 λ_1、λ_2和 λ_3，以及形式如(6)的解 $u(r,t)$的前三个系数 A_1、A_2和 A_3. 写出这个

级数解的第三个部分和 $S_3(r, t)$.

(b)用 CAS 绘出 $S_3(r, t)$在 $t=0$, 4, 10, 12, 20 处的图形.

15. 解习题 5，边界条件为 $u(c, t)=200$，$u(r, 0)=0$. 根据这些条件，直觉上告诉我们当$t\to+\infty$时，板上任何一个内点处都有 $u(r, t)\to 200$. 设 $c=10$，板的材料是铸铁，因此 $k=0.1$(近似地). 借助于 CAS 求该边界值问题前五个特征值 λ_1、λ_2、λ_3、λ_4 和 λ_5 以及解 $u(r, t)$中的五个系数 A_1、A_2、A_3、A_4 和 A_5. 令相应的近似解表示为 $S_5(r, t)$. 绘出 $S_5(5, t)$和 $S_5(0, t)$在充分大的时间区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的图形. 利用 $S_5(5, t)$和 $S_5(0, t)$的图形估计 $u(5, t)\approx 100$，$u(0, t)\approx 100$ 的时间(单位为 s). 再估计出 $u(5, t)\approx 200$，$u(0, t)\approx 200$ 的时间.

13.3 球坐标下的问题：勒让德多项式

三维球坐标与直角坐标的关系为

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta. \tag{1}$$

角度 θ 称为极角，角度 ϕ 称为方位角.[○] 请见图 13.14. 尽管 r、θ 和 ϕ 在解球坐标下的偏微分方程时可以取任何实数，但通常假设 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$.

我们用(1)中的方程把函数 $u(x, y, z)$的三维拉普拉斯算子

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

转换成球坐标下的算子.

球坐标下的拉普拉斯算子 若像 13.1 节中我们所用的链式法则那样，三维拉普拉斯算子可以写为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \tag{2}$$

其中 $u=u(r, \theta, \phi)$. 正如所看到的，包含(2)的问题是非常可怕的. 因此，我们将只考虑一些简单的问题，在这些问题中方位角 ϕ 是独立的.

例 1　球内稳定的温度分布

求如图 13.15 所示的球内稳定的温度分布 $u(r, \theta)$.

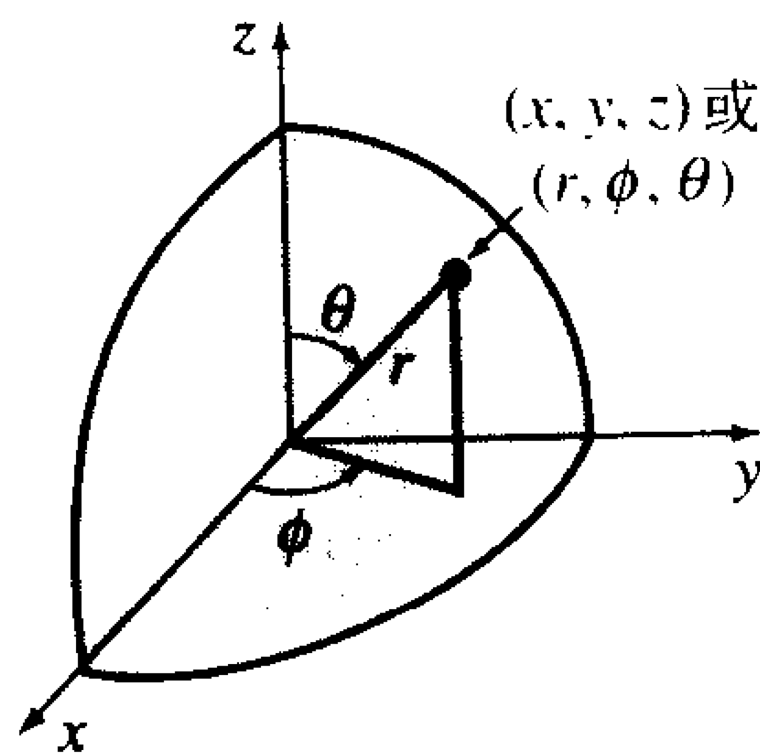


图 13.14

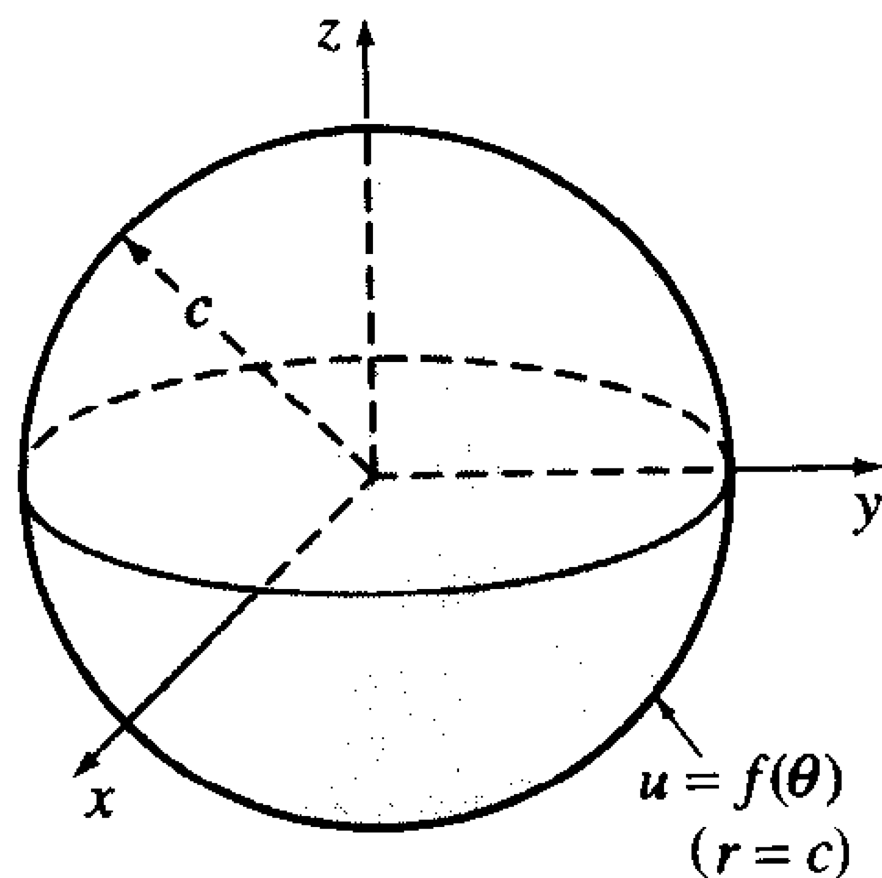


图 13.15

○ 请读者注意，关于图 13.14 中两个角符号的使用没有加以说明. 因此，若参考别的教材，就会发现经常用 ϕ 来表示极角，用 θ 表示幅角. 同时，有些作者习惯用 ρ 代替 r.

解 这个温度可由下式决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0, 0<r<c, 0<\theta<\pi,$$

$$u(c,\theta)=f(\theta), 0<\theta<\pi.$$

如果 $u=R(r)\Theta(\theta)$，那么偏微分方程可以被分离为

$$\frac{r^2R''+2rR'}{R}=-\frac{\Theta''+\cot\theta\Theta'}{\Theta}=\lambda^2,$$

因此有

$$r^2R''+2rR'-\lambda^2R=0, \tag{3}$$

$$\sin\theta\Theta''+\cos\theta\Theta'+\lambda^2\sin\theta\Theta=0. \tag{4}$$

进行代换 $x=\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，(4)式可以表示为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\lambda^2\Theta=0, -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{5}$$

后一个方程是勒让德方程的形式(请参考练习 6.3 的习题 31)．(5)式的唯一解是连续的，并且在闭区间[−1，1]上有连续导数，这个解是勒让德多项式 $P_n(x)$，它对应于不同的 $\lambda^2=n(n+1)$，$n=0$，1，2，…均成立．因此我们可以把(4)的解写为

$$\Theta=P_n(\cos\theta).$$

此外，当 $\lambda^2=n(n+1)$时，柯西－欧拉方程(3)的通解为

$$R=c_1r^n+c_2r^{(n+1)}.$$

再一次因为我们希望 $u(r,\theta)$限制在 $r=0$ 处，所以有定义 $c_2=0$．因此，有 $u_n=A_nr^nP_n(\cos\theta)$，以及

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

在 $r=c$ 处，有 $f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nc^nP_n(\cos\theta)$.

因此，A_nc^n是 11.5 节中傅里叶-勒让德级数(23)的系数：

$$A_n=\frac{2n+1}{2c^n}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

所以我们可得解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\frac{r}{c}\right)^nP_n(\cos\theta).$$ ■

练习 13.3

1. 解例 1 中的问题，若有

$$f(\theta)=\begin{cases}50, & 0<\theta<\pi/2\\ 0, & \pi/2<\theta<\pi.\end{cases}$$

写出这个级数解的前四个非零项．[提示：请参考 11.5 节的例 3.]

2. 例 1 中的解 $u(r,\theta)$可以解释为是球体内部受球体表面电荷分布 $f(\theta)$影响下的电势．求球体外部的电势．
3. 求例 1 中问题的解，若 $f(\theta)=\cos\theta$，$0<\theta<\pi$．[提示：$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$．利用正交性.]
4. 求例 1 中问题的解，若 $f(\theta)=1-\cos2\theta$，$0<\theta<\pi$．[提示：请参考练习 11.5 的习题 16.]
5. 球内部有一个 $a<r<b$ 的空球，若球体的内表面 $r=a$ 保持温度 $f(\theta)$，外表面 $r=b$ 保持零度，求球体上稳定的温度分布 $u(r,\theta)$．这个球体在第一象限的部分如图 13.16 所示．
6. 半径为 $r=c$ 的半球，其上稳定的温度分布由如下方程决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0,0<r<c,0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0,0<r<c$$

$$u(c,\theta)=f(\theta),0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

解出 $u(r,\theta)$. [提示：$P_n(0)=0$ 当且仅当 n 是奇数. 请参考练习 11.5 的习题 18.]

7. 若半球的底部是绝热的，也就是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2}=0,0<r<c.$$

解习题 6.

8. 当 $r>c$ 时，解习题 6.

9. 半径为单位长度的球体，它上面和时间有关的温度由下式决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<r<1,\quad t>0$$

$$u(1,t)=100,\quad t>0$$

$$u(r,0)=0,\quad 0<r<1.$$

解出 $u(r,t)$. [提示：证明偏微分方程的左端可以写为 $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. 令 $ru(r,t)=v(r,t)+\psi(r)$. 仅需要使用当 $r\to 0$ 时有界的函数.]

10. 半径为 1 的匀质实球体，初始时刻温度为常数 u_0，被投入一个大的液体容器，液体温度恒为常数 u_1 ($u_1>u_0$). 请参考图 13.17. 因为在边界 $r=1$ 处发生热传导，所以球内的温度 $u(r,t)$ 可由下面的边界值问题决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial t},0<r<1,t>0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=-h(u(1,t)-u_1),0<h<1$$

$$u(r,0)=u_0,0<r<1.$$

解出 $u(r,t)$. [提示：利用习题 9 的求解过程.]

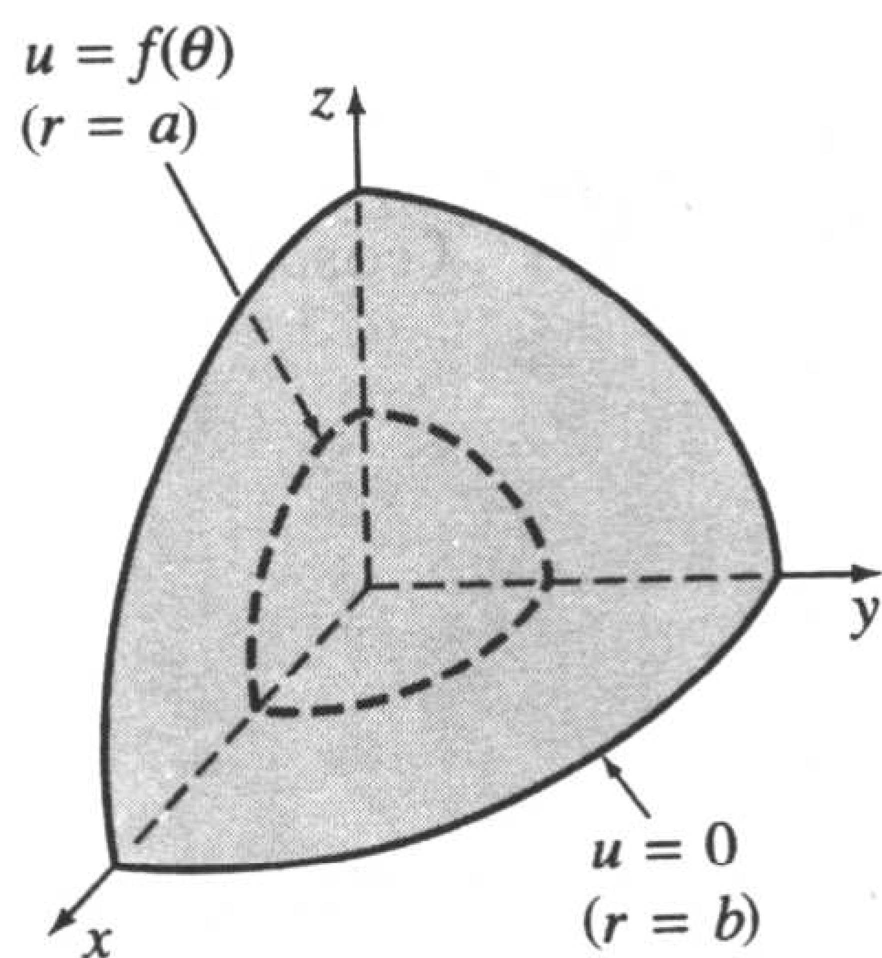


图 13.16

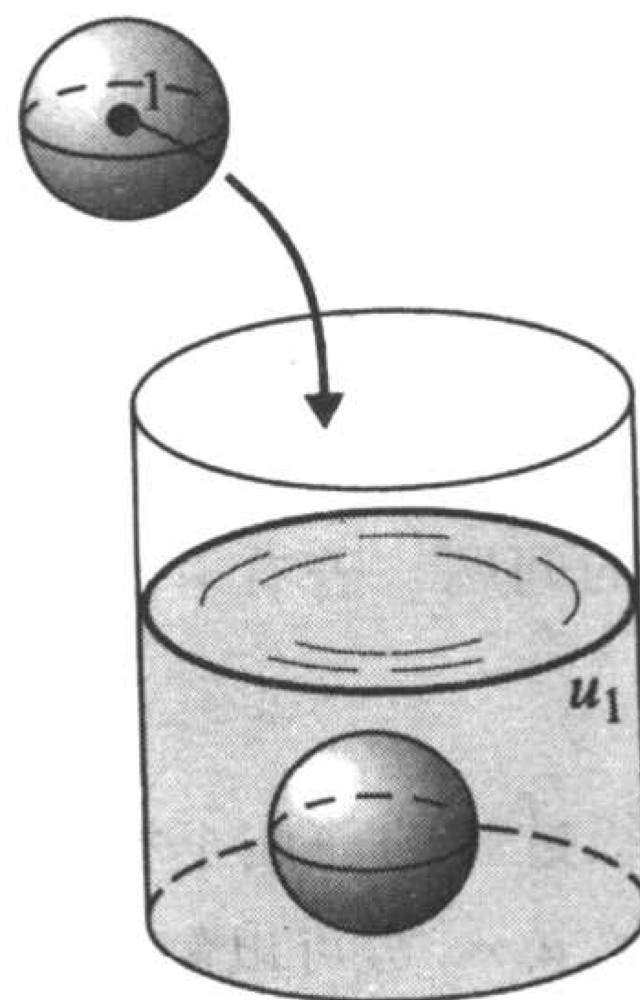


图 13.17

11. 解包含球形振动的边界值问题

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0<r<c,\ t>0$$

$$u(c,\ t)=0,\ t>0$$

$$u(r,\ 0)=f(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r),\ 0<r<c.$$

[提示：把偏微分方程的左端写为 $a^2\frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$．令 $v(r,\ t)=ru(r,\ t)$.]

12. 一个半径为 $r=c$ 的导体球放入一个匀强电场，沿 z 轴方向电场强度为 E．球外部的电势 $u(r,\ \theta)$ 可由下面的边界值问题决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cot}{r^2}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=0, r>c, 0<\theta<\pi$$

$$u(c,\theta)=0, 0<\theta<\pi$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta)=-Ez=-Er\cos\theta.$$

证明 $u(r,\ \theta)=-Er\cos\theta+E\frac{c^3}{r^2}\cos\theta$.

[提示：解释为什么 $\int_0^\pi \cos\theta P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0$ 对所有的非负整数都成立，仅对 $n=1$ 不成立．请参考 11.5 节的(24).]

第 13 章复习题

1. 求半径为 c 的圆板上稳定的温度分布 $u(r,\ \theta)$，圆周的温度为

$$u(c,\theta)=\begin{cases}u_0, 0<\theta<\pi\\ -u_0, \pi<\theta<2\pi.\end{cases}$$

2. 求习题 1 中圆板上稳定的温度分布，若有

$$u(c,\theta)=\begin{cases}1, & 0<\theta<\pi/2\\ 0, & \pi/2<\theta<3\pi/2\\ 1, & 3\pi/2<\theta<2\pi.\end{cases}$$

3. 求半径为 1 的半圆板上稳定的温度分布，若有

$$u(1,\theta)=u_0(\pi\theta-\theta^2), 0<\theta<\pi,$$

$$u(r,0)=0, u(r,\pi)=0, 0<r<1.$$

4. 求习题 3 中半圆板上稳定的温度分布，若 $u(1,\ \theta)=\sin\theta,\ 0<\theta<\pi$.
5. 求如图 13.18 所示板上稳定的温度分布 $u(r,\ \theta)$.
6. 求如图 13.19 所示无限板上稳定的温度分布 $u(r,\ \theta)$.

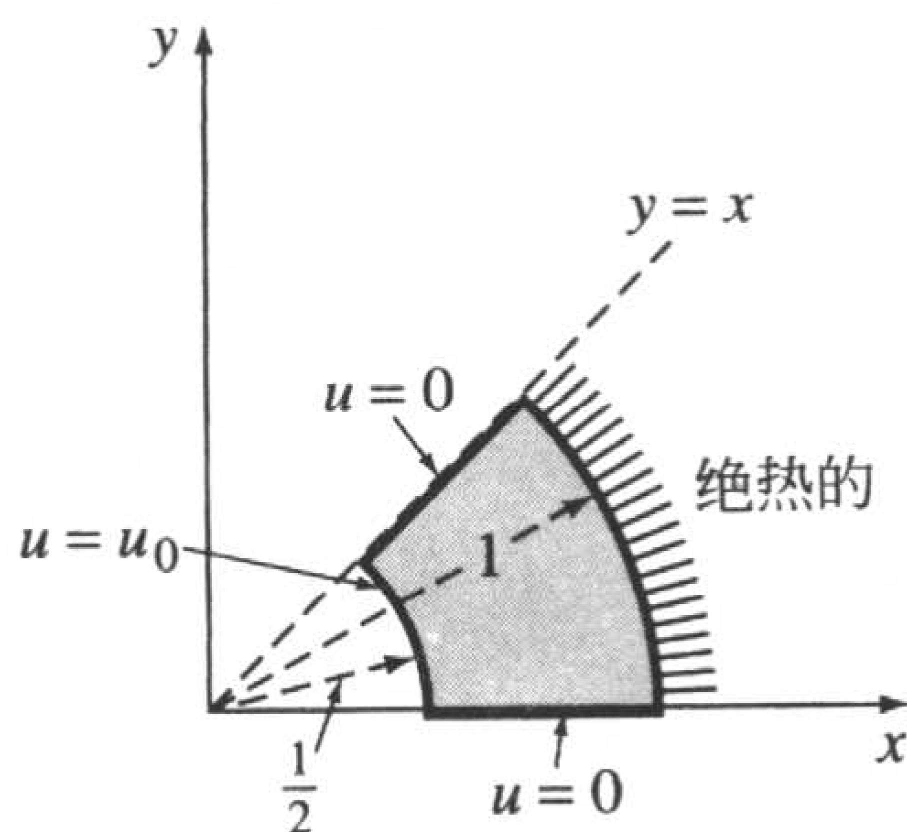


图 13.18

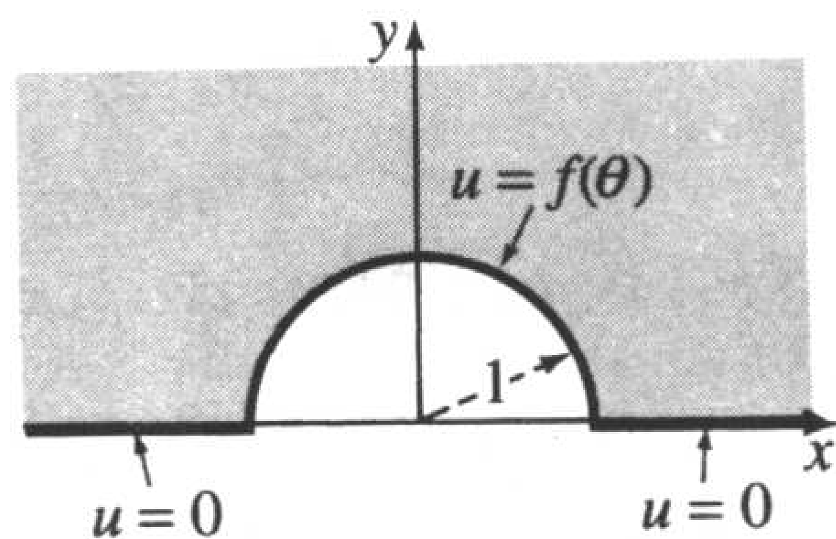


图 13.19

7. 设一个半径为单位长度的薄圆盘，热量从其表面散失到周围温度为零的介质中．若使用热传导的线性法则，则热传导方程的形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}-hu=\frac{\partial u}{\partial t},\ h>0,\ 0<r<1,\ t>0.$$

请参考图 13.20. 若边界 $r=1$ 处的温度保持为零度，并且板的初始温度处处相同，求温度 $u(r, t)$.

8. 设 x_k 是 J_0 正的零根. 证明边界值问题

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},0<r<1,t>0$$

$$u(1,t)=0,t>0$$

$$u(r,0)=u_0J_0(x_kr),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<r<1$$

的解为 $u(r, t)=u_0J_0(x_kr)\cos ax_kt$.

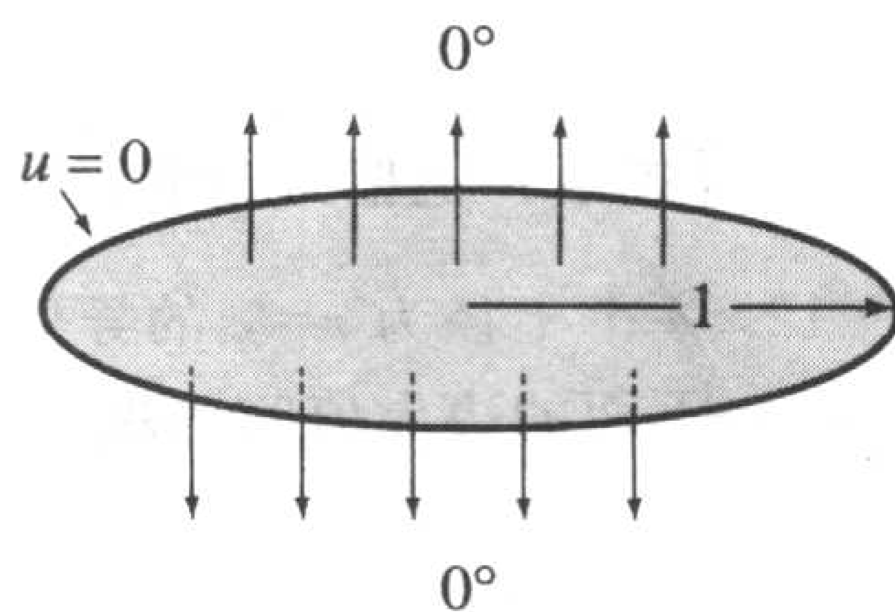


图　13.20

9. 求如图 13.10 所示的柱体中稳定的温度分布 $u(r, z)$，它的侧面恒为零度，顶部 $z=4$ 保持恒温 50 度，底部 $z=0$ 处是绝热的.

10. 解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,0<r<1,0<z<1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0,0<z<1$$

$$u(r,0)=f(r),u(r,1)=g(r),0<r<1.$$

11. 求一个半径为单位长度的球体上稳定的温度分布 $u(r, \theta)$，其表面满足条件

$$u(1,\theta)=\begin{cases}100, & 0<\theta<\pi/2\\ -100, & \pi/2<\theta<\pi.\end{cases}$$

[提示：请参考练习 11.5 的习题 20.]

12. 解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},0<r<1,t>0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0,t>0$$

$$u(r,0)=f(r),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r),0<r<1.$$

[提示：用练习 13.3 中习题 9 和 10 的求解过程，但是令 $v(r, t)=ru(r, t)$. 请参考 12.7 节.]

13. 函数 $u(x)=Y_0(\lambda a)J_0(\lambda x)-J_0(\lambda a)Y_0(\lambda x)$，$a>0$ 是参数贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\lambda^2x^2u=0$$

在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的解. 若特征值 λ_n 是方程 $Y_0(\lambda a)J_0(\lambda b)-J_0(\lambda a)Y_0(\lambda b)=0$ 的正根，证明函数

$$u_m(x)=Y_0(\lambda_m a)J_0(\lambda_m x)-J_0(\lambda_m a)Y_0(\lambda_m x),$$

$$u_n(x)=Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n x)-J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n x)$$

关于区间$[a, b]$上的权函数 $p(x)=x$ 是正交的；即

$$\int_a^b xu_m(x)u_n(x)dx=0,m\neq n.$$

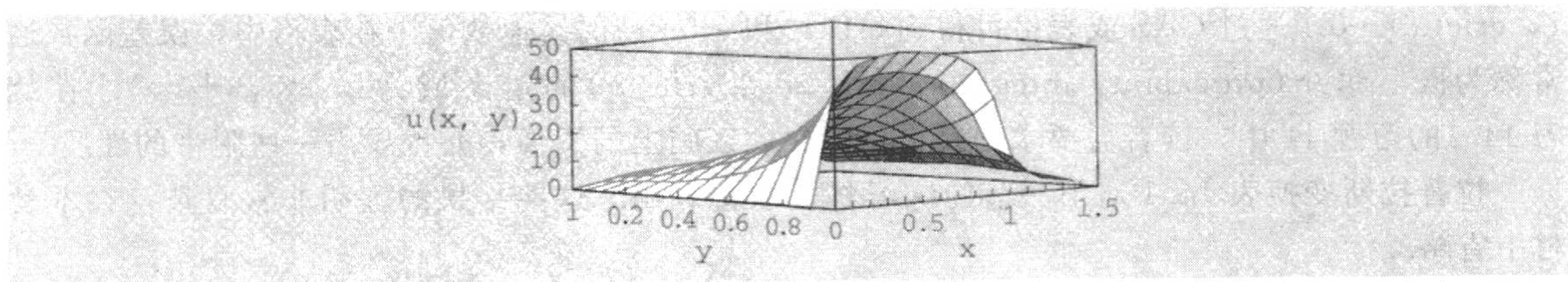
[提示：用定理 11.3 的求解过程.]

14. 利用习题 13 所得到的结果，解圆环上温度 $u(r, t)$ 的边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial t},a<r<b,t>0$$

$$u(a,t)=0,u(b,t)=0,t>0$$

$$u(r,0)=f(r),a<r<b.$$



拉普拉斯方程的解；见 14.4 节习题 22

第 14 章　积分变换方法

我们在 12 章和 13 章中使用的变量分离法是解边界值问题的一个强有力的工具，但却并非总是有效. 如果问题中的偏微分方程是非齐次的，或者边界条件依赖于时间，再或者空间变量的区间为无穷区间$(-\infty,+\infty)$或半无穷区间$(a,+\infty)$，我们可以用积分变换求解问题. 在 14.2 节中，我们将会利用我们熟悉的拉普拉斯变换求解含有热传导方程和波动方程的问题. 在 14.4 节中还将引入并使用三类新的积分变换——傅里叶变换.

14.1　误差函数

在数学中有很多函数是用积分来定义的. 例如，在许多传统的微积分教材中，自然对数的定义为 $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t, x>0$. 在前面的章节中，我们看到了误差函数 $\mathrm{erf}(x)$，余误差函数 $\mathrm{erfc}(x)$，正弦积分函数 $\mathrm{Si}(x)$，Fresnel 正弦积分 $S(x)$和 gamma 函数 $\Gamma(\alpha)$；所有这些函数都是以积分的形式来定义的. 在使用拉普拉斯变换求解边界值问题之前，我们需要对误差函数和余误差函数有一些更多的了解. 在本节中，我们将介绍 $\mathrm{erf}(x)$和 $\mathrm{erfc}(x)$的图像和一些较明显的性质.

性质和图像　根据 2.3 节中的(14)，误差函数(error function) $\mathrm{erf}(x)$和余误差函数(complementary errorfunction) $\mathrm{erfc}(x)$的定义分别如下，

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u, \mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u. \tag{1}$$

在极坐标下我们可以证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ 或 } \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=1.$$

因此由于定积分的区间可加性，上一结果等同于

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right]=1.$$

这说明 $\mathrm{erf}(x)$和 $\mathrm{erfc}(x)$有恒等关系

$$\mathrm{erf}(x)+\mathrm{erfc}(x)=1. \tag{2}$$

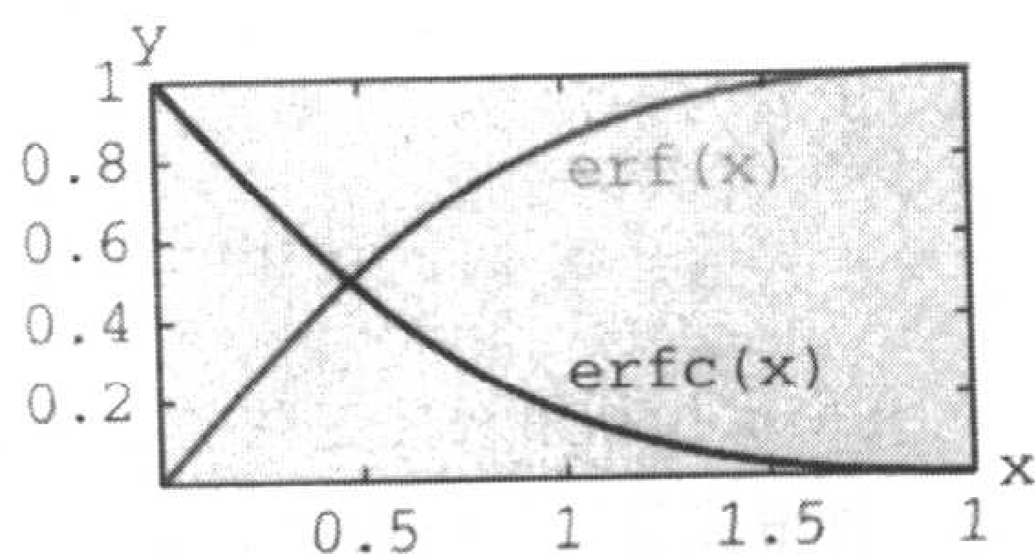


图　14.1

$\mathrm{erf}(x)$和 $\mathrm{erfc}(x)$在 $x\geqslant 0$ 时的图像如图 14.1 所示. 注意到 $\mathrm{erf}(0)=0$，$\mathrm{erfc}(0)=1$，以及随着$x\to+\infty$，$\mathrm{erf}(x)\to$

1，$\text{erfc}(x)\to 0$. 通过 CAS 或表格可得到 $\text{erf}(x)$ 和 $\text{erfc}(x)$ 的其他数值. 在表格中，误差函数通常称为概率积分(probability integral). $\text{erf}(x)$ 和 $\text{erfc}(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 在练习 14.1的习题 11 中，读者需要求出每个函数在此区间上的图像，并推导出一些附带的性质.

拉普拉斯变换表 14.1 对下一节的练习将会非常有用. 这些结果的证明非常复杂，在本教材中省略.

表 14.1

$f(t)$，$a>0$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$	$f(t)$，$a>0$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$
1. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	4. $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-a^2/4t}-a\,\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
2. $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	5. $e^{ab}e^{b^2t}\text{erfc}\left(b\sqrt{t}+\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$
3. $\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	6. $-e^{ab}e^{b^2t}\text{erfc}\left(b\sqrt{t}+\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)+\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{be^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+b)}$

练习 14.1

1. (a)证明 $\text{erf}(\sqrt{t})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau$.

   (b)利用卷积定理以及练习 7.1 中习题 39 和习题 40 的结果证明

$$\mathscr{L}\{\text{erf}(\sqrt{t})\}=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}.$$

2. 利用习题 1 的结果证明

$$\mathscr{L}\{\text{erfc}(\sqrt{t})\}=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right].$$

3. 利用习题 1 的结果证明

$$\mathscr{L}\{e^t\text{erf}(\sqrt{t})\}=\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}.$$

4. 利用习题 2 的结果证明

$$\mathscr{L}\{e^t\text{erfc}(\sqrt{t})\}=\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)}.$$

5. 设 C、G、R 和 x 均为常数. 利用表 14.1 证明

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C}{Cs+G}(1-e^{-x\sqrt{RCs+RG}})\right\}=e^{-Gt/C}\text{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right).$$

6. 设 a 为一常数，证明

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh a\sqrt{s}}{s\sinh\sqrt{s}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\text{erf}\left(\frac{2n+1+a}{2\sqrt{t}}\right)-\text{erf}\left(\frac{2n+1-a}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

   [提示：利用双曲正弦的指数定义. 将 $1/(1-e^{-2\sqrt{s}})$ 以几何级数形式展开.]

7. 利用拉普拉斯变换和表 14.1 求解积分方程

$$y(t)=1-\int_0^t\frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

8. 根据表 14.1 中的第三项和第五项推出第六项.

9. 证明 $\int_a^b e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}[\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)]$.

10. 证明 $\int_{-a}^{a} e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(a)$.

计算机实验作业

11. 函数 erf(x)和 erfc(x)定义在 $x<0$ 上. 利用 CAS 将 erf(x)和 erfc(x)的图像重叠绘在同一坐标系中($-10\leqslant x\leqslant 10$). 这些图像具有什么对称性吗? $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{erf}(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{erfc}(x)$分别是多少?

14.2 拉普拉斯变换的应用

回顾函数 $f(t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

并用 $F(s)$来表示. 两个变量的函数 $u(x,\ t)$关于变量 t 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{u(x,t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}u(x,t)\,dt,$$

其中 x 被视为参数. 我们将沿用使用大写字母表示函数的拉普拉斯变换这一惯例, 记作$\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}=U(x,\ s)$. 在本节中, 我们认为在 7.2~7.4 节中得出的运算性质同样适用于两个变量的函数.

偏导数的变换 偏导数 $\partial u/\partial t$ 的变换可由 7.2 节中(6)的结果类比推出:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=s\,\mathscr{L}\{u(x,t)\}-u(x,0);$$

即

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=sU(x,s)-u(x,0). \tag{1}$$

类似地,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0). \tag{2}$$

由于是关于 t 进行变换, 所以我们进一步假定在变换 $\partial^2 u/\partial^2 x$ 的过程中允许交换积分和微分的符号:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[e^{-st}u(x,t)]dt$$
$$=\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{+\infty} e^{-st}u(x,t)\,dt=\frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x,t)\};$$

即

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\frac{d^2U}{dx^2}. \tag{3}$$

根据(1)和(2), 我们发现拉普拉斯变换适用于带有初始条件的问题, 也就是说, 适用于那些与热传导方程和波动方程有关的问题.

例 1　偏微分方程的拉普拉斯变换

求出波动方程 $a^2(\partial^2 u/\partial x^2)=\partial^2 u/\partial t^2(t>0)$的拉普拉斯变换.

解　由(2)和(3),

$$\mathscr{L}\left\{a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

可写为

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathscr{L}\{u(x,t)\}=s^2\mathscr{L}\{u(x,t)\}-su(x,0)-u_t(x,0)$$

或

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-s^2U=-su(x,0)-u_t(x,0). \tag{4}$$

■

对波动方程或热传导方程进行关于 t 的拉普拉斯变换可以消去该变量，并对一维方程，变换后的方程是空间变量 x 的常微分方程. 在求解变换后的方程时，我们将视 s 为参数.

例 2　利用拉普拉斯变换求解边界值问题

求解 $\partial^2 u/\partial x^2=\partial^2 u/\partial t^2,0<x<1,t>0$,使得 $u(0,t)=0,u(1,t)=0,t>0$,且 $u(x,0)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin\pi x,0<x<1$.

解　该偏微分方程可视为 $a=1$ 时的波动方程. 根据(4)和给出的初始条件，变换后的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-s^2U=-\sin\pi x, \tag{5}$$

其中 $U(x,s)=\mathscr{L}\{u(x,t)\}$. 由于边界条件是 t 的函数，因此必须求出它们的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}\{u(0,t)\}=U(0,s)=0,\mathscr{L}\{u(1,t)\}=U(1,s)=0. \tag{6}$$

(6)中的结果是常微分方程(5)的边界值条件. 由于(5)是定义在有限区间上，它的余函数是

$$U_c(x,s)=c_1\cosh sx+c_2\sinh sx.$$

由待定系数法可得出一个特解

$$U_p(x,s)=\frac{1}{s^2+\pi^2}\sin\pi x.$$

因此

$$U(x,s)=c_1\cosh sx+c_2\sinh sx+\frac{1}{s^2+\pi^2}\sin\pi x.$$

由条件 $U(0,s)=0$ 和 $U(1,s)=0$ 依次可推出 $c_1=0$ 和 $c_2=0$. 最后我们得到

$$U(x,s)=\frac{1}{s^2+\pi^2}\sin\pi x,$$

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\pi^2}\sin\pi x\right\}=\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right\}.$$

因此有

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\sin\pi x\sin\pi t.$$

■

例 3 **利用拉普拉斯变换求解边界值问题**

放在 x 轴非负部分上的半无界弦在开始时处于静止状态．该弦在 $x=0$ 处被固定．而且它的右端远处可在一个光滑的竖直杆上自由滑动．弦在自身重力的作用下向下运动．求出它的位移 $u(x,t)$．

解 由于重力被考虑在内，我们可以证明波动方程的形式如下：

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-g=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},x>0,t>0.$$

边界条件和初始条件分别为

$$u(0,t)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad x>0.$$

第二个边界条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\partial u/\partial x=0$ 表示弦在距离左端远处保持水平．

现在由(2)和(3)，

$$\mathscr{L}\left\{a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}-\mathscr{L}\{g\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

可写为

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-\frac{g}{s}=s^2U-su(x,0)-u_t(x,0),$$

或者，根据初始条件

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-\frac{s^2}{a^2}U=\frac{g}{a^2 s},$$

边界条件的变换为

$$\mathscr{L}\{u(0,t)\}=U(0,s)=0\text{ 和 }\mathscr{L}\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=0.$$

由待定系数法，变换后方程的通解为

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{-(x/a)s}+c_2\mathrm{e}^{(x/a)s}-\frac{g}{s^3}.$$

由边界条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{d}U/\mathrm{d}x=0$ 可推出 $c_2=0$，由 $U(0,s)=0$ 可得到 $c_1=g/s^3$．

所以

$$U(x,s)=\frac{g}{s^3}\mathrm{e}^{-(x/a)s}-\frac{g}{s^3}.$$

现由第二平移定理，我们有

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{g}{s^3}\mathrm{e}^{-(x/a)s}-\frac{g}{s^3}\right\}=\frac{1}{2}g\left(t-\frac{x}{a}\right)^2\mathscr{U}\left(t-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}gt^2$$

或

$$u(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}gt^2, & 0\leqslant t<\dfrac{x}{a}\\ -\dfrac{g}{2a^2}(2axt-x^2) & t\geqslant\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

为了理解这个解的含义，我们假定 $t>0$ 为一固定点．当 $0\leqslant x\leqslant at$ 时，弦的形状是一条通过 $(0,0)$ 和 $(at,-\frac{1}{2}gt^2)$ 的抛物线．当 $x>at$ 时，弦可由水平线 $u=-\frac{1}{2}gt^2$ 描述．请参考

图 14.2. ■

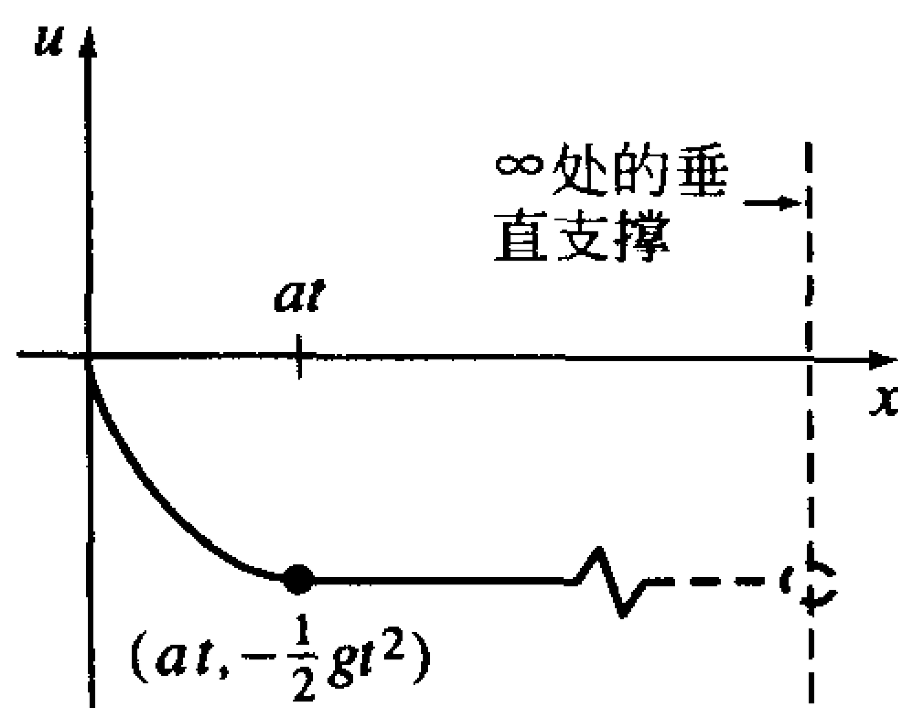


图 14.2

注意到下例中的问题可由 12.6 节中所给的求解过程求解. 拉普拉斯变换给出了解的另外一种形式.

例 4 erf(x)形式的解

求解热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},0<x<1,t>0$$

使得

$$u(0,t)=0,u(1,t)=u_0,t>0,$$
$$u(x,0)=0,0<x<1.$$

解 由(1)和(3)以及题目给出的初始条件,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-sU=0. \tag{7}$$

边界条件的变换为

$$U(0,s)=0 \text{ 和 } U(1,s)=\frac{u_0}{s}. \tag{8}$$

由于我们关心的是 x 轴上的一个有限区间，所以可以将(7)的通解写为

$$U(x,s)=c_1\cosh(\sqrt{s}x)+c_2\sinh(\sqrt{s}x).$$

利用(8)中的两个边界条件可分别得出 $c_1=0$ 和 $c_2=u_0/(s\sinh\sqrt{s})$. 于是

$$U(x,s)=u_0\frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{s\sinh\sqrt{s}}.$$

在大多数表格中无法找到后一函数的逆变换. 然而，通过记为

$$\frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{s\sinh\sqrt{s}}=\frac{e^{\sqrt{s}x}-e^{-\sqrt{s}x}}{s(e^{\sqrt{s}}-e^{-\sqrt{s}})}=\frac{e^{(x-1)\sqrt{s}}-e^{-(x+1)\sqrt{s}}}{s(1-e^{-2\sqrt{s}})}$$

并利用几何级数

$$\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{s}}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n\sqrt{s}}$$

我们可得出

$$\frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{s\sinh\sqrt{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s}-\frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s}\right].$$

如果我们假定可以逐项进行拉普拉斯逆变换，那么由表 14.1 中的第 3 项可推出

$$\begin{aligned}u(x,t)&=u_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{s\sinh\sqrt{s}}\right\}\\&=u_0\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s}\right\}\right]\end{aligned}$$

$$= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}\right) \right]. \tag{9}$$

可以利用 $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$将解改写为误差函数的形式：

$$u(x,t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}\right) \right]. \tag{10}$$

■

用 CAS 中的 3D 作图程序绘制出的图 14.3(a)给出了在长方形区域 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant t \leqslant 6$ 上的曲面，该曲面可由令(10)中 $u_0 = 100$ 的部分和 $S_{10}(x, t)$得到. 由曲面和附带的二维图可明显看出，在某一固定 x 处(在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上垂直于 x 轴的平面与曲面的相交曲线)，随着时间的增加，温度 $u(x, t)$迅速增大到一个常值. 参考图 14.3(b)和 14.3(c). 对某一固定时间点(垂直于 t 轴的平面与曲面的相交曲线)，温度 $u(x, t)$从 0 逐渐增加到 100. 请参考图 14.3(d)和 14.3(e).

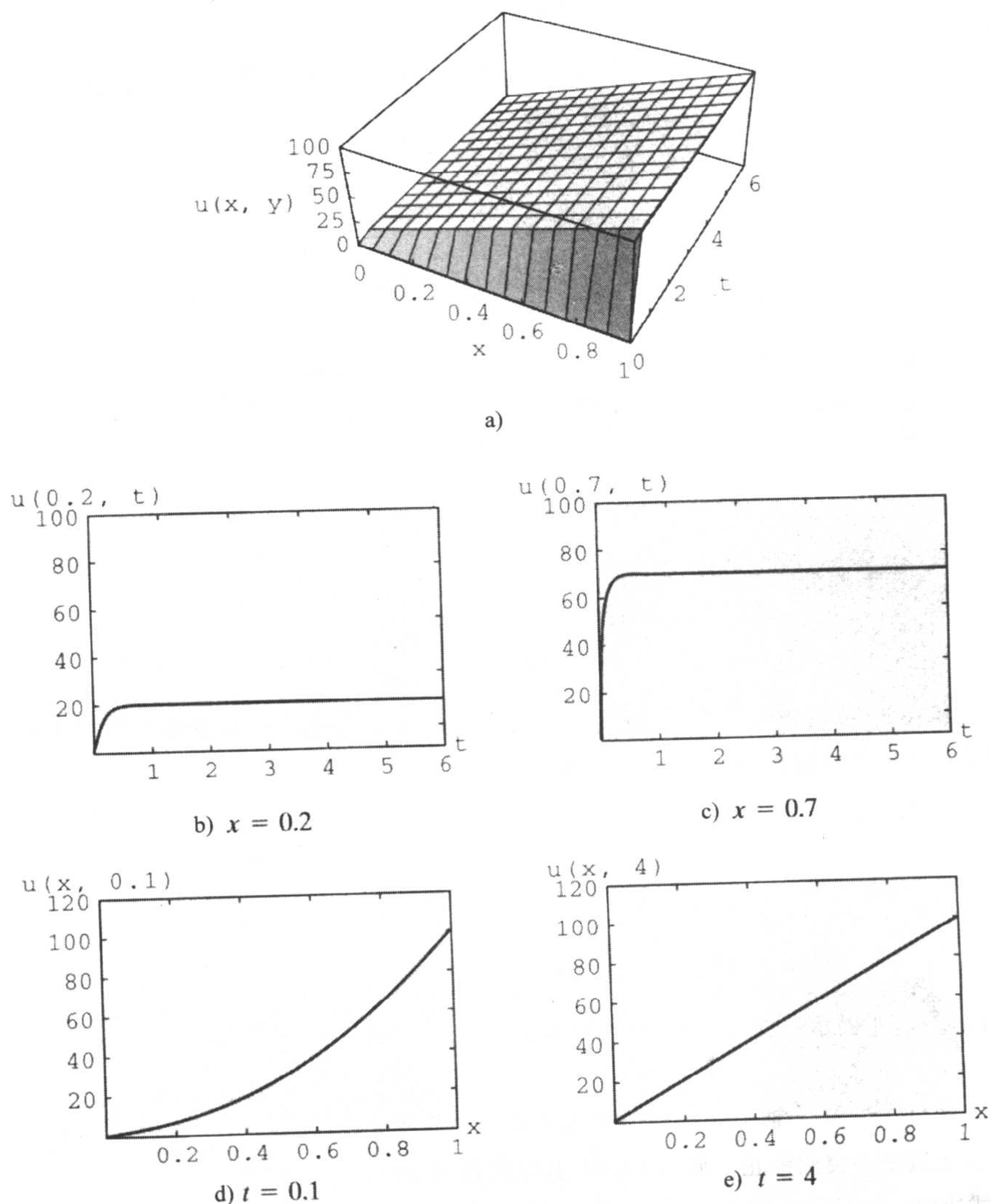


图 14.3

练习 14.2

如果需要的话，在以下的习题中可以使用表格.

1. 沿 x 轴方向在(0，0)和(L，0)之间的弦. 如果初始时弦处于静止状态，初始偏移为 $A\sin(\pi x/L)$，求出偏移 $u(x, t)$.

2. 求解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0<x<1, t>0$$

$$u(0,t)=0, u(1,t)=0$$

$$u(x,0)=0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=2\sin\pi x+4\sin 3\pi x.$$

3. 一条半无穷弹性弦的偏移由下式决定：

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=f(t),\quad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad x>0.$$

求出 $u(x, t)$.

4. 当

$$f(t)=\begin{cases}\sin\pi t, 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, \qquad t>1\end{cases}$$

时，求解习题 3 中的边界值问题. 绘出 $t>1$ 时偏移 $u(x, t)$的图像.

5. 在例 3 中，若弦左端点 $x=0$ 处的运动由振动 $f(t)=A\sin\omega t$ 描述，求出偏移 $u(x, t)$.

6. 一条在外力作用驱使下运动的弦的偏移 $u(x, t)$由下式决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin\pi x\sin\omega t=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0<x<1, t>0$$

$$u(0,t)=0, u(1,t)=0, t>0$$

$$u(x,0)=0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, 0<x<1.$$

求出 $u(x, t)$.

7. 一根匀质棒在 $x=0$ 处被夹紧，且在开始时处于静止. 如果将一常力 F_0施加于其自由端 $x=L$ 处，那么匀质棒横截面的纵向偏移 $u(x, t)$由下式决定：

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<L, t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad E\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=F_0,\quad E\text{ 为常数}, t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad 0<x<L.$$

求解 $u(x, t)$. [提示：将 $1/(1+e^{-2sL/a})$以几何级数形式展开.]

8. 一条以常速度 $-v_0$ 沿 x 轴匀速运动的半无穷弹性匀质棒在 $t=0$ 时撞上墙壁并突然停止. 如图 14.4，其纵向偏移 $u(x, t)$由下式决定：

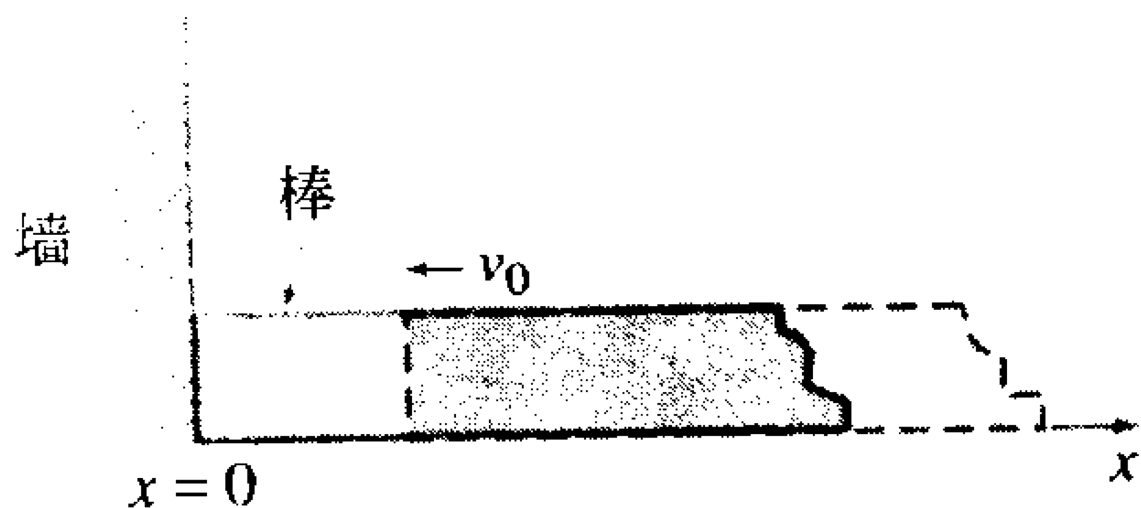


图 14.4

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-v_0,\quad x>0.$$

求出 $u(x,t)$.

9. 求解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=xe^{-x},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad x>0.$$

10. 求解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=1,\quad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=e^{-x},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad x>0.$$

11. (a)描述半无穷固体的内部温度的模型为如下边界值问题：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=u_0,\quad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad x>0.$$

求解 $u(x,t)$. 利用该解分析确定 $\lim_{t\to+\infty}u(x,t)$，$x>0$ 的值.


(b)用 CAS 绘出 $u(x,t)$在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant t\leqslant 15$ 上的图像. 假设 $u_0=100$，$k=1$. 在图上标出两个边界条件和初始条件. 利用 $u(x,t)$的 2D 和 3D 图形证实(a)中所得的答案.

12. (a)在习题 11 中，如果从固体左端边界向其内部注入一股恒定热流，那么边界条件变为 $\partial u/\partial x\,|_{x=0}=-A$，$A>0$，$t>0$. 求解 $u(x,t)$. 利用求得的解分析确定 $\lim_{t\to\infty}u(x,t)$，$x>0$ 的值.


(b)利用 CAS 绘出 $u(x,t)$在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant t\leqslant 15$ 上的图形. 假定 $u_0=100$，$k=1$. 利用 $u(x,t)$的 2D 和 3D 图证实(a)中所得的答案.

在习题 13～20 中，利用拉普拉斯变换求解满足所给条件的热传导方程 $u_{xx}=u_t$，$x>0$，$t>0$.

13. $u(0,t)=u_0$，$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=u_1$
$u(x,0)=u_1$

14. $u(0,t)=u_0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x,t)}{x}=u_1$
$u(x,0)=u_1x$

15. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=u(0,t)$，$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=u_0$
$u(x,0)=u_0$

16. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=u(0,t)-50$，$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0$
$u(x,0)=0$

17. $u(0,t)=f(t)$，$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0$
$u(x,0)=0$

18. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-f(t)$，$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0$
$u(x,0)=0$

[提示：利用卷积定理.]

19. $u(0,\ t)=60+40\,\mathscr{U}(t-2)$，$\lim\limits_{x\to\infty}u(x,\ t)=60$

$u(x,\ 0)=60$

20. $u(0,\ t)=\begin{cases}20, & 0<t<1\\ 0 & t\geqslant 1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to\infty}u(x,\ t)=100$

$u(x,\ 0)=100$

21. 求解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad -\infty<x<1,\quad t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=100-u(1,t),\quad \lim_{x\to-\infty}u(x,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad -\infty<x<1.$$

22. 证明边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r=\frac{\partial u}{\partial t},\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad x>0$$

(其中 r 是一常数)的一个解是

$$u(x,t)=rt-r\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k\tau}}\right)\mathrm{d}\tau.$$

23. 一根长为 L 的杆在其两端 $x=0$ 和 $x=L$ 处保持恒温 u_0. 如果该杆的初始温度为 $u_0+u_0\sin(x\pi/L)$，求解热传导方程 $u_{xx}=u_t$，$0<x<L$，$t>0$ 以得出温度 $u(x,\ t)$.

24. 如果热量从一条长 L 的细线侧面散失到恒温 u_m 的介质中，那么其热传导方程具有如下形式：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_m)=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<L,\quad t>0,$$

其中 h 为一常数. 如果初始温度常数 u_0，两端 $x=0$ 与 $x=L$ 处是绝热的，求出 $u(x,\ t)$.

25. 一根单位长度的杆，$x=0$ 处与外界隔离并且在 $x=1$ 处保持恒温 0 度. 如果杆的初始温度为 u_0，求解方程 $ku_{xx}=u_t$，$0<x<1$，$t>0$ 以得出温度 $u(x,\ t)$. [提示：将 $1/(1+\mathrm{e}^{-2\sqrt{s/k}})$ 以几何级数的形式展开.]

26. 一条具有单位宽度的无穷长多孔平板浸泡在具有恒定浓度 c_0 的溶液中. 溶液中的溶质扩散到平板的内部. 平板中溶液的浓度 $c(x,\ t)$ 由下列式子决定：

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=\frac{\partial c}{\partial t},\quad 0<x<1,\quad t>0$$

$$c(0,t)=c_0,\quad c(1,t)=c_0,\quad t>0$$

$$c(x,0)=0,\quad 0<x<1,$$

其中 D 为一常数. 求出 $c(x,\ t)$.

27. 一条很长的电话传输线在开始时具有常数电势 u_0. 如果该线在 $x=0$ 处接地并且其右端远处与外界隔离，那么 t 时刻线上 x 点处的电势 $u(x,\ t)$ 由下式决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-RC\frac{\partial u}{\partial t}-RGu=0,\quad x>0,\quad t>0$$

$$u(0,t)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=u_0,\quad x>0,$$

其中 R、C 和 G 分别为电阻、电容和传导常数. 求出 $u(x, t)$. [提示：请参考练习 14.1 中的习题 5.]

28. 证明边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu=\frac{\partial u}{\partial t},\quad x>0,\quad t>0$$
$$u(0,t)=u_0,\quad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=0,\quad x>0$$

的一个解是

$$u(x,t)=\frac{u_0 x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-h\tau-x^2/4\tau}}{\tau^{3/2}}\mathrm{d}\tau.$$

29. 人类获取信息大多数是通过视觉和听觉. 但是许多物种却将化学信号作为主要的沟通方式；例如，蜜蜂在受到警告时会释放一种物质并剧烈扑打它们的翅膀来将警告信号传递给保护蜂王的蜂群. 这些在同类成员之间传递的分子信息被称为信息素. 这些信号可以通过多种方式传递：流动的空气或水，或是扩散过程(在扩散过程中，气体分子的随机运动将化学物质送离其原来位置). 图 14.5 描绘了一只蚂蚁向管道内的静止空气释放出具有示警性的化学物质. 如果 $c(x, t)$ 表示化学物质在 t 时刻离初始位置 x cm 处的浓度，那么 $c(x, t)$ 满足

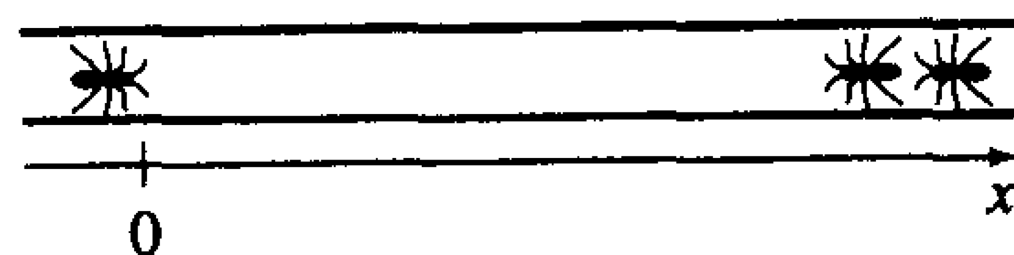


图 14.5

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=\frac{\partial c}{\partial t},\quad x>0,\quad t>0$$

且 k 为一正常数. 对信息素的离散脉冲式的释放使得如下形式的边界条件成立：

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0}=-A\delta(t).$$

(a)如果有 $c(x, 0)=0$，$x>0$ 以及 $\lim_{x\to+\infty}c(x, t)=0$，$t>0$，求解该边界值问题.



(b)利用 CAS 绘出(a)中的解在固定时刻 $t=0.1$，$t=0.5$，$t=1$，$t=2$ 和 $t=5$ 时 $x\geqslant 0$ 的图像.

(c)对任意固定时刻 t，证明 $\int_0^{+\infty}c(x,t)\mathrm{d}x=Ak$. 因此，$Ak$ 表示释放出的化学物质的总量.

30. 从 $t=0$ 时开始，一个集中载荷 F_0 以恒定速度 v_0 沿一半无穷长弦运动. 在这种情况下，波动方程变为

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F_0\delta\left(t-\frac{x}{v_0}\right).$$

求解上述偏微分方程使得

$$u(0,t)=0,\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,t>0$$
$$u(x,0)=0,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,x>0.$$

(a)当 $v_0\neq a$ 时，求解这个微分方程.

(b)当 $v_0=a$ 时，求解这个微分方程.

14.3 傅里叶积分

在第 11 章和第 12 章中，我们利用傅里叶级数来表示定义在有限区间 $(-p, p)$ 或 $(0, L)$ 上的函数 f. 当 f 和 f' 在此区间上分段连续时，可以用傅里叶级数表示该函数并在区间外收敛于 f 的周期性延拓. 在这个意义下，我们可以说傅里叶级数仅与周期函数相关. 我们现在将以一种非严格的方式推导出如何表示定义在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 或半无穷区间 $(0, +\infty)$ 上的

若干类非周期函数.

从傅里叶级数到傅里叶积分 假设函数 f 定义在 $(-p, p)$ 上. 如果我们利用 11.2 节中(9)、(10)和(11)在该节(8)中的系数的积分定义，那么该区间上的 f 的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p}f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t\right)\cos\frac{n\pi}{p}x+\left(\int_{-p}^{p}f(t)\sin\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t\right)\sin\frac{n\pi}{p}x\right]. \tag{1}$$

如果我们令 $\alpha_n=n\pi/p$，$\Delta\alpha=\alpha_{n+1}-\alpha_n=\pi/p$，则(1)变为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-p}^{p}f(t)\mathrm{d}t\right)\Delta\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p}f(t)\cos\alpha_n t\,\mathrm{d}t\right)\cos\alpha_n x+\left(\int_{-p}^{p}f(t)\sin\alpha_n t\,\mathrm{d}t\right)\sin\alpha_n x\right]\Delta\alpha. \tag{2}$$

我们现在令 $p\to+\infty$ 来扩展区间 $(-p,p)$. 由于 $p\to+\infty$ 意味着 $\Delta\alpha\to 0$，(2) 的极限具有形式 $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}F(\alpha_n)\Delta\alpha$，它提示我们如何定义积分 $\int_0^{+\infty}F(\alpha)\mathrm{d}\alpha$. 于是若 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 存在，(2)中第一项的极限为 0 并且其和的极限变为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t\right)\cos\alpha x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,\mathrm{d}t\right)\sin\alpha x\right]\mathrm{d}\alpha. \tag{3}$$

(3)中给出的结果称为 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的傅里叶积分(Fourier integral). 正如随后的总结中所显示的那样，傅里叶积分的基本结构让人联想到傅里叶级数的基本结构.

定义 14.1 傅里叶积分

定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 f 的傅里叶积分(Fourier integral)为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]\mathrm{d}\alpha, \tag{4}$$

其中

$$A(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$$B(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

傅里叶积分的收敛 傅里叶积分收敛于 $f(x)$ 的充分条件与傅里叶级数的条件相似，但限制条件稍微严格一些.

定理 14.1 收敛条件

令 f 和 f' 在有限区间上分段连续，并且 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积[⊖]，那么该区间上 f 的傅里叶积分在连续点处收敛于 $f(x)$. 在间断点处，傅里叶积分收敛于平均值

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

其中 $f(x+)$ 和 $f(x-)$ 分别表示 f 在 x 处的右极限和左极限.

例 1 傅里叶积分表示

用傅里叶积分表示函数

⊖ 这是指积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0<x<2\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

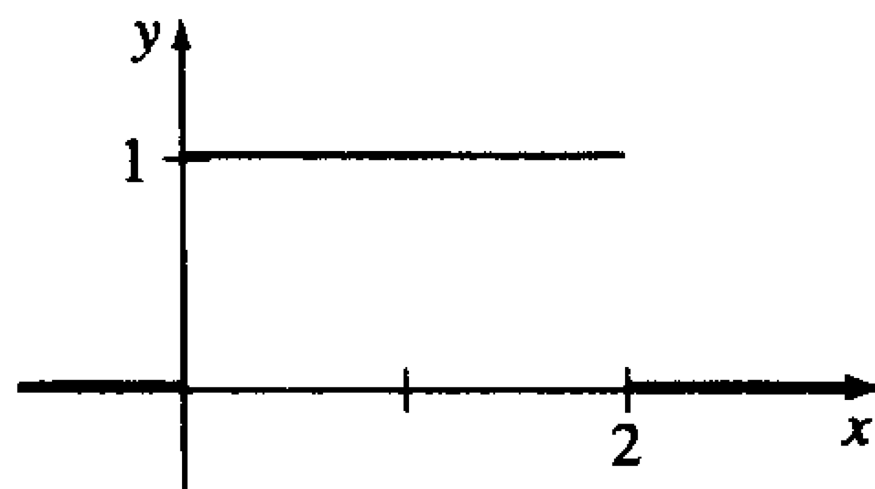


图 14.6

解 该函数(图像为图 14.6)满足定理 14.1 的假设. 于是从(5)和(6)我们马上可以得出

$$\begin{aligned}A(\alpha)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{0}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{2}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin2\alpha}{\alpha},\end{aligned}$$

$$B(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{1-\cos2\alpha}{\alpha},$$

将这些系数代入(4)中可得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin2\alpha}{\alpha}\right)\cos\alpha x+\left(\frac{1-\cos2\alpha}{\alpha}\right)\sin\alpha x\right]\mathrm{d}\alpha.$$

利用三角恒等式，上一积分可以简化为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha(x-1)}{\alpha}\mathrm{d}\alpha. \tag{7}$$

■

傅里叶积分可用于计算积分的值. 例如，在 $x=1$ 处由定理 14.1 可得，(7)收敛于 $f(1)$；也就是说

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

后一结果值得特别关注. 因为它并不能通过一般的方法得到；被积函数$(\sin x)/x$ 并没有初等函数形式的原函数.

余弦和正弦积分 若 f 在区间$(-\infty, +\infty)$上是偶函数，则乘积 $f(x)\cos\alpha x$ 也是偶函数，而 $f(x)\sin\alpha x$ 是奇函数. 作为定理 11.2 中性质(g)的一个结果，$B(\alpha)=0$，因此(4)可以写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t\right)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha.$$

同样，利用定理 11.2 的性质(f)，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t.$$

类似地，若 f 在$(-\infty, +\infty)$上是奇函数，乘积 $f(x)\cos\alpha x$ 与 $f(x)\sin\alpha x$ 分别为奇函数和偶函数. 因此 $A(\alpha)=0$ 并有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,\mathrm{d}t\right)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha.$$

我们在下面的定义中做出总结.

定义 14.2　傅里叶余弦与正弦积分

(i)区间$(-\infty, +\infty)$上偶函数的傅里叶积分为余弦积分(cosine integral)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}A(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha, \tag{8}$$

其中

$$A(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

(ⅱ)区间$(-\infty, +\infty)$上奇函数的傅里叶积分为正弦积分(sine integral)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}B(\alpha)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha, \tag{10}$$

其中

$$B(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

例 2 余弦积分表示

用傅里叶积分表示函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

解 从图 14.7 可明显看出 f 是一偶函数. 于是我们用傅里叶余弦积分(8)来表示 f. 由(9)可以得出

$$\begin{aligned}A(\alpha)&=\int_0^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_0^{a}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{a}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin a\alpha}{\alpha},\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin a\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\mathrm{d}\alpha. \quad ■$$

若 f 既不是奇函数也不是偶函数，且仅定义在半轴$(0, +\infty)$上，则可以利用积分(8)和(10). 在此例中，(8)表示区间$(0, +\infty)$上的 f 及其在$(-\infty, 0)$上的偶(但非周期)延拓，(10)表示$(0, +\infty)$上的 f 及其在$(-\infty, 0)$上的奇延拓. 下面的例子说明了这一概念.

例 3 用余弦与正弦积分表示

表示 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，$x>0$.

(a)用余弦积分 (b)用正弦积分

解 该函数的图像如图 14.8 所示.

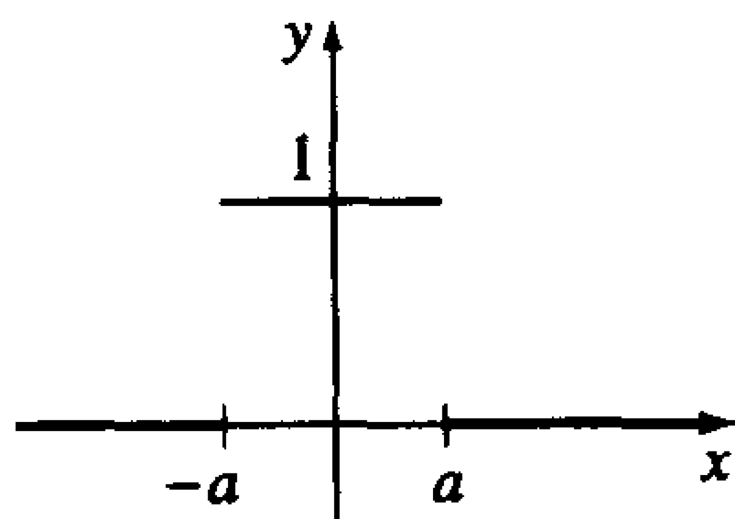


图 14.7

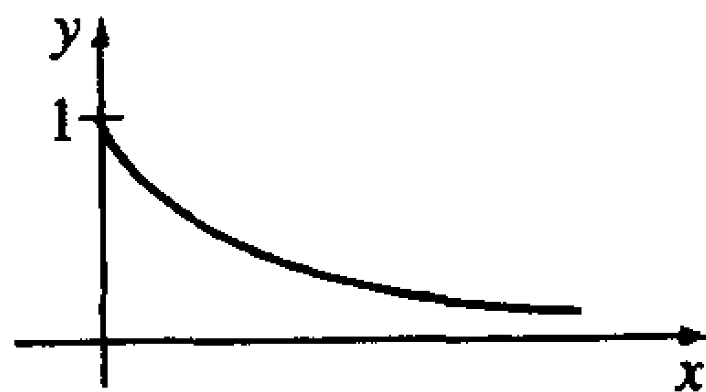


图 14.8

(a)利用分部积分法，我们求出

$$A(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

于是 f 的余弦积分是

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha.$$

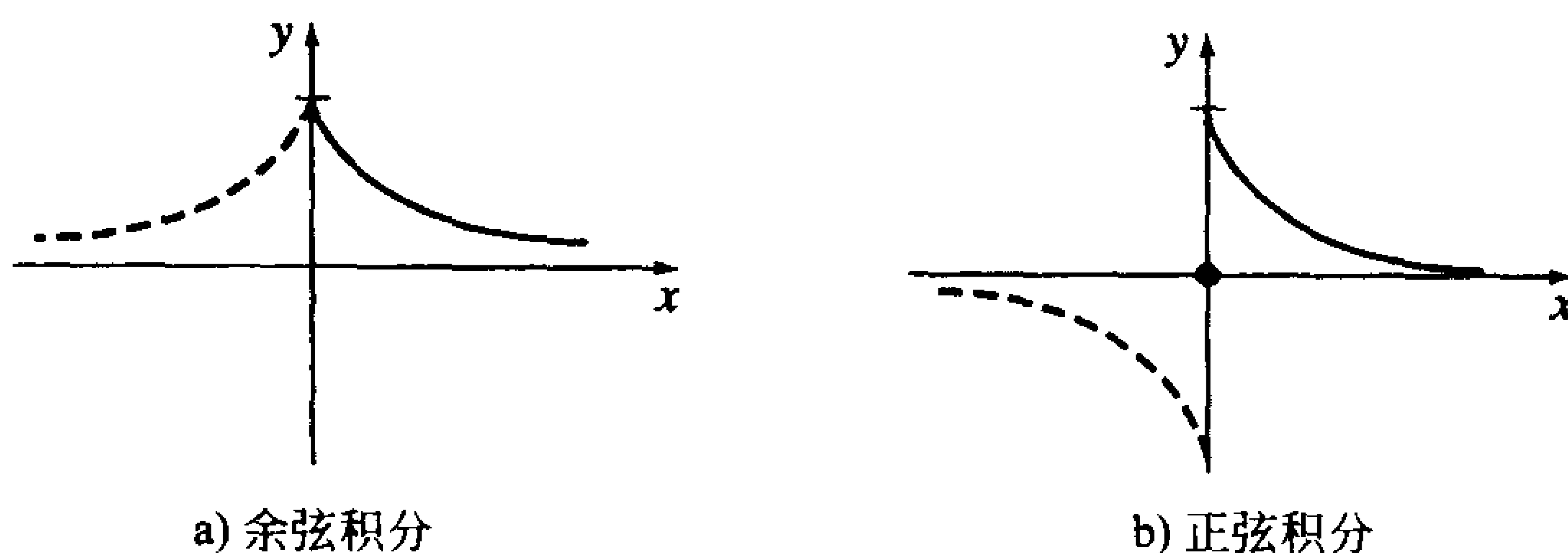
(b)类似地，我们有

$$B(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

于是 f 的正弦积分是

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha.$$

图 14.9 显示了该函数的图像以及用两类积分表示的延拓.



a) 余弦积分　　b) 正弦积分

图 14.9

复数形式　傅里叶积分(4)同样具有等价的复数形式(complex form)或指数形式(exponential form)，这与傅里叶级数的复数形式(请参考练习 11.2 中的习题 21)类似. 如果将(5)与(6)代入(4)，则有

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x]\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha &(12)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\alpha(t-x)+\mathrm{i}\sin\alpha(t-x)]\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha &(13)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha &(14)
\end{aligned}$$

我们注意到(12)可由被积函数是 α 的偶函数这一事实推出. 在(13)中我们仅仅在被积函数中加入了零积分：

$$\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha = 0,$$

因为被积函数是 α 的奇函数. (14)中的积分可表示为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{15}$$

其中

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

在下一节中我们将考察边界值问题的解，届时我们将使用傅里叶积分的后一形式.

练习 14.3

在习题 1～6 中，求出所给函数的傅里叶积分.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ -1, & -1<x<0\\ 2, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}0, & x<\pi\\ 4, & \pi<x<2\pi\\ 0, & x>2\pi\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0<x<3\\ 0, & x>3\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

在习题 7～12 中，用合适的余弦或正弦积分表示所给函数.

7. $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ -5, & -1<x<0\\ 5, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \pi, & 1<|x|<2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$

11. $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}\sin x$

12. $f(x)=x\mathrm{e}^{-|x|}$

在习题 13～16 中，求出所给函数的余弦和正弦积分表示.

13. $f(x)=\mathrm{e}^{-kx}$，$k>0$，$x>0$

14. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}$，$x>0$

15. $f(x)=x\mathrm{e}^{-2x}$，$x>0$

16. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$，$x>0$

在习题 17 和 18 中，求解所给函数 f 的积分方程.

17. $\int_0^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\alpha}$

18. $\int_0^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x = \begin{cases}1, & 0<\alpha<1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}$

19. (a)利用(7)证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

[提示：α 为积分的虚变量.]

(b)一般地，证明对于 $k>0$，下式成立：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin kx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

20. 利用复数形式(15)求出函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 的傅里叶积分表示. 证明该结果与(8)中得到的结果一致.

14.4 傅里叶变换

函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 由积分来定义，但直到现在我们一直在使用符号写法 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ 来表示 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换. 实际上，拉普拉斯逆变换也是一个积分. 若

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t=F(s),\text{则有}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{st}F(s)\mathrm{d}s=f(t).$$

后一积分称为围道积分(contour integral)；对它进行估计需要利用复变量，这已经超出了本书的范围. 问题在于：积分变换以变换对(transform pairs)的方式出现. 若通过积分变换(integral transform) $F(\alpha)=\int_a^b f(x)K(\alpha,x)\mathrm{d}x$ 将 $f(x)$ 变换成 $F(\alpha)$，则也可通过另一积分变换 $f(x)=\int_c^d F(\alpha)H(\alpha,x)\mathrm{d}\alpha$ 将函数 f 复原，该变换称为逆变换(inverse transform). 函数 K 和 H 被称为它们各自变换的核(kernel). 我们将 $K(s,t)=\mathrm{e}^{-st}$ 作为拉普拉斯变换的核，将 $H(s,t)=\mathrm{e}^{st}/2\pi\mathrm{i}$ 作为拉普拉斯逆变换的核.

傅里叶变换对 傅里叶积分是三类积分变换的来源. 由前一节的(16)～(15)、(11)～(10)和(9)～(8)，我们给出下列傅里叶变换对(Fourier transform pair)的定义.

定义 14.3 傅里叶变换对

(i) 傅里叶变换： $$\mathscr{F}\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x=F(\alpha) \tag{1}$$

傅里叶逆变换： $$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha=f(x) \tag{2}$$

(ii) 傅里叶正弦变换： $$\mathscr{F}_s\{f(x)\}=\int_0^{\infty}f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x=F(\alpha) \tag{3}$$

傅里叶正弦逆变换： $$\mathscr{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F(\alpha)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha=f(x) \tag{4}$$

(iii) 傅里叶余弦变换： $$\mathscr{F}_c\{f(x)\}=\int_0^{\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=F(\alpha) \tag{5}$$

傅里叶余弦逆变换： $$\mathscr{F}_c^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha=f(x) \tag{6}$$

存在性 (1)、(3)和(5)存在的条件比拉普拉斯变换存在的条件更为严格. 例如，读者可以证明 $\mathscr{F}\{1\}$、$\mathscr{F}_s\{1\}$ 和 $\mathscr{F}_c\{1\}$ 不存在. 存在性的充分条件是，f 在适当区间上绝对可积并且 f 和 f' 在有限区间上分段连续.

运算性质 由于我们的首要目标是要将这些新的变换用于求解边界值问题，所以我们需要考察导数的变换.

傅里叶变换 假定 f 连续，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积并且 f' 在有限区间上分段连续. 若当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to0$，则由分部积分可得

$$\mathscr{F}\{f'(x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x$$

$$= f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \mathrm{i}\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\mathrm{i}\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}x;$$

即

$$\mathscr{F}\{f'(x)\} = -\mathrm{i}\alpha F(\alpha). \tag{7}$$

类似地，若另外假设 f' 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在有限区间上分段连续，并且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f'(x)\to 0$，我们有

$$\mathscr{F}\{f''(x)\} = (-\mathrm{i}\alpha)^2\mathscr{F}\{f(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha). \tag{8}$$

认识到正弦和余弦变换并不适合于用来变换一阶导数(或者，由于同样的原因，任何奇数阶导数)是很重要的. 容易证明

$$\mathscr{F}_s\{f'(x)\} = -\alpha\,\mathscr{F}_c\{f(x)\},\ \mathscr{F}_c\{f'(x)\} = \alpha\,\mathscr{F}_s\{f(x)\} - f(0).$$

困难显而易见；$f'(x)$ 的变换并不是用原积分变换表示的.

傅里叶正弦变换 假定 f 和 f' 连续，f 在区间 $[0,\ +\infty)$ 上绝对可积，并且 f'' 在有限区间上分段连续. 若当 $x\to+\infty$ 时 $f\to 0$，$f'\to 0$，那么

$$\mathscr{F}_s\{f''(x)\} = \int_0^{+\infty} f''(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$$

$$= f'(x)\sin\alpha x\,\Big|_0^{+\infty} - \alpha\int_0^{+\infty} f'(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\alpha\left[f(x)\cos\alpha x\,\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \alpha f(0) - \alpha^2\mathscr{F}_s\{f(x)\};$$

即

$$\mathscr{F}_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) + \alpha f(0). \tag{9}$$

傅里叶余弦变换 在使得(9)成立的同样假设下，我们可以求出 $f''(x)$ 的傅里叶余弦变换为

$$\mathscr{F}_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) - f'(0). \tag{10}$$

一个很自然而然的问题是"我们怎么知道对于一个给定的边界值问题该用哪一种变换?"，很明显，要利用傅里叶变换的话，待消去变量的定义域必须是 $(-\infty,\ +\infty)$. 要利用正弦或余弦变换的话，问题中至少要有一个变量的定义域必须是 $[0,\ +\infty)$. 但是选择用正弦变换还是余弦变换的决定性因素是在零点处边界条件的类型.

在接下来的例子中，若没有特别指明，我们将假定当 $x\to\pm\infty$ 时 u 和 $\partial u/\partial x$(或 $\partial u/\partial y$)都趋近于 0. 由于在大多数情况下这些条件均成立，所以这并不是主要的限制.

例 1 使用傅里叶变换

求解热传导方程 $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$，$-\infty < x < +\infty$，$t > 0$ 使得

$$u(x,0) = f(x),\quad \text{其中 } f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

解 该问题可以解释为求无限长杆的温度 $u(x,\ t)$. 由于 x 的定义域为无穷区间 $(-\infty,\ +\infty)$，我们利用傅里叶变换(1)，并定义

$$\mathscr{F}\{u(x,t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{i\alpha x}dx=U(\alpha,t).$$

如果我们变换该偏微分方程并利用(8)式，

$$\mathscr{F}\left\{k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

可以得到

$$-k\alpha^2 U(\alpha,t)=\frac{dU}{dt}\text{ 或 }\frac{dU}{dt}+k\alpha^2 U(\alpha,t)=0.$$

求解上一方程得到 $U(\alpha,\ t)=ce^{k\alpha^2 t}$. 现在初始条件的变换为

$$\mathscr{F}\{u(x,0)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=\int_{-1}^{1}u_0\ e^{i\alpha x}dx=u_0\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i\alpha}.$$

这一结果与 $U(\alpha,0)=2u_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 等价. 将这一条件代入解 $U(\alpha,\ t)$，可得 $U(\alpha,\ 0)=c=(2u_0\sin\alpha)/\alpha$，因此有

$$U(\alpha,t)=2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}.$$

于是由逆积分(2)可得

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}\ e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

利用欧拉公式 $e^{-i\alpha x}=\cos\alpha x-i\sin\alpha x$ 可将上一表达式做一些简化，并且注意到由于被积函数是 α 的奇函数，所以有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}\sin\alpha x\,d\alpha=0$. 因此，我们最后有

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}d\alpha. \tag{11}$$

■

请读者证明，解(11)可以用误差函数表示. 请参考练习 14.4 中的习题 4.

例 2　使用余弦变换

在半无穷平面中，稳定状态的温度由下式决定：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,0<x<\pi,y>0,$$
$$u(0,y)=0,u(\pi,y)=e^{-y},y>0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,0<x<\pi.$$

求出 $u(x,\ y)$.

解　变量 y 的定义域和 $y=0$ 处所给的条件表明傅里叶余弦变换适用于这个问题. 我们定义

$$\mathscr{F}_c\{u(x,y)\}=\int_0^{+\infty}u(x,y)\cos\alpha y\,dy=U(x,\alpha).$$

根据(10)，

$$\mathscr{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}+\mathscr{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}\mathscr{F}_c\{0\}$$

可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - \alpha^2 U(x,\alpha) - u_y(x,0) = 0 \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - \alpha^2 U = 0.$$

由于 x 的定义域是有限区间，我们可将常微分方程的解写为

$$U(x,\alpha) = c_1 \cosh\alpha x + c_2 \sinh\alpha x. \tag{12}$$

现有$\mathscr{F}_c\{u(0, y)\}=\mathscr{F}_c\{0\}$和$\mathscr{F}_c\{u(\pi, y)\}=\mathscr{F}_c\{\mathrm{e}^{-y}\}$依次等价于

$$U(0,\alpha) = 0, U(\pi,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

如果我们使用后面的条件，由解(12)可得出 $c_1=0$ 以及 $c_2=1/[(1+\alpha^2)\sinh\alpha\pi]$. 因此

$$U(x,\alpha) = \frac{\sinh\alpha x}{(1+\alpha^2)\sinh\alpha\pi},$$

所以由(6)我们可得

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sinh\alpha x}{(1+\alpha^2)\sinh\alpha\pi}\cos\alpha y\,\mathrm{d}\alpha. \tag{13}$$

■

如果在例 2 中给出的是 $u(x, 0)$而不是 $u_y(x, 0)$，那么正弦变换将更合适.

练习 14.4

在习题 1～21 中，利用本节的傅里叶积分变换求解所给的边界值问题. 在必要时做有关边界的假设.

1. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$

   $u(x, 0)=\mathrm{e}^{-|x|}$, $-\infty<x<\infty$

2. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$

$$u(x, 0)=\begin{cases}0, & x<-1\\ -100, & -1<x<0\\ 100, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

3. 利用结果$\mathscr{F}\{\mathrm{e}^{-x^2/4p^2}\}=2\sqrt{\pi}p\mathrm{e}^{-p^2\alpha^2}$求边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, -\infty < x < \infty, t > 0$$
$$u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}, -\infty < x < \infty.$$

4. (a)若$\mathscr{F}\{f(x)\}=\mathscr{F}(\alpha)$且$\mathscr{F}\{g(x)\}=G(\alpha)$，则傅里叶变换的卷积定理(convolution theorem)为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\mathrm{d}\tau = \mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\}.$$

   利用这一结果和 $\mathscr{F}\{\mathrm{e}^{-x^2/4p^2}\}=2\sqrt{\pi}p\mathrm{e}^{-p^2\alpha^2}$ 证明边界值问题

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, -\infty < x < \infty, t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty$$

   的一个解是

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-(x-\tau)^2/4kt}\mathrm{d}\tau.$$

(b)利用变量替换 $u=(x-\tau)/2\sqrt{kt}$ 和练习 14.1 中的习题 9 证明例 1 的解是

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{kt}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$


(c)设 $u_0=100$，$k=1$. 利用CAS绘出 $u(x,t)$在矩形区域 $-4\leqslant x\leqslant 4$，$0\leqslant t\leqslant 6$ 上的图形. 利用2D程序将 $u(x,t)$在 $t=0.05, 0.125, 0.5, 1, 2, 4, 6, 15$，区间 $-4\leqslant x\leqslant 4$ 上的图形绘在同一坐标系下. 利用这些图形推测出 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$和 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)$的值. 然后利用 $\operatorname{erf}(x)$的性质用解析的方法证明这些结果.

5. 若 $u(0,t)=u_0$，$t>0$，$u(x,0)=0$，$x>0$，求出半无穷长杆的温度 $u(x,t)$.

6. 利用结果 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2},x>0$ 证明习题5的解可写为

$$u(x,t)=u_0-\frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\mathrm{e}^{-k\alpha^2 t}\mathrm{d}\alpha.$$

7. 若 $u(0,t)=0$，$t>0$ 且

$$u(x,0)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

求出半无穷长杆的温度 $u(x,t)$.

8. 若左端边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-A,t>0,$$

其中 A 是一常数，求解习题5.

9. 如果 $x=0$ 处是绝热的，求解习题7.

10. 如果 $u(0,t)=1$，$t>0$，$u(x,0)=\mathrm{e}^{-x}$，$x>0$，求出半无穷杆的温度 $u(x,t)$.

11. (a)$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$-\infty<x<\infty$，$t>0$

$u(x,0)=f(x)$，$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x)$，$-\infty<x<\infty$.

(b)若 $g(x)=0$，证明(a)部分中的答案可改写为 $u(x,t)=1/2[f(x+at)+f(x-at)]$.

12. 如果

$$u(0,t)=0,t>0,$$
$$u(x,0)=x\mathrm{e}^{-x},\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,x>0.$$

求出半无界弦的位移 $u(x,t)$.

13. 如果将 $x=0$ 和 $x=\pi$ 处的边界条件对调：$u(0,y)=\mathrm{e}^{-y}$，$u(\pi,y)=0$，$y>0$，求解例2中的问题.

14. 如果在 $y=0$ 处的边界条件为 $u(x,0)=1$，$0<x<\pi$，求解例2中的问题.

15. 如果边界 $x=0$ 绝热，在 $y=0$ 处有

$$u(x,0)=\begin{cases}50, & 0<x<1\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

求出由 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 定义的平面的稳定温度.

16. 如果在 $x=0$ 处的边界条件为 $u(0,y)=0$，$y>0$，求解习题15.

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$x>0$，$0<y<2$

$u(0,y)=0$，$0<y<2$

$u(x,0)=f(x)$，$u(x,2)=0$，$x>0$

18. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$0<x<\pi$，$y>0$

$u(0, y)=f(y)$，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0$，$y>0$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$0<x<\pi$

在习题 19 和 20 中，求出图中所给平面的稳定温度．[提示：一种求解的方法是将习题 19 和 20 分别表示为两个边界值和三个边界值问题．利用叠加原理(请参考 12.5 节).]

19.

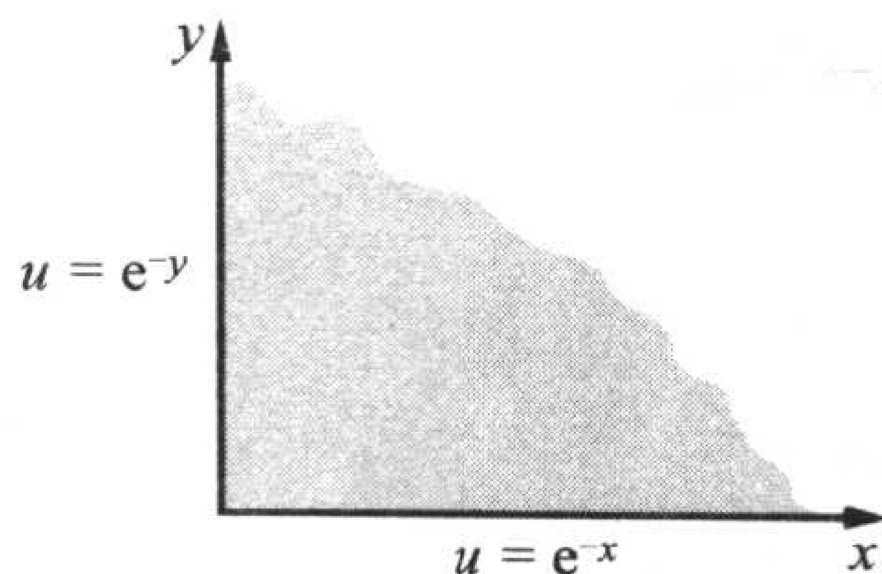


图 14.10

20.

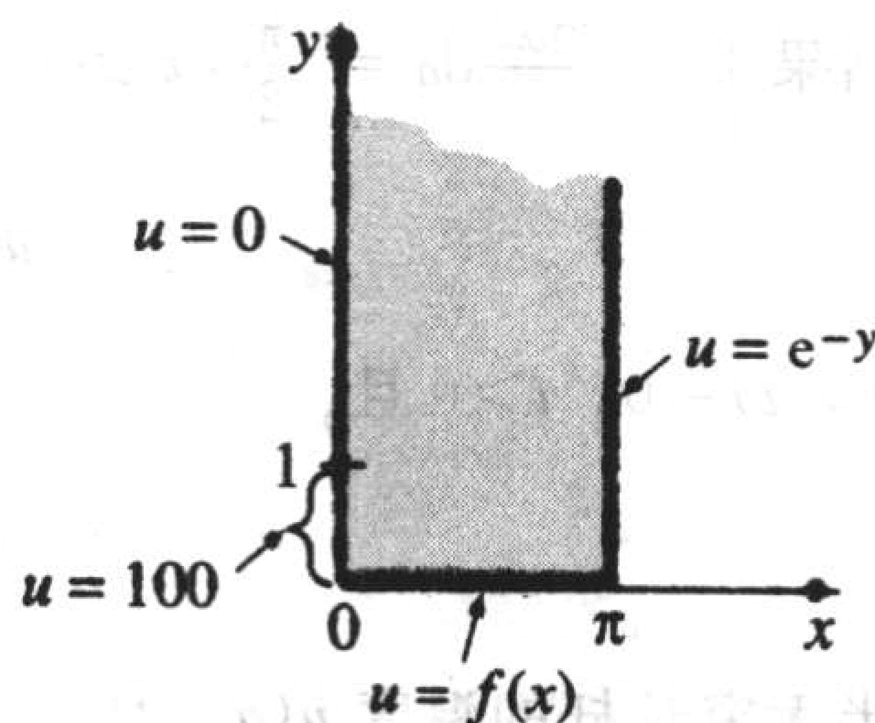


图 14.11

21. 利用习题 3 中所给的变换 $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\}$ 求出如图 14.12 所示的无穷带的稳定温度.

22. 习题 16 的解可以被积分．利用附录 C 中表格的第 42 项和 43 项证明

$$u(x,y)=\frac{100}{\pi}\left[\arctan\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{y}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{y}\right].$$

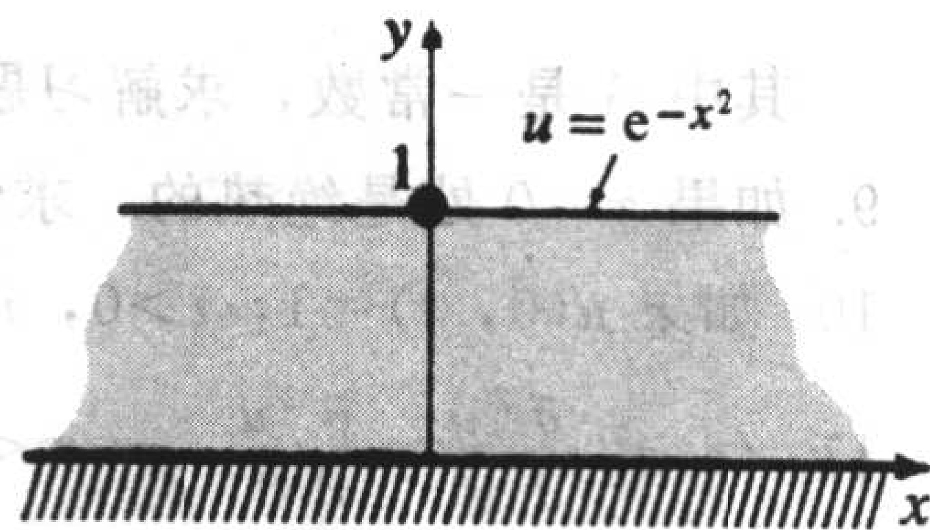


图 14.12

第 14 章复习题

在习题 1～13 中，利用适当的积分变换求解所给的边界值问题．在必要时做出有关边界的假设.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$x>0$，$0<y<\pi$

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，$0<y<\pi$

$u(x, 0)=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi}=e^{-x}$，$x>0$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$，$0<x<1$，$t>0$

$u(0, t)=0$，$u(1, t)=0$，$t>0$

$u(x, 0)=50\sin 2\pi x$，$0<x<1$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu=\frac{\partial u}{\partial t}$，$h>0$，$x>0$，$t>0$

$u(0, t)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$t>0$

$u(x, 0)=u_0$，$x>0$

4. $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-|x|}$，$-\infty<x<\infty$，$t>0$

$u(x, 0)=0$，$-\infty<x<\infty$

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$，$x>0$，$t>0$

$u(0, t)=t$，$\lim\limits_{x\to\infty}u(x, t)=0$

$u(x, 0)=0$，$x>0$[提示：利用定理 7.9.]

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$0<x<1$，$t>0$

$u(0, t)=0$，$u(1, t)=0$，$t>0$

$u(x, 0)=\sin\pi x$，$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-\sin\pi x$，$0<x<1$

7. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$-\infty<x<\infty$，$t>0$

$$u(x,\ 0)=\begin{cases}0, & x<0\\ u_0, & 0<x<\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$0<x<\pi$，$y>0$

$$u(0,\ y)=0,\quad u(\pi,\ y)=\begin{cases}0, & 0<y<1\\ 1, & 1<y<2\\ 0, & y>2\end{cases}$$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$0<x<\pi$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$x>0$，$y>0$

$$u(0,\ y)=\begin{cases}50, & 0<y<1\\ 0, & y>1\end{cases}$$

$$u(x,\ 0)=\begin{cases}100, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$0<x<1$，$t>0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，$u(1,\ t)=0$，$t>0$

$u(x,\ 0)=0$，$0<x<1$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$x>0$，$0<y<\pi$

$u(0,\ y)=A$，$0<y<\pi$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi}=Be^{-x}$，$x>0$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$0<x<1$，$t>0$

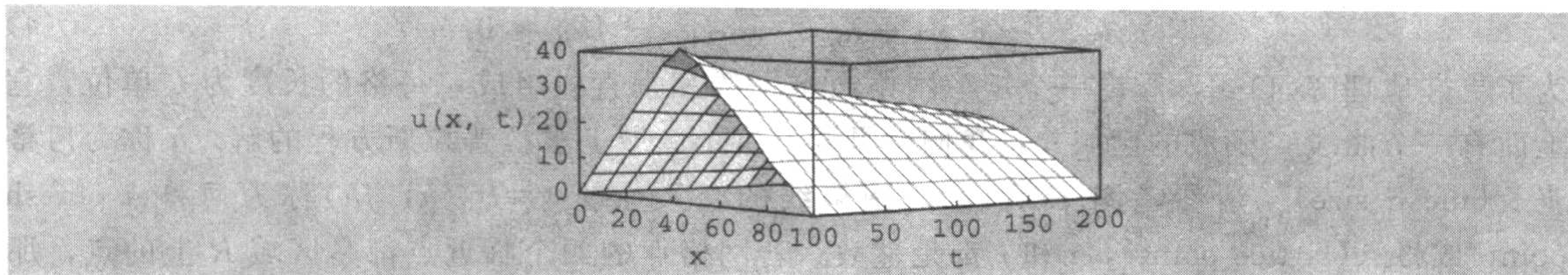
$u(0,\ t)=u_0$，$u(1,\ t)=u_0$，$t>0$

$u(x,\ 0)=0$，$0<x<1$

[提示：利用恒等式 $\sinh(x-y)=\sinh x\cdot\cosh y-\cosh x\cdot\sinh y$，再利用练习 14.1 中的习题 6.]

13. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$-\infty<x<\infty$，$t>0$

$$u(x,\ 0)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$$



热传导方程的解；见练习 15.2 习题 6(d)

第 15 章　偏微分方程的数值解

在 9.5 节中，我们看到求二阶边界值问题近似解的一个方法是用有限差分方程代替常微分方程. 构造差分方程的方法是用差商代替导数 y''和 y'. 把同样的思想应用于包含偏微分方程的边界值问题中. 在本章的各节中，我们将用差分方程代替拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程，即用差商代替偏导数 u_{xx}、u_{yy}、u_{tt} 和 u_t.

15.1　椭圆型方程

利用 9.5 节导出的差商，我们可以很容易用差分方程代替线性二阶偏微分方程. 在接下来的讨论中，我们把焦点集中在椭圆型偏微分方程上，如拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

用差分方程代替拉普拉斯方程　如果 u 是双变量 x 和 y 的函数，那么我们可以构造两个中心差分

$$u(x+h,\ y)-2u(x,\ y)+u(x-h,\ y) \text{和} u(x,\ y+h)-2u(x,\ y)+u(x,\ y-h).$$

然后由 9.5 节的(6)式可知，对二阶偏导数 u_{xx} 和 u_{yy} 的差商近似为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)], \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)]. \tag{2}$$

把(1)和(2)相加，我们可得拉普拉斯算子的*五格点近似法*(five-point approximation)：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)-4u(x,y)].$$

因此我们可以用差分方程

$$u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)-4u(x,y)=0 \tag{3}$$

代替拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

如果我们使用记号 $u(x,\ y)=u_{ij}$ 和

$$u(x+h,y)=u_{i+1,j},u(x,y+h)=u_{i,j+1},$$
$$u(x-h,y)=u_{i-1,j},u(x,y-h)=u_{i,j-1},$$

那么(3)式可以写为

$$u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}=0. \tag{4}$$

为了更好地理解(4)式，假设一个矩形网格由水平线和垂直线组成，每格的长度为 h 单位，它上面有一个曲线 C 围成的区域 R，我们就是要在这个区域上求拉普拉斯方程的解. h 称为网格步长(mesh size). 请参考图 15.1(a). 网格线的交叉点 $P_{ij}=P(ih, jh)$ 称为**网格点**(mesh point)或**格点**(lattice point)，i 和 j 都是整数. 若网格点的四个临近点都是区域 R 上的点，那么我们称这个网格点为**内点**(interior point). R 或 C 上不是内点的点称为**边界点**(boundary point). 例如，在图 15.1(a)中，我们有

$$P_{20}=P(2h, 0),\ P_{11}=P(h, h),\ P_{21}=P(2h, h),\ P_{22}=P(2h, 2h),$$

等等. 在这些点中，P_{21} 和 P_{22} 是内点，P_{20} 和 P_{11} 是边界点. 在图 15.1(a)中，内点是灰色的点，而边界点是黑色的点. 由(4)我们可以看到

$$u_{ij}=\frac{1}{4}[u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}], \tag{5}$$

因此，正如图 15.1(b)所示，u_{ij} 在 R 的内部网格点上的值是 u 在其四个临近点上值的均值. 内点的四个临近点 $P_{i+1,j}$、$P_{i,j+1}$、$P_{i-1,j}$ 和 $P_{i,j-1}$ 分别从对应的东、北、西、南四个方向包围着它.

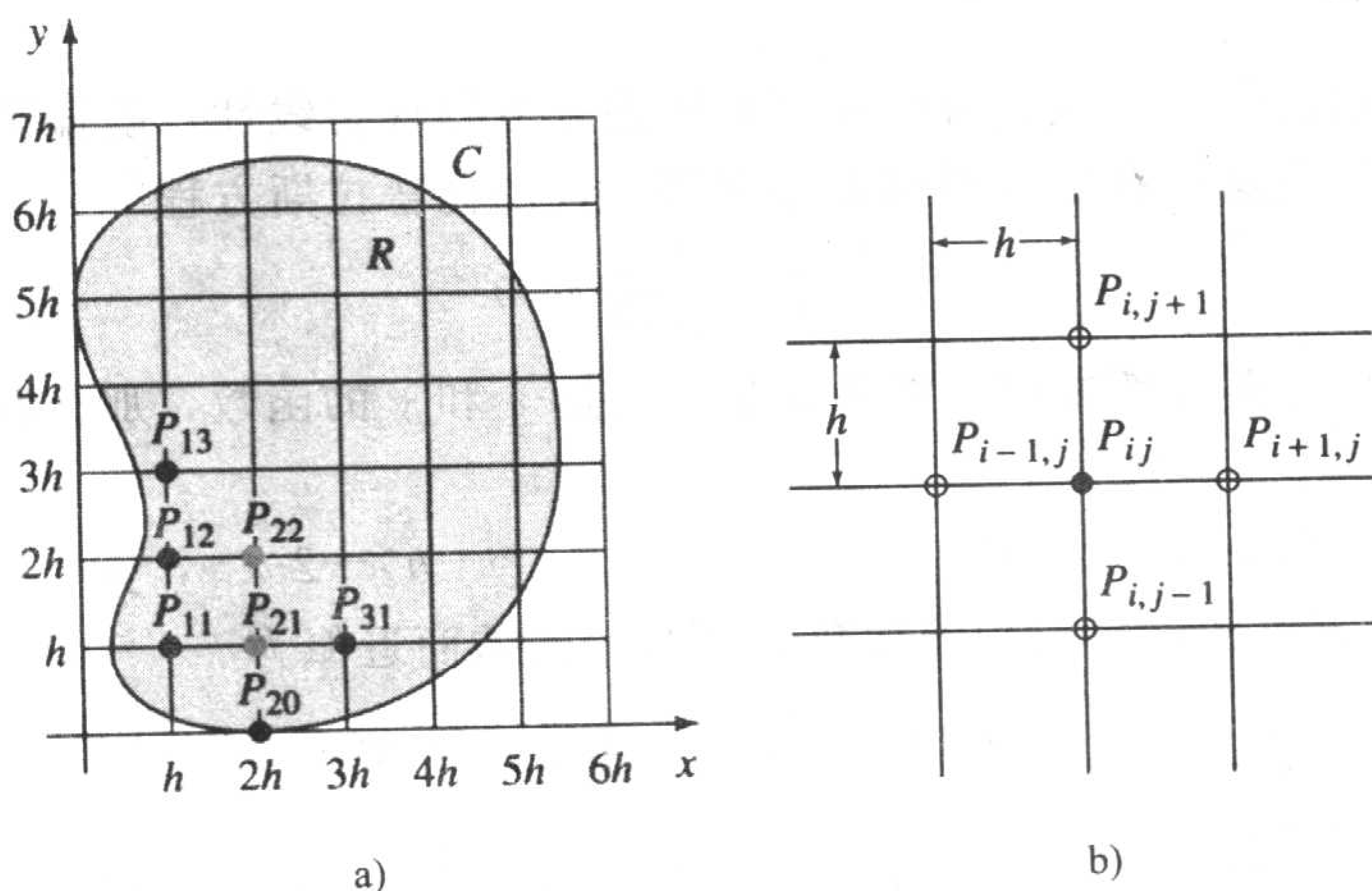


图 15.1

狄利克雷问题 在拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$ 的狄利克雷问题(Dirichlet problem)中，$u(x, y)$是区域 R 边界上的值. 这个问题的基本思想是在内点上用差分方程(4)代替偏微分方程，以此求出拉普拉斯方程在这些点上的近似解. 因此 u 在网格点上的近似值，即 u_{ij}，是相互关联的，如果是边界上的网格点就可以直接知道 u 的值. 用这种方法，我们可以得到一个线性代数方程组，从中可以解出未知量 u_{ij}. 接下来的例子说明了如何在一个方形区域上应用这种方法.

例 1 **边界值问题**

在练习 12.5 的习题 16 中，要求读者用叠加原理解边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<2,\quad 0<y<2,$$

$$u(0,y)=0,\quad u(2,y)=y(2-y),\quad 0<y<2,$$

$$u(x,0)=0,\quad u(x,2)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

为了使用数值方法来解这个问题，我们先令网格的步长为 $h=2/3$. 正如我们在图 15.2 中所看到的，这种选择可以使我们得到四个内点和八个边界点. 边界点的精确 u 值可以从所给的边界条件中解出. 例如，在 $P_{31}=P(3h, h)=P(2, 2/3)$ 处，我们有 $x=2$，$y=2/3$，因此由条件 $u(2, y)$ 可得 $u(2, 2/3)=2/3\cdot(2-2/3)=8/9$. 类似地，由在 $P_{13}=P(2/3, 2)$ 处的条件 $u(x, 2)$ 得到 $u(2/3, 2)=2/3$. 现在我们对内点应用(4)式. 例如，在 P_{11} 点处，我们有 $i=1$，$j=1$，因此(4)可以写为

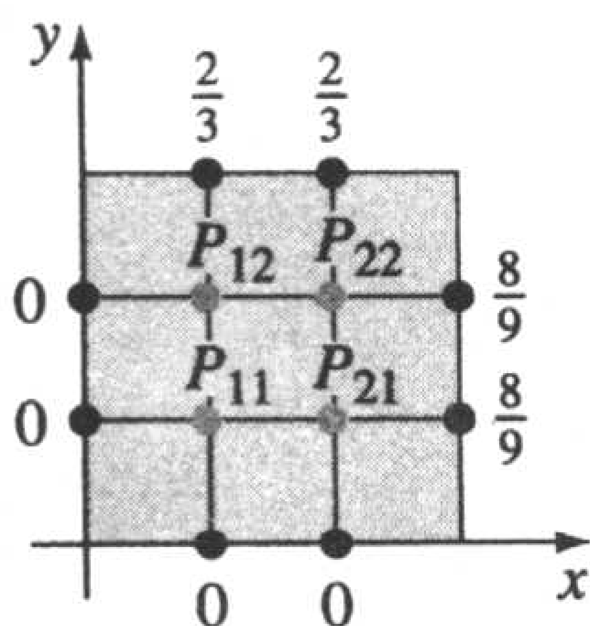


图　15.2

$$u_{21}+u_{12}+u_{01}+u_{10}-4u_{11}=0.$$

因为 $u_{01}=u(0, 2/3)=0$，$u_{10}=u(2/3, 0)=0$，所以前述方程变为 $-4u_{11}+u_{21}+u_{12}=0$. 在 P_{21}、P_{12} 和 P_{22} 处重复这个过程，依次可以得到另外三个方程：

$$\begin{aligned}-4u_{11}+u_{21}+u_{12}&=0,\\ u_{11}-4u_{21}+u_{22}&=-\frac{8}{9},\\ u_{11}-4u_{12}+u_{22}&=-\frac{2}{3},\\ u_{21}+u_{12}-4u_{22}&=-\frac{14}{9}.\end{aligned}\tag{6}$$

用计算机代数系统解这个方程组，可以求出在四个内点处的近似值为

$$u_{11}=\frac{7}{36}=0.194\,4,\quad u_{21}=\frac{5}{12}=0.416\,7,\quad u_{12}=\frac{13}{36}=0.361\,1,\quad u_{22}=\frac{7}{12}=0.583\,3.$$

■

和常微分方程的讨论一样，我们希望用更小的 h 值来改进近似的精确度. 然而，用更小的网格步长意味着会产生更多的内格点，相应地会增大方程组的规模. 对一个边长为 L 的方形区域来说，$h=L/n$ 的网格步长总共会产生 $(n-1)^2$ 个内格点. 在例 1 中，$n=8$，网格步长为 $h=2/8=1/4$ 比较合理，内格点的数目为 $(8-1)^2=49$. 因此我们有含有 49 个未知变量的 49 个方程. 在下个例子中，我们使用的网格步长为 $h=1/2$.

例 2　在例 1 中使用更多的网格格点

正如我们在图 15.3 中所看到的，令例 1 中的方形区域 $n=4$，网格步长 $h=2/4=1/2$，可得到 $3^2=9$ 个内网格点. 在这些点处应用(4)式，并把给定的边界条件代入，我们可以得到含有九个未知量的九个方程. 读者可以证明这些结果，这里给出方程组未简化的形式：

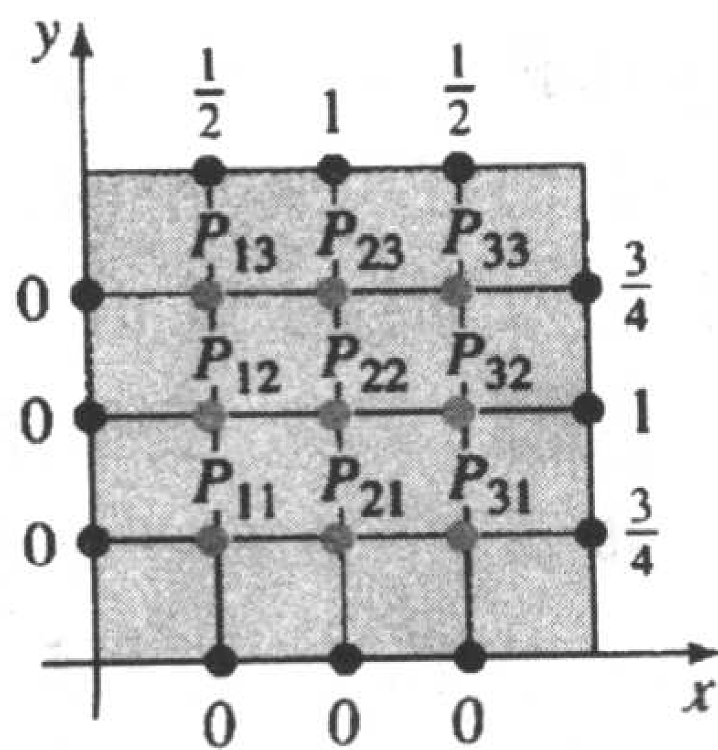


图　15.3

$$u_{21}+u_{12}+0+0-4u_{11}=0,$$

$$u_{31}+u_{22}+u_{11}+0-4u_{21}=0,$$

$$\frac{3}{4}+u_{32}+u_{21}+0-4u_{31}=0,$$

$$u_{22}+u_{13}+u_{11}+0-4u_{12}=0,$$

$$u_{32}+u_{23}+u_{12}+u_{21}-4u_{22}=0,\tag{7}$$
$$1+u_{33}+u_{22}+u_{31}-4u_{32}=0,$$
$$u_{23}+\frac{1}{2}+0+u_{12}-4u_{13}=0,$$
$$u_{33}+1+u_{13}+u_{22}-4u_{23}=0,$$
$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+u_{23}+u_{32}-4u_{33}=0.$$

用 CAS 可得

$$u_{11}=\frac{7}{64}=0.109\ 4,\quad u_{21}=\frac{51}{224}=0.227\ 7,\quad u_{31}=\frac{177}{448}=0.395\ 1,$$
$$u_{12}=\frac{47}{224}=0.209\ 8,\quad u_{22}=\frac{13}{32}=0.406\ 3,\quad u_{32}=\frac{135}{224}=0.602\ 7,$$
$$u_{13}=\frac{145}{448}=0.323\ 7,\quad u_{23}=\frac{131}{224}=0.584\ 8,\quad u_{33}=\frac{39}{64}=0.609\ 4.$$ ■

简化(7)式后，有趣的是系数的 9×9 矩阵为

$$\begin{pmatrix}-4&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&-4&1&0&1&0&0&0&0\\0&1&-4&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&-4&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&-4&1&0&1&0\\0&0&1&0&1&-4&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&-4&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&-4&1\\0&0&0&0&0&1&0&1&-4\end{pmatrix}.\tag{8}$$

这是一个稀疏矩阵(sparse matrix)，因为矩阵中相当多的元素都为零. 矩阵(8)也是一种带状矩阵(banded matrix). 这种矩阵的特征是主对角线以及与主对角线平行的对角线上的元素非零.

高斯-赛德尔迭代法 凡是求偏微分方程近似解的问题无一例外都会产生大规模的线性代数方程组. 解一个含有数百个方程组成的方程组是很平常的事情. 尽管直接求解的方法如高斯消元法保留了矩阵带外所有的零元素，但是它在带之间填充了非零元素. 因为储存大规模矩阵需要使用大容量的计算机存储器，所以一般在实际中用间接法求解大规模方程组. 一种流行的间接法称为高斯-赛德尔迭代法(Gauss-Seidel iteration).

我们将用(6)中的方程组来说明这种方法. 出于简化的缘故，我们分别用 x_1、x_2、x_3和 x_4 来代替双下标变量 u_{11}、u_{21}、u_{12}和 u_{22}.

例 3 **高斯-赛德尔迭代法**

步骤 1：在每一个方程中解出方程组主对角线上的变量. 也就是从(6)中的第一个方程解出 x_1，从第二个方程解出 x_2，依此类推：

$$x_1=0.25x_2+0.25x_3,$$
$$x_2=0.25x_1+0.25x_4+0.222\ 2,$$

$$x_3 = 0.25x_1 + 0.25x_4 + 0.1667, \tag{9}$$
$$x_4 = 0.25x_2 + 0.25x_3 + 0.3889.$$

这些方程可以通过对内格点应用(5)式而不是(4)式来直接得到.

步骤 2：迭代. 首先我们要先给 x_1、x_2、x_3 和 x_4 赋初值. 如果只是一个线性方程组并且我们对于解的情况一无所知，那么我们开始时要令 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$，$x_4=0$. 但是因为(9)的解表示边界值问题的近似解，所以使用所有边界条件的平均值作为初值 $x_1=u_{11}$，$x_2=u_{21}$，$x_3=u_{12}$，$x_4=u_{22}$ 是合理的. 在这种情况下，如图 15.2 所示，八个边界点数值的平均值近似等于 0.4. 因此我们所赋的初值为 $x_1=0.4$，$x_2=0.4$，$x_3=0.4$，$x_4=0.4$. 高斯-赛德尔迭代法使用的 x 值是前一步的计算结果. 注意到(9)中的第一个方程仅依赖于 x_2 和 x_3；因此把 $x_2=0.4$ 和 $x_3=0.4$ 代入后可得 $x_1=0.2$. 因为第二和第三个方程依赖于 x_1 和 x_4，我们使用刚才计算得到的 $x_1=0.2$ 和 $x_4=0.4$ 可得 $x_2=0.3722$ 和 $x_3=0.3167$. 第四个方程依赖于 x_2 和 x_3，因此用刚才得到的 $x_2=0.3722$ 和 $x_3=0.3167$ 可得 $x_4=0.5611$. 概括说来，第一次迭代得到

$$x_1 = 0.2, x_2 = 0.3722, x_3 = 0.3167, x_4 = 0.5611.$$

注意这些值和例 1 结束部分给出的精确值已经非常接近了.

第二次迭代开始时，把 $x_2=0.3722$ 和 $x_3=0.3167$ 代入第一个方程. 这可以得到 $x_1=0.1722$. 由 $x_1=0.1722$ 和最后一次计算得到的 x_4(即 $x_4=0.5611$)以及第二和第三个方程依次可得 $x_2=0.4055$ 和 $x_3=0.3500$. 用这两个值，可以从第四个方程中求出 $x_4=0.5678$. 第二次迭代结束后，我们得到

$$x_1 = 0.1722, x_2 = 0.4055, x_3 = 0.3500, x_4 = 0.5678.$$

第三到第七次迭代的结果在表 15.1 中给出.

表　15.1

迭代	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次
x_1	0.188 9	0.193 1	0.194 1	0.194 4	0.194 4
x_2	0.413 9	0.416 0	0.416 5	0.416 6	0.416 6
x_3	0.358 4	0.360 5	0.361 0	0.361 1	0.361 1
x_4	0.582 0	0.583 0	0.583 3	0.583 3	0.583 3

■

注　为了把高斯-赛德尔迭代法应用于一般的由 n 个线性方程组成的方程组(含有 n 个未知变量)，变量 x_i 必须出现在方程组的第 i 个方程中. 此外，从每个方程中解出 x_i 后，$i=1, 2, \cdots, n$，所得到的方程组具有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上所有元素为零.

注　(ⅰ)在本节所给的例子中，u_{ij} 的值可以用 u 在边界点处的已知值求出. 但若区域 R 的边界点和区域 R 的实际边界 C 不重合时我们该怎么做? 这种情况下，可以用插值法求解.

(ⅱ)有时可以根据对称性减少方程组中方程的个数. 考虑一个如图 15.4 所示的矩形区域. 边界条件为在 $x=0$、$x=2$ 和 $y=1$ 处 $u=0$，在 $y=0$ 处 $u=100$.

这个区域关于 $x=1$ 和 $y=1/2$ 是对称的，内网格点 P_{11} 和 P_{31} 到临近的边界点是等距的，并且在这些边界点处 u 值是相等的．因此，我们设 $u_{11}=u_{31}$，所以含有三个未知量的三个方程组成的方程组可以化为含有两个未知量的两个方程．请参考练习 15.1 的习题 2.

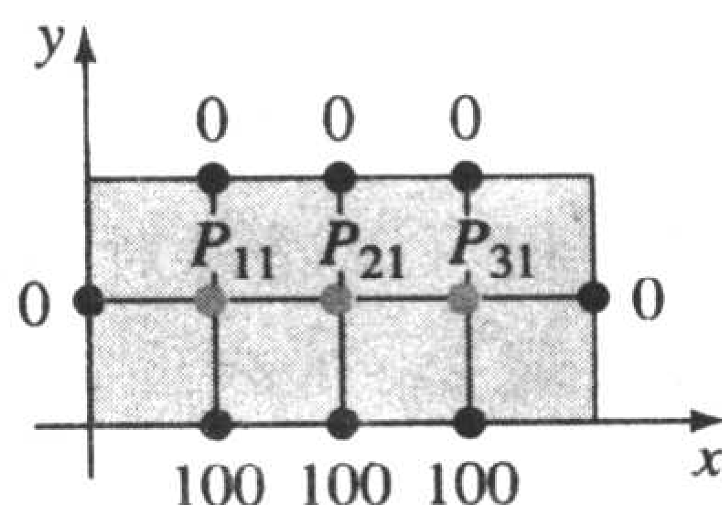


图　15.4

(ⅲ)在介绍求拉普拉斯方程近似解的过程中，如例 3 所示的迭代法经常称为 Liebman 方法.

(ⅳ)尽管在计算机上不明显，但是高斯-赛德尔迭代法或 Liebman 方法的收敛速度不是很快．或者在更多的情况下，高斯-赛德尔迭代法可能根本不收敛．请读者自行在数值分析的教科书中查阅有关高斯-赛德尔迭代法收敛的充分条件.

练习 15.1

在习题 1～8 中，利用计算机进行计算.

在习题 1～4 中，用(4)求拉普拉斯方程在给定区域上内点处的近似解．如果有可能，尽量利用对称性.

1. $u(0,\ y)=0$，$u(3,\ y)=y(2-y)$，$0<y<2$

   $u(x,\ 0)=0$，$u(x,\ 2)=x(3-x)$，$0<x<3$

   网格步长：$h=1$

2. $u(0,\ y)=0$，$u(2,\ y)=0$，$0<y<1$

   $u(x,\ 0)=100$，$u(x,\ 1)=0$，$0<x<2$

   网格步长：$h=\frac{1}{2}$

3. $u(0,\ y)=0$，$u(1,\ y)=0$，$0<y<1$

   $u(x,\ 0)=0$，$u(x,\ 1)=\sin\pi x$，$0<x<1$

   网格步长：$h=\frac{1}{3}$

4. $u(0,\ y)=108y^2(1-y)$，$u(1,\ y)=0$，$0<y<1$

   $u(x,\ 0)=0$，$u(x,\ 1)=0$，$0<x<1$

   网格步长：$h=\frac{1}{3}$

在习题 5 和 6 中，利用(5)和高斯-赛德尔迭代法求拉普拉斯方程在单位平方区域上内点的近似解．网格步长为 $h=1/4$．在习题 5 中，边界条件已给出；在习题 6 中，u 在边界点处的值如图 15.5 所示.

5. $u(0,\ y)=0$，$u(1,\ y)=100y$，$0<y<1$

   $u(x,\ 0)=0$，$u(x,\ 1)=100x$，$0<x<1$

6.

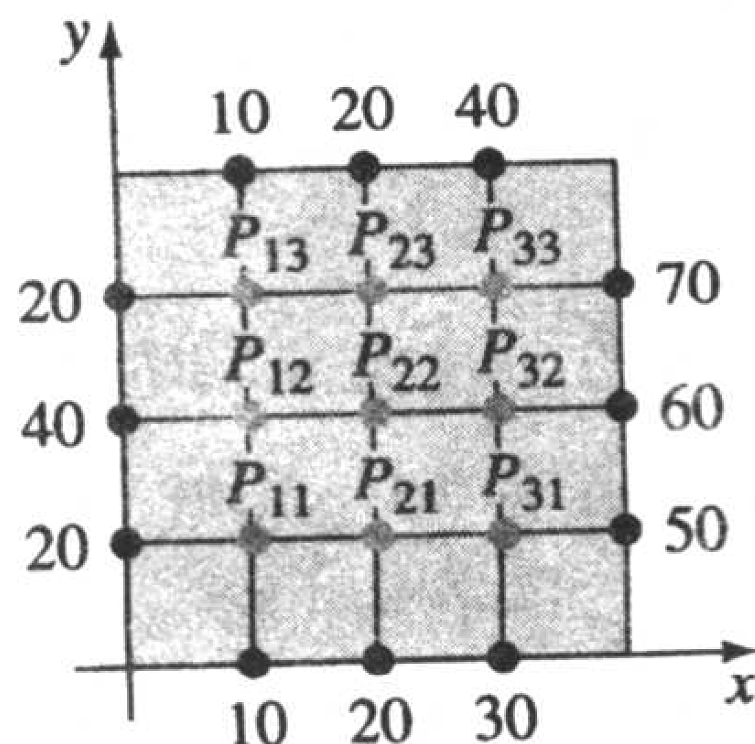


图　15.5

7. (a)在练习 12.6 的习题 12 中，用特殊形式的泊松方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ 可以求解势能问题. 证明代替泊松方程的差分方程为

$$u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}=h^2 f(x,y).$$

(b)利用(a)中的结果求泊松方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$ 在图 15.6 所示区域内点上的近似解. 网格步长为$h=1/2$，在沿 $ABCD$ 的每个点上都有 $u=1$，在沿 $DEFGA$ 的每个点上都有 $u=0$. 利用对称性求解，如果必要也可以使用高斯–赛德尔迭代法.

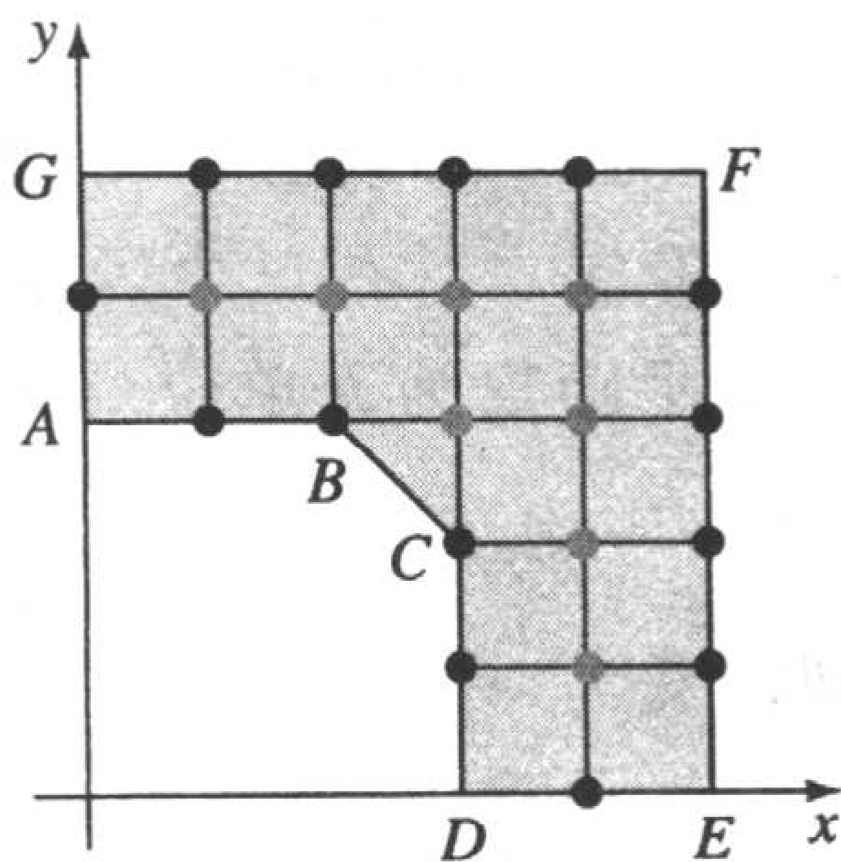


图 15.6

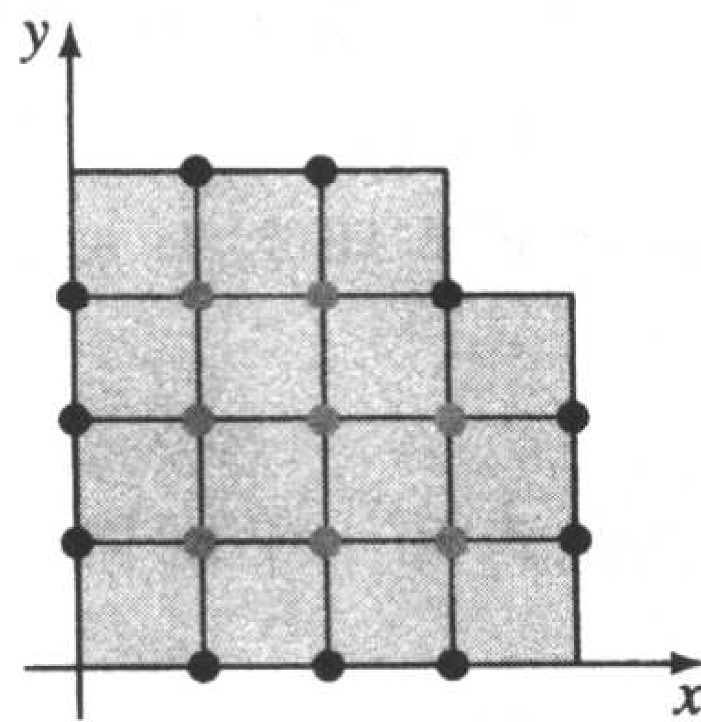


图 15.7

8. 利用习题 7 中(a)所得到的结果求泊松方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-64$ 在图 15.7 所示区域内点上的近似解. 网格步长 $h=1/8$，在区域的每个边界点处 $u=0$. 若有必要可以利用高斯–赛德尔迭代法.

15.2 抛物型方程

在本节中，我们介绍两种求解下面类型的边界值问题近似解的方法：

$$\begin{aligned}&c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<a,t>0,\\&u(0,t)=T_1,\quad u(a,t)=T_2,\quad t>0,\\&u(x,0)=f(x),\quad 0<x<a.\end{aligned}\tag{1}$$

这个问题中的方程是一维热传导方程，并且是我们在 12.1 节中所介绍的抛物型偏微分方程. 前面讲过，f 可以看作是一个匀质杆上从 $x=0$ 到 $x=a$ 的初始温度分布. 常数 T_1 和 T_2 表示杆端点的温度. 这里我们不加证明地认为，当 f 在闭区间$[0, a]$上是连续的时候，边界值问题有唯一解. 这个条件将被用到，因此，我们用 $u(x, 0)=f(x)$，$0\leqslant x\leqslant a$ 代替(1)中的初始条件.

用差分方程代替热传导方程 为了求(1)的近似解，我们先用差分方程来代替热传导方程. 利用 15.1 节中的中心差分(1)，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)],$$

以及由 9.5 节的前向差分(3)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{1}{k}[u(x,t+k)-u(x,t)],$$

因此我们可以用下面的差分方程来代替热传导方程 $c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$：

$$\frac{c}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)]=\frac{1}{k}[u(x,t+k)-u(x,t)].\tag{2}$$

若令 $\lambda=ck/h^2$，以及

$$u(x,t)=u_{ij},u(x+h,t)=u_{i+1,j},u(x-h,t)=u_{i-1,j},u(x,t+k)=u_{i,j+1},$$

则(2)简化后可以写为

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1-2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j}. \tag{3}$$

我们希望在 xt 平面的一个矩形区域上求出问题(1)的近似解，这个矩形区域定义为 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant t\leqslant T$，对某个时间 T 成立. 在这个区域上，我们绘出一个矩形网格，这些网格的每个格子垂直距离为 h 单位，水平距离为 k 单位. 如果我们选取两个正整数 n 和 m，并定义

$$h = \frac{a}{n} \text{ 和 } k = \frac{T}{m},$$

那么垂直和水平网格线分别定义为

$$x_i = ih, \quad i = 0,1,2,\cdots,n, \quad t_j = jk, \quad j = 0,1,2,\cdots,m.$$

请参考图 15.8.

如图 15.9 所示，这个方法的基本思想是利用公式(3)计算解 $u(x, t)$在这些点处的近似值，计算第 $j+1$ 个时间线仅用到第 j 个时间线的值. 例如，第一条时间线上的值($j=1$)依赖于给定的在零时间线上的初始条件 $u_{i,0}=u(x_i, 0)=f(x_i)$. 这种数值方法称为显式有限差分法(explicit finite difference method).

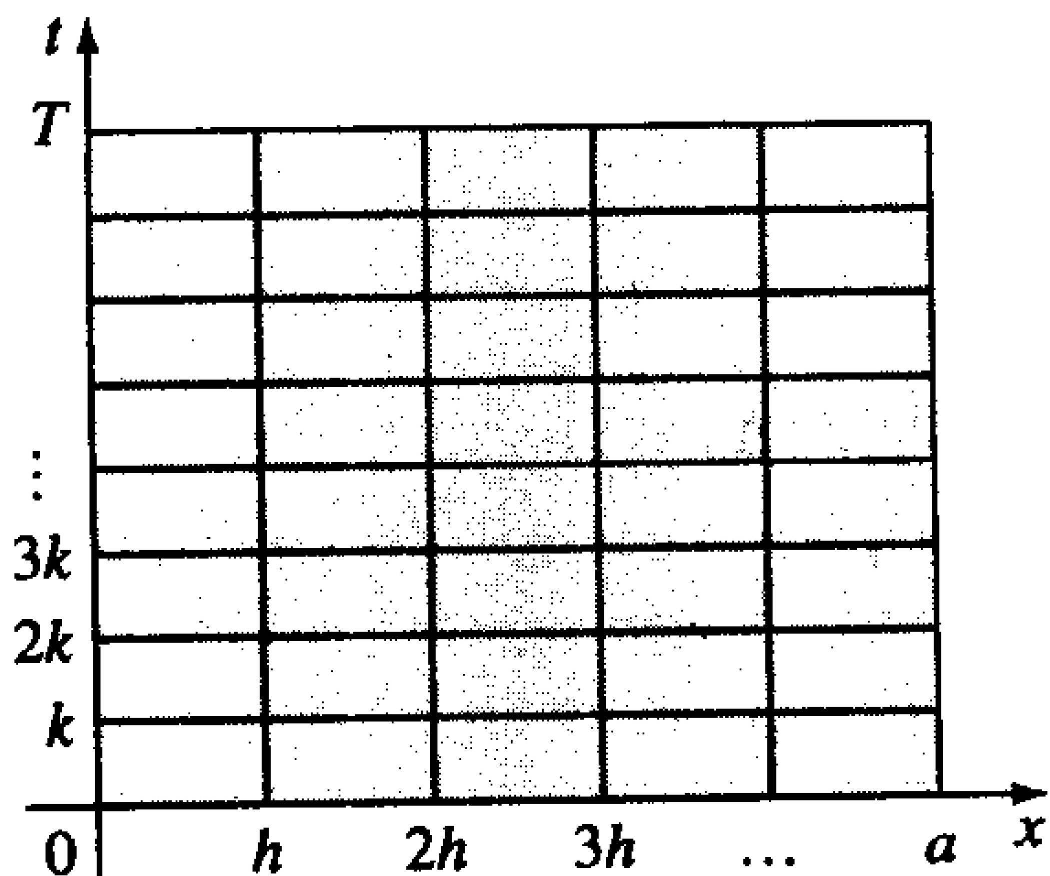


图 15.8

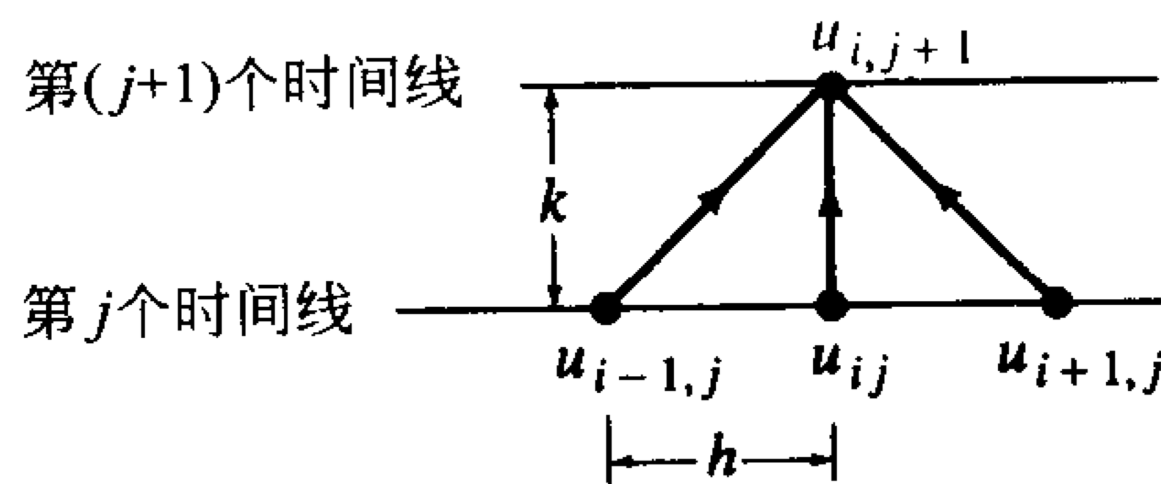


图 15.9

例 1 有限差分法的使用

考虑边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.5$$

$$u(x,0) = \sin\pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

首先，我们可以看出 $c=1$，$a=1$，$T=0.5$. 如果我们选择 $n=5$ 和 $m=50$，那么 $h=1/5=0.2$，$k=0.5/50=0.01$，$\lambda=0.25$，

$$x_i = i\frac{1}{5}, \quad i = 0,1,2,3,4,5 \text{ 以及 } t_j = j\frac{1}{100}, \quad j = 0,1,2,\cdots,50.$$

因此，(3)可以写为

$$u_{i,j+1} = 0.25(u_{i+1,j} + 2u_{ij} + u_{i-1,j}).$$

令这个公式中的 $j=0$，则我们可以得到第一条时间线上温度 u 的近似值公式：

$$u_{i,1} = 0.25(u_{i+1,0} + 2u_{i,0} + u_{i-1,0}).$$

如果令这个方程中的 $i=1$，…，4，那么我们依次可以得到

$$u_{11} = 0.25(u_{20} + 2u_{10} + u_{00}),$$

$$u_{21} = 0.25(u_{30} + 2u_{20} + u_{10}),$$
$$u_{31} = 0.25(u_{40} + 2u_{30} + u_{20}),$$
$$u_{41} = 0.25(u_{50} + 2u_{40} + u_{30}).$$

第一个方程可以写为

$$u_{11} = 0.25(u(x_2,0) + 2u(x_1,0) + u(0,0))$$
$$= 0.25(u(0.4,0) + 2u(0.2,0) + u(0,0)).$$

由初始条件 $u(x, 0) = \sin \pi x$ 可得这条时间线上的 u 值为

$$u_{11} = 0.25(0.951\,056\,516 + 2(0.587\,785\,252) + 0) = 0.531\,656\,755.$$

这个数值是温度 $u(0.2, 0.01)$ 的近似值.

余下的计算在表 15.2 中给出.

表 15.2 显式差分方程的近似值，$h=0.2$，$k=0.01$，$\lambda=0.25$

时间	$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$	时间	$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$
0.00	0.587 8	0.951 1	0.951 1	0.587 8	0.26	0.043 2	0.070 0	0.070 0	0.043 2
0.01	0.531 7	0.860 2	0.860 2	0.531 7	0.27	0.039 1	0.063 3	0.063 3	0.039 1
0.02	0.480 9	0.778 1	0.778 1	0.480 9	0.28	0.035 4	0.057 2	0.057 2	0.035 4
0.03	0.435 0	0.703 8	0.703 8	0.435 0	0.29	0.032 0	0.051 8	0.051 8	0.032 0
0.04	0.393 4	0.636 6	0.636 6	0.393 4	0.30	0.028 9	0.046 8	0.046 8	0.028 9
0.05	0.355 9	0.575 8	0.575 8	0.355 9	0.31	0.026 2	0.042 4	0.042 4	0.026 2
0.06	0.321 9	0.520 8	0.520 8	0.321 9	0.32	0.023 7	0.038 3	0.038 3	0.023 7
0.07	0.291 1	0.471 1	0.471 1	0.291 1	0.33	0.021 4	0.034 7	0.034 7	0.021 4
0.08	0.263 3	0.426 1	0.426 1	0.263 3	0.34	0.019 4	0.031 3	0.031 3	0.019 4
0.09	0.238 2	0.385 4	0.385 4	0.238 2	0.35	0.017 5	0.028 4	0.028 4	0.017 5
0.10	0.215 4	0.348 6	0.348 6	0.215 4	0.36	0.015 9	0.025 6	0.025 6	0.015 9
0.11	0.194 9	0.315 3	0.315 3	0.194 9	0.37	0.014 3	0.023 2	0.023 2	0.014 3
0.12	0.176 3	0.285 2	0.285 2	0.176 3	0.38	0.013 0	0.021 0	0.021 0	0.013 0
0.13	0.159 4	0.258 0	0.258 0	0.159 4	0.39	0.011 7	0.019 0	0.019 0	0.011 7
0.14	0.144 2	0.233 3	0.233 3	0.144 2	0.40	0.010 6	0.017 2	0.017 2	0.010 6
0.15	0.130 4	0.211 1	0.211 1	0.130 4	0.41	0.009 6	0.015 5	0.015 5	0.009 6
0.16	0.118 0	0.190 9	0.190 9	0.118 0	0.42	0.008 7	0.014 0	0.014 0	0.008 7
0.17	0.106 7	0.172 7	0.172 7	0.106 7	0.43	0.007 9	0.012 7	0.012 7	0.007 9
0.18	0.096 5	0.156 2	0.156 2	0.096 5	0.44	0.007 1	0.011 5	0.011 5	0.007 1
0.19	0.087 3	0.141 3	0.141 3	0.087 3	0.45	0.006 4	0.010 4	0.010 4	0.006 4
0.20	0.079 0	0.127 8	0.127 8	0.079 0	0.46	0.005 8	0.009 4	0.009 4	0.005 8
0.21	0.071 4	0.115 6	0.115 6	0.071 4	0.47	0.005 3	0.008 5	0.008 5	0.005 3
0.22	0.064 6	0.104 5	0.104 5	0.064 6	0.48	0.004 8	0.007 7	0.007 7	0.004 8
0.23	0.058 4	0.094 6	0.094 6	0.058 4	0.49	0.004 3	0.007 0	0.007 0	0.004 3
0.24	0.052 9	0.085 5	0.085 5	0.052 9	0.50	0.003 9	0.006 3	0.006 3	0.003 9
0.25	0.047 8	0.077 4	0.077 4	0.047 8					

■

请读者证明，利用第 12 章的方法，例 1 中边界值问题的精确解为 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x$. 一些样本数据在表 15.3 中给出.

表 15.3

精确值	近似值
$u(0.4,\ 0.05)=0.5806$	$u_{25}=0.5758$
$u(0.6,\ 0.06)=0.5261$	$u_{36}=0.5208$
$u(0.2,\ 0.10)=0.2191$	$u_{1,10}=0.2154$
$u(0.8,\ 0.14)=0.1476$	$u_{4,14}=0.1442$

稳定性 比较这些近似值和精确值，出于我们的某种需要其精确度已经足够了. 但是前述方法有一个问题. 前面我们讲过，若舍入误差或其他误差随着计算过程的增加而快速增长，则这种数值方法就是*不稳定的*(unstable). 例 1 中所示的数值方法可以说明这种现象. 可以证明若 λ 小于或等于 0.5，则例 1 中的方法是稳定的，其他情况是不稳定的. 在例 1 中我们选择$\lambda=0.25\leqslant 0.5$，则必须选择 $k=0.01$；在时间方向上使用小步长的必要性是这种方法的主要缺点. 请读者做练习 15.2 中的习题 12，并验证当 $\lambda=1$ 时，这种方法是不稳定的.

克兰克-尼科尔森法 解抛物型偏微分方程还有一种方法叫*隐式有限差分法*(implicit finite difference method). 这个方法需要解一个方程组以求得 u 在第 $j+1$ 个时间线上的近似值. 然而，隐式方法不存在不稳定的问题.

J. 克兰克和 P. 尼科尔森在 1947 年介绍了一种算法，这种算法可以解大多数热传导方程. 这种算法是用两个中心差商的均值来代替 $c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 中的二阶偏导数，一个中心差商是 t 处的值，另一个中心差商是 $t+k$ 处的值：

$$\frac{c}{2}\left[\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}+\frac{u(x+h,t+k)-2u(x,t+k)+u(x-h,t+k)}{h^2}\right]$$
$$=\frac{1}{k}[u(x,t+k)-u(x,t)]. \tag{4}$$

如果我们还定义 $\lambda=ck/h^2$，那么整理后(4)式可以写为

$$-u_{i-1,j+1}+\alpha u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}=u_{i+1,j}-\beta u_{ij}+u_{i-1,j}, \tag{5}$$

其中 $\alpha=2(1+1/\lambda)$，$\beta=2(1-1/\lambda)$，$j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$.

对每个 j，差分方程(5)对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 有 $n-1$ 个方程，它含有 $n-1$ 个未知量 $u_{i,j+1}$. 由前述的边界条件，$u_{i,j+1}$在 $i=0$ 和 $i=n$ 处的值已知. 例如，当 $n=4$ 时，求 u 在第 $j+1$ 个时间线上近似值的方程组为

$$\begin{aligned}
-u_{0,j+1}+\alpha u_{1,j+1}-u_{2,j+1}&=u_{2,j}-\beta u_{1,j}+u_{0,j}\\
-u_{1,j+1}+\alpha u_{2,j+1}-u_{3,j+1}&=u_{3,j}-\beta u_{2,j}+u_{1,j}\\
-u_{2,j+1}+\alpha u_{3,j+1}-u_{4,j+1}&=u_{4,j}-\beta u_{3,j}+u_{2,j}
\end{aligned} \tag{6}$$

或

$$\begin{aligned}
\alpha u_{1,j+1}-u_{2,j+1}&=b_1\\
-u_{1,j+1}+\alpha u_{2,j+1}-u_{3,j+1}&=b_2\\
-u_{2,j+1}+\alpha u_{3,j+1}&=b_3,
\end{aligned}$$

其中

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1},$$
$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j},$$
$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} + u_{4,j+1}.$$

一般地，如果我们利用差分方程(5)求解 u 在第 $j+1$ 个时间上的值时，需要解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，这里系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为三对角矩阵(tridiagonal matrix)，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha & -1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列为

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1},$$
$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j},$$
$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j},$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} = u_{n,j} - \beta u_{n-1,j} + u_{n-2,j} + u_{n,j+1}.$$

例 2　克兰克-尼科尔森法的使用

利用克兰克-尼科尔森法求边界值问题

$$0.25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},\quad 0 < x < 2,\quad 0 < t < 0.3$$
$$u(0,t) = 0,\quad u(2,t) = 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant 0.3$$
$$u(x,0) = \sin\pi x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

的近似解，$n=8$，$m=30$.

解　从题中我们可以看出，$a=2$，$T=0.3$，$h=1/4=0.25$，$k=1/100=0.01$，$c=0.25$，由此可得 $\lambda=0.04$. 在计算机的帮助下，我们可以得到表 15.4 中的结果.

表 15.4　克兰克-尼科尔森法，$h=0.25$，$k=0.01$，$\lambda=0.25$

时间	$x=0.25$	$x=0.50$	$x=0.75$	$x=1.00$	$x=1.25$	$x=1.50$	$x=1.75$
0.00	0.707 1	1.000 0	0.707 1	0.000 0	−0.707 1	−1.000 0	−0.707 1
0.01	0.690 7	0.976 8	0.690 7	0.000 0	−0.690 7	−0.976 8	−0.690 7
0.02	0.674 7	0.954 2	0.674 7	0.000 0	−0.674 7	−0.954 2	−0.674 7
0.03	0.659 1	0.932 1	0.659 1	0.000 0	−0.659 1	−0.932 1	−0.659 1
0.04	0.643 8	0.910 5	0.643 8	0.000 0	−0.643 8	−0.910 5	−0.643 8
0.05	0.628 9	0.889 4	0.628 9	0.000 0	−0.628 9	−0.889 4	−0.628 9

（续）

时间	$x=0.25$	$x=0.50$	$x=0.75$	$x=1.00$	$x=1.25$	$x=1.50$	$x=1.75$
0.06	0.614 4	0.868 8	0.614 4	0.000 0	−0.614 4	−0.868 8	−0.614 4
0.07	0.600 1	0.848 7	0.600 1	0.000 0	−0.600 1	−0.848 7	−0.600 1
0.08	0.586 2	0.829 1	0.586 2	0.000 0	−0.586 2	−0.829 1	−0.586 2
0.09	0.572 7	0.809 9	0.572 7	0.000 0	−0.572 7	−0.809 9	−0.572 7
0.10	0.559 4	0.791 1	0.559 4	0.000 0	−0.559 4	−0.791 1	−0.559 4
0.11	0.546 4	0.772 8	0.546 4	0.000 0	−0.546 4	−0.772 8	−0.546 4
0.12	0.533 8	0.754 9	0.533 8	0.000 0	−0.533 8	−0.754 9	−0.533 8
0.13	0.521 4	0.737 4	0.521 4	0.000 0	−0.521 4	−0.737 4	−0.521 4
0.14	0.509 3	0.720 3	0.509 3	0.000 0	−0.509 3	−0.720 3	−0.509 3
0.15	0.497 5	0.703 6	0.497 5	0.000 0	−0.497 5	−0.703 6	−0.497 5
0.16	0.486 0	0.687 3	0.486 0	0.000 0	−0.486 0	−0.687 3	−0.486 0
0.17	0.474 8	0.671 4	0.474 8	0.000 0	−0.474 8	−0.671 4	−0.474 8
0.18	0.463 8	0.655 9	0.463 8	0.000 0	−0.463 8	−0.655 9	−0.463 8
0.19	0.453 0	0.640 7	0.453 0	0.000 0	−0.453 0	−0.640 7	−0.453 0
0.20	0.442 5	0.625 8	0.442 5	0.000 0	−0.442 5	−0.625 8	−0.442 5
0.21	0.432 3	0.611 4	0.432 3	0.000 0	−0.432 3	−0.611 4	−0.432 3
0.22	0.422 3	0.597 2	0.422 3	0.000 0	−0.422 3	−0.597 2	−0.422 3
0.23	0.412 5	0.583 4	0.412 5	0.000 0	−0.412 5	−0.583 4	−0.412 5
0.24	0.402 9	0.569 9	0.402 9	0.000 0	−0.402 9	−0.569 9	−0.402 9
0.25	0.393 6	0.556 7	0.393 6	0.000 0	−0.393 6	−0.556 7	−0.393 6
0.26	0.384 5	0.543 8	0.384 5	0.000 0	−0.384 5	−0.543 8	−0.384 5
0.27	0.375 6	0.531 2	0.375 6	0.000 0	−0.375 6	−0.531 2	−0.375 6
0.28	0.366 9	0.518 9	0.366 9	0.000 0	−0.366 9	−0.518 9	−0.366 9
0.29	0.358 4	0.506 8	0.358 4	0.000 0	−0.358 4	−0.506 8	−0.358 4
0.30	0.350 1	0.495 1	0.350 1	0.000 0	−0.350 1	−0.495 1	−0.350 1

■

读者可以证明满足例 2 中所有条件的函数为 $u(x, t)=e^{-\pi^2 t/4}\sin\pi x$. 表 15.5 中所做的样本对比证明了绝对误差的数量级为 10^{-2} 或 10^{-3}. 减小 h 或 k 都可以得到更小的误差.

表 15.5

精确值	近似值
$u(0.75, 0.05)=0.6250$	$u_{35}=0.6289$
$u(0.50, 0.20)=0.6105$	$u_{2,20}=0.6259$
$u(0.25, 0.10)=0.5525$	$u_{1,10}=0.5594$

练习 15.2

在习题 1～12，利用计算机进行计算.

1. 用差分方程(3)求边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},0<x<2,0<t<1$$
$$u(0,t)=0,u(2,t)=0,0\leqslant t\leqslant 1$$
$$u(x,0)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1\\0,1<x\leqslant 2\end{cases}$$

的近似解. $n=8$, $m=40$.

2. 利用练习 12.3 习题 1 所得的傅里叶级数解，令 $L=2$，求出前 20 项的和来计算习题 1 的解 $u(x, t)$在 $u(0.25,0.1)$、$u(1, 0.5)$和 $u(1.5, 0.8)$处的值. 一个学生编写了一个计算机程序进行计算，并且得到的结果是 $u(0.25, 0.1)=0.3794$，$u(1, 0.5)=0.1854$，$u(1.5, 0.8)=0.0623$. 设这些结果在所有数位上都是精确的. 把这些结果和例 1 中所得到的近似值加以比较. 求出每个值的绝对误差.
3. 用克兰克-尼科尔森法解习题 1，令 $n=8$，$m=40$. 用习题 2 中所给的 $u(0.25, 0.1)$、$u(1, 0.5)$和 $u(1.5, 0.8)$值计算绝对误差.
4. 令 $n=8$，$m=20$，再解一次习题 1. 利用习题 2 中所给的 $u(0.25, 0.1)$、$u(1, 0.5)$和 $u(1.5, 0.8)$值计算绝对误差. 为什么在本题中所得的近似值不是很精确?
5. 用克兰克-尼科尔森法解习题 1，令 $n=8$，$m=20$. 用习题 2 中所给的 $u(0.25, 0.1)$、$u(1, 0.5)$和 $u(1.5, 0.8)$值计算绝对误差. 把这些误差和习题 4 中得到的误差进行比较.
6. 在 12.2 节中我们已经看到，一个长为 L 的杆，导热系数为 K，比热为 γ，密度为 ρ，它的温度 $u(x, t)$满足偏微分方程

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<L.$$

考虑由上述方程和下面条件组成的边界值问题：

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 10,$$
$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L.$$

利用本节的差分方程(3)，令 $n=10$，$m=10$，求以下情形边界值问题的近似解.

(a) $L=20$，$K=0.15$，$\rho=8.0$，$\gamma=0.11$，$f(x)=30$.

(b) $L=50$，$K=0.15$，$\rho=8.0$，$\gamma=0.11$，$f(x)=30$.

(c) $L=20$，$K=1.10$，$\rho=2.7$，$\gamma=0.22$，$f(x)=0.5x(20-x)$.

(d) $L=100$，$K=1.04$，$\rho=10.6$，$\gamma=0.06$，

$$f(x)=\begin{cases}0.8x & 0\leqslant x\leqslant 50\\0.8(100-x), & 50<x\leqslant 100.\end{cases}$$

7. 用克兰克-尼科尔森法解习题 6，令 $n=10$，$m=10$.
8. 若端点温度为 $u(0, t)=0$，$u(L, t)=20$，$0\leqslant t\leqslant 10$，再解一次习题 6.
9. 用克兰克-尼科尔森法解习题 8.
10. 考虑例 2 中的边界值问题. 设 $n=4$.

(a)求新的 λ 值.

(b)用克兰克-尼科尔森差分方程(5)求方程组，解出 u_{11}、u_{21}和 u_{31}，即 u 在第一条时间线上的值.

[提示：令(5)中的 $j=0$，i 取值为 1，2，3.]

(c)不用计算机，解三个方程的方程组．把所得到的结果和表 15.4 中的对应项进行比较．

11．考虑长为 $L=20$ 的杆，$K=1.05$，$\rho=10.6$，$\gamma=0.056$．设

$$u(0,t)=20, u(20,t)=30$$
$$u(x,0)=50.$$

(a)用 12.6 节介绍的方法，求稳定的温度分布 $\psi(x)$．

(b)用克兰克-尼科尔森法求温度 $u(x,t)$在 $0\leqslant t\leqslant T_{\max}$上的近似值．选择足够大的 $T_{\max}$，使得温度可以接近稳定值．把 $t=T_{\max}$时的近似值和(a)中的 $\psi(x)$值进行比较．

12．用差分方程(3)求边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<1,\quad 0<t<1$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$
$$u(x,0)=\sin\pi x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的近似解．令 $n=5$，$m=25$．

15.3 双曲型方程

现在我们开始介绍另外一类边界值问题近似解的求法，这类边界值问题包含有一维波动方程：

$$\begin{aligned} c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0<x<a, t>0,\\ u(0,t)&=0, u(a,t)=0, t>0,\\ u(x,0)&=f(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x), 0\leqslant x\leqslant a.\end{aligned}\tag{1}$$

这个波动方程是一种双曲型偏微分方程．如果函数 f 和 g 在区间$(0,a)$上有连续的二阶导数，且有 $f(a)=f(0)=0$，那么这个问题有唯一解．

用差分方程代替波动方程 和前两节一样，我们的第一个任务是用差分方程来代替(1)中的偏微分方程．我们用中心差商来代替二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)]$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\approx\frac{1}{k^2}[u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t-k)].$$

因此，我们可以用

$$\frac{c^2}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)]=\frac{1}{k^2}[u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t-k)].\tag{2}$$

来代替 $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$．

如果令 $\lambda=ck/h$，那么(2)可以写为

$$u_{i,j+1}=\lambda^2 u_{i+1,j}+2(1-\lambda^2)u_{ij}+\lambda^2 u_{i-1,j}-u_{i,j-1},\tag{3}$$

对 $i=1,2,\cdots,n-1$ 和 $j=1,2,\cdots,m-1$ 成立．

和 15.2 节中所介绍的第一种方法一样，基于方程(3)的数值方法是一种显式有限差分法．

如前，我们用差分方程来求(1)在 xt 平面内一个矩形区域上的近似解 $u(x, t)$，这个矩形区域定义为 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant t\leqslant T$. 若 n 和 m 是正整数，并且

$$h=\frac{a}{n}\text{ 和 }k=\frac{T}{m},$$

则这个区域上的垂直和水平网格线定义为

$$x_i=ih,\quad i=0,1,2,\cdots,n\text{ 和 }t_j=jk,\quad j=0,1,2,\cdots,m.$$

如图 15.10 所示，(3)使得我们可以得到 $u_{i,j+1}$ 在第 $j+1$ 个时间线上的近似值. 此外，我们还有

$$u_{0,j}=u(0,jk)=0,$$

$$u_{n,j}=u(a,jk)=0,\qquad \leftarrow \text{边界条件}$$

$$u_{i,0}=u(x_i,0)=f(x_i).\qquad \leftarrow \text{初始条件}$$

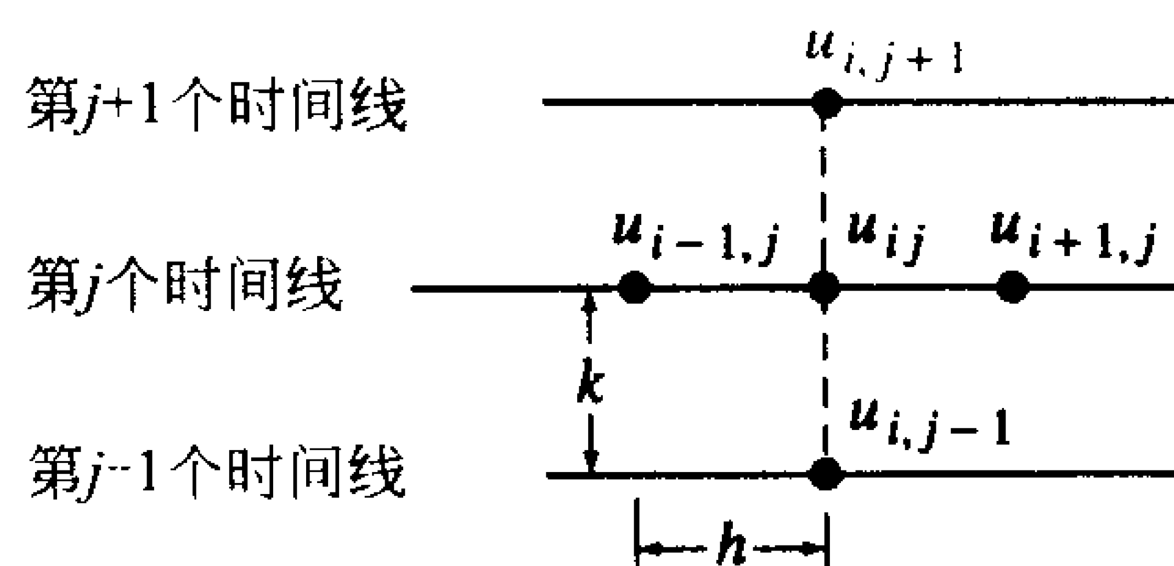


图 15.10

这里有一点问题. 从(3)中可以看到，当 $j=1$ 时，我们需要知道 $u_{i,1}$ 的值(也就是 u 在第一条时间线上的估计值)才能求出 $u_{i,2}$ 的值. 但是由图 15.10，$j=0$，我们看到 $u_{i,1}$ 在第一条时间线上的值依赖于 $u_{i,0}$ 在第零条时间线上的值以及 $u_{i,-1}$ 的值. 为了计算这些值，我们使用初速度条件 $u_t(x, 0)=g(x)$. 在 $t=0$ 处，由 9.5 节的(5)式可得

$$g(x_i)=u_t(x_i,0)\approx\frac{u(x_i,k)-u(x_i,-k)}{2k}.\tag{4}$$

为了让(4)中的 $u(x_i, -k)=u_{i,-1}$ 成立，我们必须把 $u(x, t)$ 后向拓延. 由(4)知

$$u(x_i,-k)\approx u(x_i,k)-2kg(x_i).$$

这个结果表明我们应该在(3)的迭代过程中定义

$$u_{i,-1}=u_{i,1}-2kg(x_i).\tag{5}$$

把(5)代入(3)，当 $j=0$ 时，可以得到一种特殊情况为

$$u_{i,1}=\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0}+u_{i-1,0})+(1-\lambda^2)u_{i,0}+kg(x_i).\tag{6}$$

例 1　有限差分法的使用

用(3)式求边界值问题

$$4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t<1$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$u(x,0)=\sin\pi x,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的近似解，其中 $n=5$，$m=20$.

解　由题意我们可得 $c=2$，$a=1$，$T=1$. 令 $n=5$，$m=20$，可得 $h=1/5=0.2$，$k=1/20=0.05$，$\lambda=0.5$. 因此，令 $g(x)=0$，方程(6)和(3)分别可以写为

$$u_{i,1}=0.125(u_{i+1,0}+u_{i-1,0})+0.75u_{i,0},\tag{7}$$

$$u_{i,j+1}=0.25u_{i+1,j}+1.5u_{ij}+0.25u_{i-1,j}-u_{i,j-1}.\tag{8}$$

对 $i=1, 2, 3, 4$，由方程(7)，可得下面计算 $u_{i,1}$ 在第一条时间线上的近似值的公式：

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= 0.125(u_{20}+u_{00})+0.75u_{10} = 0.559\,721\,00,\\
u_{21} &= 0.125(u_{30}+u_{10})+0.75u_{20} = 0.905\,647\,61,\\
u_{31} &= 0.125(u_{40}+u_{20})+0.75u_{30} = 0.905\,647\,61,\\
u_{41} &= 0.125(u_{50}+u_{30})+0.75u_{40} = 0.559\,721\,00.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

注意到(9)所得的结果是从初始条件 $u(x,\ 0)=\sin\pi x$ 得到的. 例如，$u_{20}=\sin(0.2\pi)$，等等. 令(8)中的 $j=1$ 可得

$$u_{i,2} = 0.25u_{i+1,1}+1.5u_{i,1}+0.25u_{i-1,1}-u_{i,0},$$

并且由 $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
u_{12} &= 0.25u_{21}+1.5u_{11}+0.25u_{01}-u_{10},\\
u_{22} &= 0.25u_{31}+1.5u_{21}+0.25u_{11}-u_{20},\\
u_{32} &= 0.25u_{41}+1.5u_{31}+0.25u_{21}-u_{30},\\
u_{42} &= 0.25u_{51}+1.5u_{41}+0.25u_{31}-u_{40}.
\end{aligned}
$$

利用边界条件、初始条件以及(9)中的数据，我们可以从这些方程得到 u 在第二条时间线上的近似值. 这些结果和余下的计算都在表 15.6 中给出.

表 15.6 显式差分方法近似，$h=0.2$，$k=0.05$，$\lambda=0.5$

时间	$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$	时间	$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$
0.00	0.587 8	0.951 1	0.951 1	0.587 8	0.55	−0.566 3	−0.916 3	−0.916 3	−0.566 3
0.05	0.559 7	0.905 6	0.905 6	0.559 7	0.60	−0.491 2	−0.794 7	−0.794 7	−0.491 2
0.10	0.478 2	0.773 8	0.773 8	0.478 2	0.65	−0.369 1	−0.597 3	−0.597 3	−0.369 1
0.15	0.351 0	0.568 0	0.568 0	0.351 0	0.70	−0.211 9	−0.342 8	−0.342 8	−0.211 9
0.20	0.190 3	0.308 0	0.308 0	0.190 3	0.75	−0.034 4	−0.055 6	−0.055 6	−0.034 4
0.25	0.011 5	0.018 5	0.018 5	0.011 5	0.80	0.146 4	0.236 9	0.236 9	0.146 4
0.30	−0.168 5	−0.272 7	−0.272 7	−0.168 5	0.85	0.313 2	0.506 8	0.506 8	0.313 2
0.35	−0.332 4	−0.537 8	−0.537 8	−0.332 4	0.90	0.450 1	0.728 3	0.728 3	0.450 1
0.40	−0.464 5	−0.751 6	−0.751 6	−0.464 5	0.95	0.544 0	0.880 3	0.880 3	0.544 0
0.45	−0.552 3	−0.893 6	−0.893 6	−0.552 3	1.00	0.586 0	0.948 2	0.948 2	0.586 0
0.50	−0.587 3	−0.950 3	−0.950 3	−0.587 3					

■

可以很容易地证明例 1 中的精确解为 $u(x,\ t)=\sin\pi x\cos 2\pi t$. 利用这个函数，我们在表 15.6 中比较了精确解与近似解. 例如，表 15.7 中给出的一些样本数据.

表 15.7

精确值	近似值
$u(0.4,\ 0.25)=0$	$u_{25}=0.018\,5$
$u(0.6,\ 0.3)=-0.293\,9$	$u_{36}=-0.272\,7$
$u(0.2,\ 0.5)=-0.587\,8$	$u_{1,10}=-0.587\,3$
$u(0.8,\ 0.7)=-0.181\,6$	$u_{4,14}=-0.211\,9$

正如读者所看到的，把同一张表格中的近似解和精确解进行比较就会发现，近似解的精确度不是非常令人满意. 但是，我们可以得到更精确的解. 这种算法的精确度和 λ 的选择有关. 当然，λ 又由整数 n 和 m 的选择决定，它们分别决定着步长 h 和 k. 可以证明当比例 $\lambda=kc/h$ 等于 1 时，也就是当沿时间方向的步长为 $k=h/c$ 时，也就是说这种方法的精确度总是最好的. 例如，$n=8$，$m=16$ 时，可得 $h=1/8$，$k=1/16$，$\lambda=1$. 表 15.8 中所给的样本值可以清楚地说明精确度有所提高.

表 15.8

精确值	近似值
$u(0.25, 0.3125)=-0.2706$	$u_{25}=-0.2706$
$u(0.375, 0.375)=-0.6533$	$u_{36}=-0.6533$
$u(0.125, 0.625)=-0.2706$	$u_{1,10}=-0.2706$

稳定性 我们在结论中注意到，当 $\lambda\leqslant 1$ 时，波动方程的显式有限差分法是稳定的，而当 $\lambda>1$ 时则是不稳定的.

练习 15.3

在习题 1、3、5 和 6 中，利用计算机进行求解.

1. 用差分方程(3)求边界值问题

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<a,\quad 0<t<T$$

$$u(0,t)=0,\quad u(a,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a$$

在下列情形下的近似解.

(a) $c=1$，$a=1$，$T=1$，$f(x)=x(1-x)$；$n=4$，$m=10$.

(b) $c=1$，$a=2$，$T=1$，$f(x)=e^{-16(x-1)^2}$；$n=5$，$m=10$.

(c) $c=\sqrt{2}$，$a=1$，$T=1$，$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 0.5\\ 0.5, & 0.5<x\leqslant 1\end{cases}$；$n=10$，$m=25$.

2. 考虑边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t<0.5$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 0.5$$

$$u(x,0)=\sin\pi x,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

(a) 用第 12 章中的方法证明这个问题的解为 $u(x,t)=\sin\pi x\cos\pi t$.

(b) 不用计算机，用本节的方法求这个问题的近似解. 令 $n=4$，$m=5$.

(c) 计算每个内部格点的绝对误差.

3. 用计算机求解下列情形下习题 2 中边界值问题的近似解.

(a) $n=5$，$m=10$ (b) $n=5$，$m=20$

4. 给定边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t<1$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$u(x,0)=x(1-x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

令方程(6)中的 $h=k=1/5$，手工计算 $u_{i,1}$ 的值.

5. 在 12.2 节中我们已经看到，振动弦的方程为

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中 T 是弦中的常数张力，ρ 是每单位长度的质量. 设长为 60cm 的弦端点固定在 x 轴上，初始位移为

$$f(x)=\begin{cases}0.01x, & 0\leqslant x\leqslant 30\\ 0.30-\dfrac{x-30}{100}, & 30<x\leqslant 60,\end{cases}$$

由静止释放. 利用本节的差分方程(3)求边界值问题的近似解，$h=10$，$k=5\sqrt{\rho/T}$，这里 $\rho=0.022\,5\text{g/cm}$，$T=1.4\times 10^7\text{dyne}$. 令 $m=50$.

6. 当

$$f(x)=\begin{cases}0.2x, & 0\leqslant x\leqslant 15\\ 0.30-\dfrac{x-15}{150}, & 15<x\leqslant 60,\end{cases}$$

$h=10$，$k=2.5\sqrt{\rho/T}$，$m=50$ 时，重新求解习题 5.

第 15 章复习题

1. 考虑边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<2,\quad 0<y<1$$

$$u(0,y)=0,\quad u(2,y)=50,\quad 0<y<1$$

$$u(x,0)=0,\quad u(x,1)=0,\quad 0<x<2.$$

求微分方程在区域内点上的近似值，网格步长为 $h=1/2$. 利用高斯消元法或高斯-赛德尔迭代法.

2. 当网格步长为 $h=1/4$ 时，解习题 1. 利用高斯-赛德尔迭代法.

3. 考虑边界值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<1,\quad 0<t<0.05$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=x,\quad 0<x<1.$$

(a)注意初始温度 $u(x,0)=x$ 表明右边界 $x=1$ 处的温度为 $u(1,0)=1$，而又由边界条件知 $u(1,0)=0$. 编写一个用显式有限差分法求解的计算机程序，使得边界条件对所有时间均成立，包括 $t=0$ 时刻. 用这个程序完成表 15.9.

表 15.9

时间	$x=0.00$	$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$	$x=1.00$
0.00	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.800 0	0.000 0
0.01	0.000 0					0.000 0
0.02	0.000 0					0.000 0
0.03	0.000 0					0.000 0
0.04	0.000 0					0.000 0
0.05	0.000 0					0.000 0

(b)修改计算机程序，使得 $t=0$ 时刻初始条件在边界成立．用这个程序完成表 15.10.

表 15.10

时间	$x=0.00$	$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$	$x=1.00$
0.00	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.800 0	1.000 0
0.01	0.000 0					0.000 0
0.02	0.000 0					0.000 0
0.03	0.000 0					0.000 0
0.04	0.000 0					0.000 0
0.05	0.000 0					0.000 0

(c)表 15.9 和表 15.10 在某些方面是相关的吗？如果有必要可以使用更大的时间区间.

附录A 伽马函数

伽马函数(gamma function)的欧拉积分定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1}$$

积分的收敛要求 $x-1>-1$ 或 $x>0$. 其递推关系为

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{2}$$

我们在 6.3 节中见过它，它可由(1)进行分部积分得到. 现在如果 $x=1$，$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$，则由(2) 得

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1,$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

以此类推. 通过这种方法，可以看出当 n 是正整数时，

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

由于该原因，伽马函数通常称为广义阶乘函数(generalized factorial function).

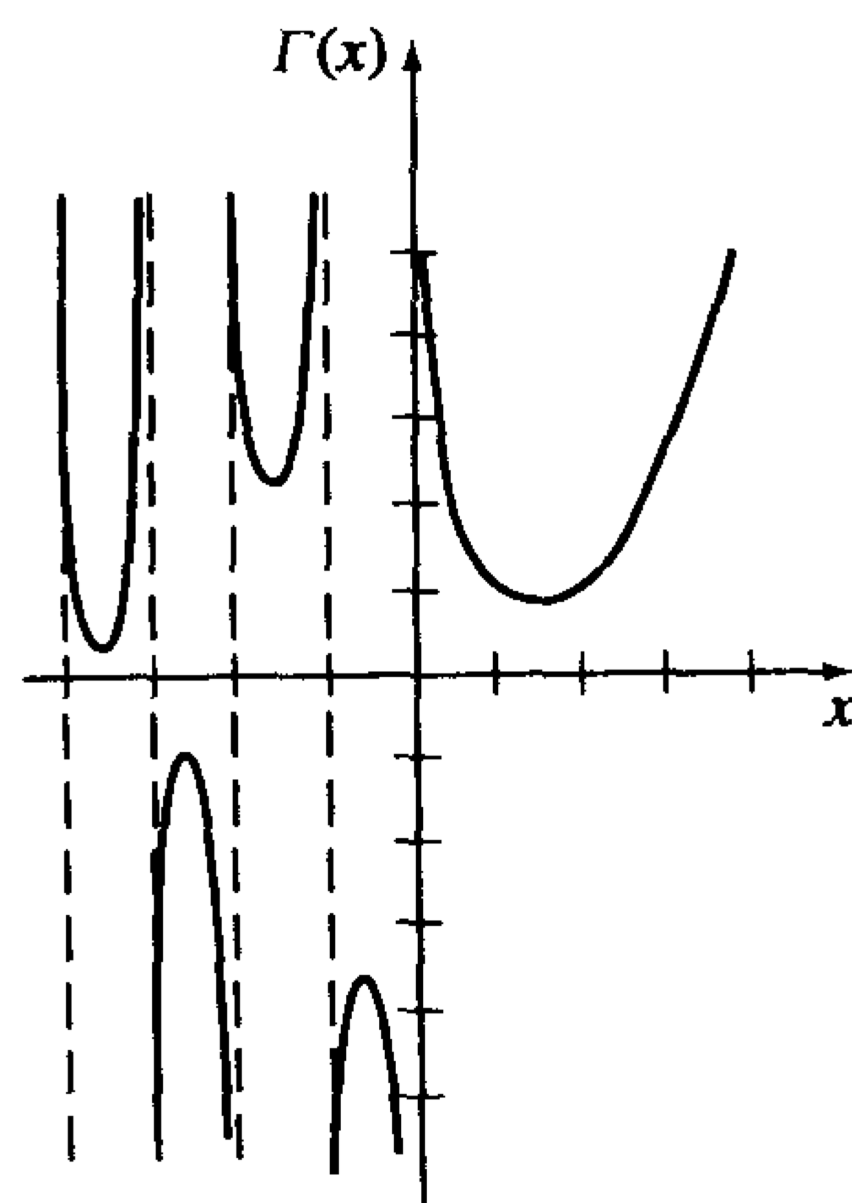


图 A.1

虽然当 $x<0$ 时积分形式(1)并不收敛，但可以通过另一个定义证明，伽马函数对于所有除了 $x=-n(n=0, 1, 2, \cdots)$之外的实数和复数都有定义. 因此，(2) 实际上对 $x\neq -n$ 成立. 图 A.1 给出了 $\Gamma(x)$的图像，它可被认为是实变量 x 的函数. 注意到非负整数与图上的垂直渐近线相对应.

在习题 23 和 24 中，我们利用了 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ 这一事实. 这一结果可通过在(1)中令 $x=1/2$ 得到：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt. \tag{3}$$

如果我们令 $t=u^2$，(3)可改写为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. 但是

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv,$$

所以

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right)\left(2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv\right)$$
$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv.$$

转化成极坐标 $u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$ 使我们能够计算这个双重积分：

$$4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi.$$

所以

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi \text{ 或 } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{4}$$

例 1 **$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$的值**

计算 $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.

解 根据(2)和(4)可得出，$x=-1/2$ 时，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right).$$

所以

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}.$$ ■

附录 A 练习

1. 计算下列函数的值.

(a) $\Gamma(5)$ (b) $\Gamma(7)$ (c) $\Gamma(-\frac{3}{2})$ (d) $\Gamma(-\frac{5}{2})$

2. 利用(1)和 $\Gamma(6/5)=0.92$ 这一事实计算 $\int_0^{+\infty}x^5\,\mathrm{e}^{-x^5}\,\mathrm{d}x$. [提示：令 $t=x^5$.]

3. 利用(1)和 $\Gamma(5/3)=0.89$ 这一事实计算 $\int_0^{+\infty}x^4\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x$.

4. 计算 $\int_0^1 x^3\left(\ln\frac{1}{x}\right)^3\mathrm{d}x$. [提示：令 $t=-\ln x$.]

5. 利用 $\Gamma(x)>\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 这一事实，证明当 $x\to0^+$ 时 $\Gamma(x)$无界.

6. 利用(1)推出 $x>0$ 时的(2).

附录B 矩阵引论

B.1 基本定义和理论

定义 B.1 矩阵

矩阵 $\boldsymbol{A}$(matrix $\boldsymbol{A}$)是由若干数字或函数组成的矩形排列：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

若一矩阵有 m 行和 n 列，我们说它的大小(size)是 m 乘以 n(写作 $m\times n$). 一个 $n\times n$ 矩阵称为n 阶方阵(square matrix). $m\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 第i 行第j 列的元素或项被写作a_{ij}. 因此$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 简化为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，或者干脆是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 1×1 矩阵就是一个常数或一个函数.

定义 B.2 矩阵的相等

若对任意 i 和 j 有 $a_{ij}=b_{ij}$，则称两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等(equal).

定义 B.3 列矩阵

列矩阵 $\boldsymbol{X}$(column matrix $\boldsymbol{X}$)是一个 n 行和一列的矩阵：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}=(b_{i1})_{n\times 1}.$$

列矩阵也叫做列向量(column vector)，或者就叫向量(vector).

定义 B.4 矩阵的倍数

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的倍数(multiple)定义为

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}=(ka_{ij})_{m\times n},$$

其中 k 为一个常数或一个函数.

例 1 矩阵的倍数

(a) $5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ \frac{1}{5} & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 20 & -5 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}$ (b) $e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{t} \\ -2e^{t} \\ 4e^{t} \end{pmatrix}$ ■

我们注意到，对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，乘积 $k\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}k$ 相同. 例如：

$$e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-3t}\\5e^{-3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}e^{-3t}.$$

定义 B.5 矩阵的加法

两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和(sum)定义为如下矩阵：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

换句话说，当两个维数相同的矩阵相加时，我们将其对应元素相加.

例 2 矩阵的加法

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&4&6\\-6&10&-5\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&7&-8\\9&3&5\\1&-1&2\end{pmatrix}$ 的和是

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2+4&-1+7&3+(-8)\\0+9&4+3&6+5\\-6+1&10+(-1)&-5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6&-5\\9&7&11\\-5&9&-3\end{pmatrix}.$$

■

例 3 写成列矩阵和的矩阵

单个矩阵 $\begin{pmatrix}3t^2-2e^t\\t^2+7t\\5t\end{pmatrix}$ 可写作三个列向量的和：

$$\begin{pmatrix}3t^2-2e^t\\t^2+7t\\5t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t^2\\t^2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\7t\\5t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2e^t\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}0\\7\\5\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}e^t.$$

■

两个 $m\times n$ 矩阵的差(difference)以一般方式定义为：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})\text{，其中}-\boldsymbol{B}=(-1)\boldsymbol{B}.$$

定义 B.6 矩阵的乘法

令 $\boldsymbol{A}$ 为一个 m 行 n 列的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为一个 n 行 p 列的矩阵. 我们定义乘积 $\boldsymbol{AB}$(product $\boldsymbol{AB}$)为一 m×p 矩阵

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}&\cdots&a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\cdots+a_{1n}b_{np}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1}&\cdots&a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+\cdots+a_{2n}b_{np}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1}&\cdots&a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdots+a_{mn}b_{np}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p}.$$

仔细观察定义 B.6 发现，只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 才有意义. 乘积的维数可由下式确定：

$$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}.$$

另外，读者可能会认识到，所得矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行是利用 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和 $\boldsymbol{B}$ 的每一列的内积(或点积)构成的.

例 4　矩阵的乘法

(a)对于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&7\\3&5\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9&-2\\6&8\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4\cdot 9+7\cdot 6 & 4\cdot(-2)+7\cdot 8\\ 3\cdot 9+5\cdot 6 & 3\cdot(-2)+5\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78&48\\57&34\end{pmatrix}.$$

(b)对于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&8\\1&0\\2&7\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4&-3\\2&0\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}5\cdot(-4)+8\cdot 2 & 5\cdot(-3)+8\cdot 0\\ 1\cdot(-4)+0\cdot 2 & 1\cdot(-3)+0\cdot 0\\ 2\cdot(-4)+7\cdot 2 & 2\cdot(-3)+7\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-15\\-4&-3\\6&-6\end{bmatrix}.$$ ■

通常情况下，矩阵乘法是不可交换的；也就是说 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 注意到在例 4 的(a)中，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}30&53\\48&82\end{pmatrix}$，而在(b)中，乘积 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义，因为定义 B. 6 要求第一个矩阵(在此例中为 $\boldsymbol{B}$)的列数与第二个矩阵的行数相同.

我们特别关心方阵与列向量的乘积.

例 5　矩阵的乘法

(a) $\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&4&5\\1&-7&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\6\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-3)+(-1)\cdot 6+3\cdot 4\\ 0\cdot(-3)+\ \ 4\cdot 6+5\cdot 4\\ 1\cdot(-3)+(-7)\cdot 6+9\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\44\\-9\end{bmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}-4&2\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x+2y\\3x+8y\end{pmatrix}$ ■

乘法单位　对一给定正整数 n，$n\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

称为乘法单位矩阵(multiplicative identity matrix). 由定义 B. 6 可推出，对任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}.$$

同样，容易证明，如果 $\boldsymbol{X}$ 是一个 $n\times 1$ 列矩阵，则 $\boldsymbol{IX}=\boldsymbol{X}$.

零矩阵　所有元素为 0 的矩阵称为零矩阵(zero matrix)，用 $\boldsymbol{0}$ 表示. 例如，

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

等等．如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{0}$ 为 $m\times n$ 矩阵，那么

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}.$$

结合律 虽然我们不给出证明，但是矩阵乘法是具有可结合性的(associative)．如果 $\mathbf{A}$ 是 $m\times p$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $p\times r$ 矩阵，$\mathbf{C}$ 是 $r\times n$ 矩阵，那么

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

是 $m\times n$ 矩阵．

分配律 如果所有乘积都有定义，那么乘法对于加法是可分配的(distributive)．

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC} \text{ 以及} (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}.$$

矩阵的行列式 与每一常数方阵 $\mathbf{A}$ 有关的是称为矩阵行列式(determinant of the matrix)的数，该数用 $\det\mathbf{A}$ 表示．

例 6 **方阵的行列式**

对 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&6&2\\2&5&1\\-1&2&4\end{pmatrix}$，我们通过第一行的代数余子式将 $\det\mathbf{A}$ 展开：

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}3&6&2\\2&5&1\\-1&2&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5&1\\2&4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}2&1\\-1&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&5\\-1&2\end{vmatrix}$$
$$=3(20-2)-6(8+1)+2(4+5)=18.$$ ■

可以证明，行列式 $\det\mathbf{A}$ 可通过任何一列或任何一行的余子式展开．若 $\det A$ 有一行(或列)包含很多项 0，则经验告诉我们应该通过该行(或列)展开．

定义 B.7 **矩阵的转置**

$m\times n$ 矩阵(1)的转置(transpose)为一 $n\times m$ 矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，由下式给出：

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

换句话说，矩阵 $\mathbf{A}$ 的行变为它的转置 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的列．

例 7 **矩阵的转置**

(a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&6&2\\2&5&1\\-1&2&4\end{pmatrix}$ 的转置为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\6&5&2\\2&1&4\end{pmatrix}$．

(b) 如果 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$，那么 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=(5\quad 0\quad 3)$． ■

定义 B.8 **矩阵的乘法逆**

令 $\mathbf{A}$ 为一 $n\times n$ 矩阵．若存在一个 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{B}$ 使得

$$AB = BA = I,$$

其中 I 为乘法单位矩阵，则 B 称为 A 的乘法逆(multiplicative inverse of A)，用 $B=A^{-1}$表示.

定义 B.9 非奇异/奇异矩阵

令 A 为一 $n\times n$ 矩阵. 若 $\det A\neq 0$，则 A 称为是非奇异的(nonsingular). 若 $\det A=0$，则 A 称为是奇异的(singular).

下面的定理给出了一方阵有乘法逆的充分和必要条件.

定理 B.1 非奇异性意味着 A 有逆矩阵

$n\times n$ 矩阵 A 有乘法逆 A^{-1} 当且仅当 A 是非奇异的.

下面的定理给出了求非奇异阵的乘法逆的一种方法.

定理 B.2 求矩阵逆的公式

令 A 为一 $n\times n$ 非奇异阵，$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，其中 M_{ij} 为删去 A 中第 i 行和第 j 列后剩下的$(n-1)\times(n-1)$矩阵的行列式，则有

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(C_{ij})^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

定理 B.2 中的每一 C_{ij} 就是 A 中相应项 a_{ij} 的余子式(cofactor). 注意到在公式(2)中用到了转置.

为了将来能够用到，我们注意到在 2×2 非奇异阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

一例中，$C_{11}=a_{22}$，$C_{12}=-a_{21}$，$C_{21}=-a_{12}$，以及 $C_{22}=a_{11}$. 所以有

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

对于 3×3 非奇异阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad C_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad C_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

等等. 执行转置操作可得

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

例 8 2×2 矩阵的逆

求出 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ 的乘法逆.

解 由于 $\det\boldsymbol{A}=10-8=2\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的. 由定理 B.1 可推出 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 由(3)可求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

■

不是每个方阵都有乘法逆. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ 是奇异的，这是因为 $\det\boldsymbol{A}=0$. 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 不存在.

例 9　3×3 矩阵的逆

求出 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的乘法逆.

解 因为 $\det\boldsymbol{A}=12\neq 0$，所以所给的矩阵是非奇异的. $\det\boldsymbol{A}$ 中每一项相应的余子式是

$$C_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad C_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5,\qquad C_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3,$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2,\qquad C_{22}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2,\qquad C_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6,$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\qquad C_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-2,\qquad C_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=6.$$

由(4)推出

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 5 & 2 & -2\\ -3 & 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

■

我们要求读者证明 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$.

对于大于 3×3 的非奇异阵，公式(2)具有明显的困难. 例如，将公式(2)用于 4×4 矩阵. 我们将需要计算 16 个 3×3 行列式[⊖]. 对于一个大矩阵，有更多有效计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方法. 好奇的读者可以参考任何一本线性代数的教材.

由于我们的目的是将矩阵的概念应用于一阶微分方程组，所以需要下面的定义.

定义 B.10　函数矩阵的导数

如果 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 是这样一个矩阵：该矩阵的所有项都是在一公共区间上可导的函数，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

⊖ 严格地说，行列式是一个数，但有时将其看作是一个矩阵会方便一些.

定义 B.11 **函数矩阵的积分**

如果 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$是这样一个矩阵：该矩阵的所有项是在包含 t 和 t_0 的公共区间上连续的函数，那么

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s=\left(\int_{t_0}^{t}a_{ij}(s)\mathrm{d}s\right)_{m\times n}.$$

对函数矩阵求导(积分)，只需对每一项求导(积分)．矩阵的导数同样表示为 $\boldsymbol{A}'(t)$.

例 10 **矩阵的导数/积分**

如果

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \mathrm{e}^{3t}\\ 8t-1\end{pmatrix},\text{那么 }\boldsymbol{X}'(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin 2t\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{3t}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(8t-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ 3\mathrm{e}^{3t}\\ 8\end{pmatrix}$$

且

$$\int_0^t\boldsymbol{X}(s)\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}\int_0^t\sin 2s\mathrm{d}s\\ \int_0^t\mathrm{e}^{3s}\mathrm{d}s\\ \int_0^t(8s-1)\mathrm{d}s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\cos 2t+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}-\dfrac{1}{3}\\ 4t^2-t\end{pmatrix}.$$

■

B.2 高斯消元法和高斯-若尔当消元法

在求解 n 个变量的 n 维线性代数方程组时，矩阵是一个非常重要的工具，

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n.\end{aligned}\tag{5}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 表示(5)中的系数矩阵，我们知道，当 $\det\boldsymbol{A}\neq0$ 时，克莱姆法则可用于求解该方程组．然而，若 $\boldsymbol{A}$ 大于 3×3，运用该法则需要相当大的工作量．我们现在要考虑的程序具有一个明显的好处，它不仅可以有效地处理大型方程组，而且也是求解 $\det\boldsymbol{A}=0$ 的方程组(5)和 n 个变量 m 个线性方程的一种方法.

定义 B.12 **增广矩阵**

方程组(5)的增广矩阵(augmented matrix)为 $n\times(n+1)$矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \vdots&&&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&b_n\end{array}\right).$$

若 $\boldsymbol{B}$ 是以 $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为元素的列矩阵，则(5)的增广矩阵表示为 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$.

初等行变换 在代数学中，我们可以通过将一方程乘上一非零常数，交换方程组中任两个方程的位置，以及将一方程的非零常数倍加到另一方程上，来将一代数方程组变换为等价的方程组(它们是有相同解的方程组). 反之，这些对方程组中方程的变换等价于对增广矩阵的初等行变换(elementary row operation)：

(i)将一行乘上一非零常数.

(ii)交换任意两行.

(iii)将一行的非零常数倍加到另一行上.

消元法 利用增广矩阵求解形如(5)的方程组时，我们使用高斯消元法(Gaussian elimination)或高斯-若尔当消元法(Gauss-Jordan elimination). 在前一方法中，我们执行一系列初等行变换，直到将增广矩阵化为具有行阶梯形(row-echelon form)的形式：

(i)非零行中的第一个非零项为 1.

(ii)在连续的非零行中，下一行的首项 1 出现在上一行的首项 1 的右边.

(iii)全为 0 的行在矩阵的底部.

在高斯-若尔当法中，行变换将一直进行到我们将增广矩阵化为具有简化的行阶梯形(reduced row-echelon form). 化简的行阶梯形矩阵具有除上面三条性质外的另一条性质：

(iv)包含首项 1 的列的其他元素均为 0.

例 11 行阶梯/简化行阶梯

(a)增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{和} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

具有行阶梯形. 请读者证明它满足上述三个性质.

(b)增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{和} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

具有简化行阶梯形的形式. 注意包含首项 1 的列中剩下的项都是 0. ■

注意到在高斯消元法中，只要增广矩阵具有行阶梯形，我们就可以立即停止. 换句话说，通过做不同的行变换，我们可能得到不同的行阶梯形. 该方法需要用到回代. 在高斯-若尔当消元中，当我们得到具有简化行阶梯形的增广矩阵时，便立即停止. 任何一个行变换都会得到具有相同化简行阶梯形的增广矩阵. 该方法并不需要回代；对最终矩阵的考查使得方程组的解一目了然. 对于原方程组，我们在两种方法中的目的仅仅是，使第一个方程组中 x_1 的系数[⊖]等于 1 并利用该方程的倍数消去其他方程中的 x_1. 该过程重复地使用在其他变量上.

为了记录作用于增广矩阵上的行变换，我们用到下面的记号：

⊖ 我们总是能互换方程使得第一个方程包含变量 x_1.

记号	含义
R_{ij}	互换第 i 行和第 j 行
cR_i	用一非零常数 c 乘以第 i 行
cR_i+R_j	将第 i 行的 c 倍加到第 j 行上

例 12　利用消元法求解

利用(a)高斯消元法和(b)高斯-若尔当消元法求解

$$\begin{aligned} 2x_1+6x_2+x_3&=7\\ x_1+2x_2-x_3&=-1\\ 5x_1+7x_2-4x_3&=9. \end{aligned}$$

解　(a)利用对方程组增广矩阵的行变换，我们可得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7\\ 1 & 2 & -1 & -1\\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 6 & 1 & 7\\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{55}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{11}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

最后一个矩阵具有行阶梯形形式且表示方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=-1\\ x_2+\frac{3}{2}x_3&=\frac{9}{2}\\ x_3&=5. \end{aligned}$$

将 $x_3=5$ 代入第二个方程得到 $x_2=-3$. 将这两个值再代入第一个方程，最后得出 $x_1=10$.

(b)我们从上面的最后一个矩阵开始. 由于第二行和第三行的首项是 1，我们必须依次将第二列和第三列中的剩余项变为 0：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{3}{2}R_3+R_2]{4R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

最终的矩阵具有简化的行阶梯形. 鉴于矩阵在方程组中的含义，可以明显看出该方程组的解是 $x_1=10$，$x_2=-3$，$x_3=5$. ■

例 13　高斯-若尔当消元法

求解

$$\begin{aligned} x+3y-2z&=-7\\ 4x+y+3z&=5\\ 2x-5y+7z&=19. \end{aligned}$$

解 我们利用高斯-若尔当消元法求解该方程组：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -2 & -7\\ 4 & 1 & 3 & 5\\ 2 & -5 & 7 & 19\end{array}\right)\xrightarrow[-2R_1+R_3]{-4R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -2 & -7\\ 0 & -11 & 11 & 33\\ 0 & -11 & 11 & 33\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{11}R_3]{-\frac{1}{11}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -2 & -7\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[-R_2+R_3]{-3R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

在此例中，最终的矩阵具有行阶梯形，这说明有三个方程和三个未知量的原方程组实际上等价于有三个未知量的两个方程. 由于只有 z 是两个方程(非零行)共有的，我们可以对其任意赋值. 若令 $x=t$，其中 t 代表任意实数，则方程组拥有无穷多个解：$x=2-t$，$y=-3+t$，$z=t$. 从几何角度看，这些方程是平面 $x+0y+z=2$ 和 $0x+y-z=3$ 的交线的参数方程. ■

利用行变换求逆 鉴于需要进行估计的行列式的数量很大，当矩阵 $\mathbf{A}$ 的维数很大时，很少利用定理 B. 2 中的公式(2)来求逆. 对于 3×3 或更大的矩阵，下面定理中叙述的方法是求 $\mathbf{A}^{-1}$ 的一条特别有效的途径.

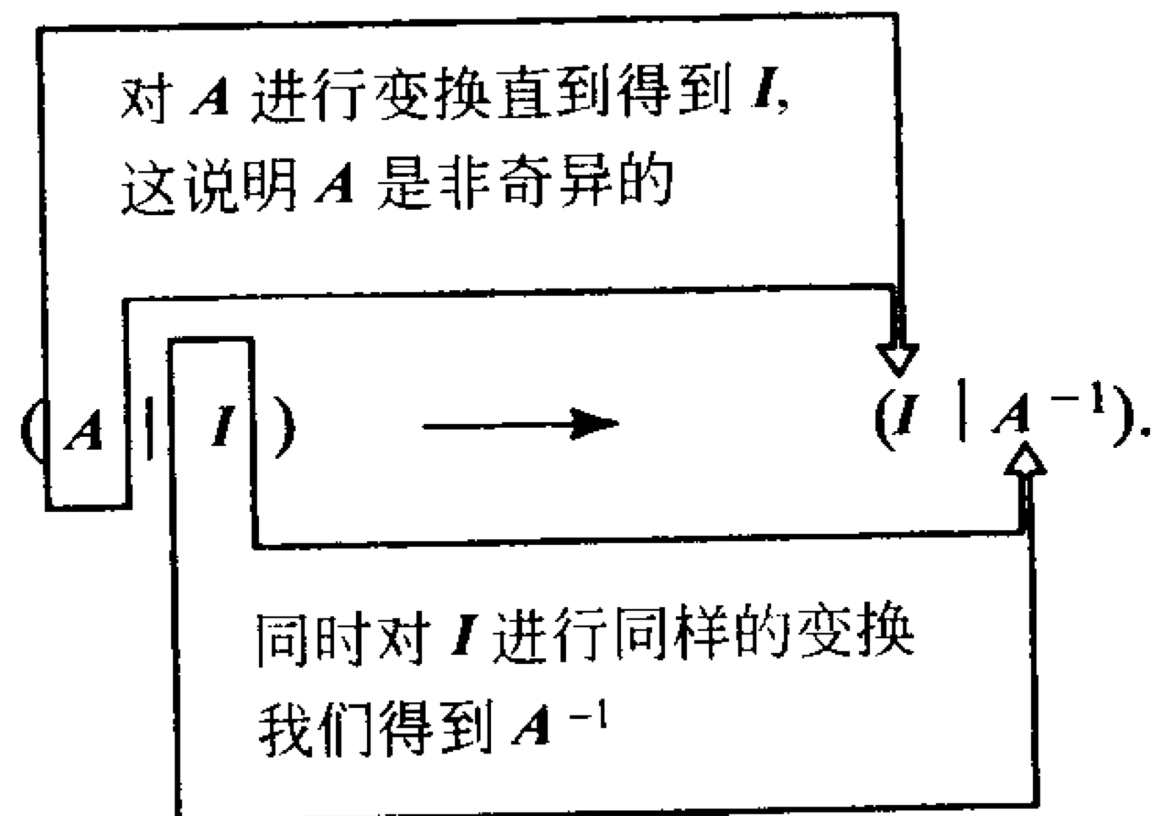
定理 B.3 利用初等行变换求 $\mathbf{A}^{-1}$

如果通过一系列初等行变换能将 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 变换成 $n\times n$ 单位阵，则 $\mathbf{A}$ 是非奇异的. 将 $\mathbf{A}$ 转换为单位阵 $\mathbf{I}$ 的一系列变换将会同样使 $\mathbf{I}$ 转换为 $\mathbf{A}^{-1}$.

可以通过将增广矩阵 $\mathbf{A}$ 和单位阵 $\mathbf{I}$ 组合为一 $n\times 2n$ 矩阵(显示如下)

$$(\mathbf{A}\mid\mathbf{I})=\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right).$$

方便地同时对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{I}$ 执行这些行变换. 在下面的图表中给出了求 $\mathbf{A}^{-1}$的过程：



例 14 通过初等行变换求逆

求出 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 4\\ -5 & 5 & 6\end{pmatrix}$ 的乘法逆.

解 我们将使用与化简增广矩阵时所用到的相同的记号.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[5R_1+R_3]{2R_1+R_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}R_3]{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2+R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{30R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{5}{3}R_3+R_2]{-\frac{1}{2}R_3+R_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 17 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right).$$

由于 $\boldsymbol{I}$ 出现在竖线的左部，我们得出竖线右部的矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

■

如果对$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I})$进行行简化，可以得出如下情形：

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{行变换}} (\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}),$$

其中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 包含了一行零，$\boldsymbol{A}$ 必是奇异的．由于对 $\boldsymbol{B}$ 的进一步简化将得出另一个包含一行零的矩阵，所以我们不可能将 $\boldsymbol{A}$ 转化为 $\boldsymbol{I}$.

B.3 特征值问题

高斯-若尔当消元法可以用来求方阵的特征向量(eigenvector).

定义 B.13 特征值和特征向量

令 $\boldsymbol{A}$ 为一 $n\times n$ 矩阵．λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(eigenvalue)，如果存在线性方程组

$$\boldsymbol{AK} = \lambda\boldsymbol{K} \tag{6}$$

的一个非零解向量 $\boldsymbol{K}$，解向量 $\boldsymbol{K}$ 称为对应于特征值 λ 的特征向量(eigenvector).

eigenvalue 一词是从德语单词 eigrnwert 改写得来的，德语词和英语词的组合直译过来就是“适当的值”．特征值和特征向量也分别为 characteristic value 和 characteristic vector.

例 15 矩阵的特征向量

证明 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\2&3&3\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

的一个特征向量.

证 做乘法 AK 可得

$$AK=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\2&3&3\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\underset{\text{特征值}}{-2})K.$$

根据上一行和定义 B.13 可得 $\lambda=-2$ 是 A 的一个特征值. ■

利用矩阵代数中的性质，我们可以将(6)写成另一形式

$$(A-\lambda I)K=0, \tag{7}$$

其中 I 为乘法单位阵. 如果我们令

$$K=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

那么(7)等价于

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)k_1+\quad a_{12}k_2+\cdots+\quad a_{1n}k_n&=0\\a_{21}k_1+(a_{22}-\lambda)k_2+\cdots+\quad a_{2n}k_n&=0\\\vdots\\a_{n1}k_1+\quad a_{n2}k_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)k_n&=0.\end{aligned} \tag{8}$$

虽然(8)的一个明显的解是 $k_1=0$，$k_2=0$，…，$k_n=0$，但我们只求(8)的非平凡解. 我们知道含有 n 个未知量的 n 维齐次线性方程组有非平凡解当且仅当系数矩阵的行列式等于 0. 所以为了求出(7)的非零解 K，我们必有

$$\det(A-\lambda I)=0. \tag{9}$$

观察(8)我们发现，通过余子式将 $\det(A-\lambda I)$ 展开会得到一个 λ 的 n 次多项式. 方程(9)称为是 A 的*特征方程*(characteristic equation)，所以 A 的特征值是特征方程的根. 为了求出对应于特征值 λ 的特征向量，我们只需通过对增广矩阵 $(A-\lambda I\mid 0)$ 作高斯-若尔当消元来求解方程组 $(A-\lambda I)K=0$.

例 16 特征值/特征向量

求出 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\6&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 为了将特征方程中的行列式展开，我们利用第二行的余子式：

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\6&-1-\lambda&0\\-1&-2&-1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-\lambda^2+12\lambda=0.$$

由$-\lambda^3-\lambda^2+12\lambda=-\lambda(\lambda+4)(\lambda-3)=0$，我们得到特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-4$，$\lambda_3=3$. 为了求出特征向量，我们现在必须根据三个不同的特征值将$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\mid\mathbf{0})$化简三次.

对于$\lambda_1=0$，我们有

$$(\mathbf{A}-0\mathbf{I}\mid\mathbf{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\6&-1&0&0\\-1&-2&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_1+R_3]{-6R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-13&-6&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{13}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&\frac{6}{13}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{-2R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{13}&0\\0&1&\frac{6}{13}&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

于是我们得到$k_1=-\frac{1}{13}k_3$和$k_2=-\frac{6}{13}k_3$. 令$k_3=-13$，可以得到其特征向量[⊖]

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\6\\-13\end{pmatrix}.$$

对于$\lambda_2=-4$，

$$(\mathbf{A}+4\mathbf{I}\mid\mathbf{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&1&0\\6&3&0&0\\-1&-2&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_{31}]{-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&0\\6&3&0&0\\5&2&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5R_1+R_3]{-6R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&0\\0&-9&18&0\\0&-8&16&0\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{8}R_3]{-\frac{1}{9}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&0\\0&1&-2&0\\0&1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[-R_2+R_3]{-2R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

意味着$k_1=-k_3$，$k_2=2k_3$. 令$k_3=1$，则得出第二个特征向量

$$\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

最后，对于$\lambda_3=3$进行高斯-若尔当消元给出

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I}\mid\mathbf{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&2&1&0\\6&-4&0&0\\-1&-2&-4&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以$k_1=-k_3$，$k_2=-3/2k_3$. 令$k_3=-2$得出第三个特征向量

$$\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

■

⊖ 当然可以令k_3为任何不为零的数. 换句话说，特征向量的非零常数倍仍是特征向量.

若 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n，可以证明能够找出一组 n 个线性无关的特征向量[⊖] $\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$，…，$\boldsymbol{K}_n$. 然而，当特征方程有重根时，可能找不出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量.

例 17 特征值/特征向量

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 7\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 由特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ -1 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2=0$$

我们得到 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 是二重特征值. 对于 2×2 矩阵，没有必要用高斯-若尔当消元法. 为了求出相应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量，我们求助于方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{0})$ 的等价形式

$$\begin{aligned}-2k_1+4k_2&=0\\ -k_1+2k_2&=0.\end{aligned}$$

从该方程组可明显看出 $k_1=2k_2$. 所以若我们令 $k_2=1$，就得到单特征向量

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

■

例 18 特征值/特征向量

求出 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 1 & 9 & 1\\ 1 & 1 & 9\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 由特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}9-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 9-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 9-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-11)(\lambda-8)^2=0$$

得到 $\lambda_1=11$，以及 $\lambda_2=\lambda_3=8$ 是二重特征值.

对于 $\lambda_1=11$，由高斯-若尔当消元给出

$$(\boldsymbol{A}-11\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

所以 $k_1=k_3$，$k_2=k_3$. 如果 $k_3=1$，那么

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

现在对于 $\lambda_2=8$ 我们有

$$(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

⊖ 定义列向量线性无关的方式与定义函数线性无关时相同.

在方程 $k_1+k_2+k_3=0$ 中，我们可以任意选择其中两个做变量. 令 $k_2=1$，$k_3=0$，或者，$k_2=0$，$k_3=1$，我们得到两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{K}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{和} \boldsymbol{K}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

■

附录 B 练习

B.1 基本定义和理论

1. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&5\\-6&9\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&6\\8&-10\end{pmatrix}$，求出(a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(b)$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$；(c) $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$.

2. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0\\4&1\\7&3\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\\-4&-2\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$；(b) $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$；(c) $2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

3. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3\\-5&4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&6\\3&2\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{AB}$；(b) $\boldsymbol{BA}$；(c) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}$；(d) $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BB}$.

4. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4\\5&10\\8&12\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4&6&-3\\1&-3&2\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{AB}$；(b) $\boldsymbol{BA}$.

5. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&3\\2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{BC}$；(b) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；(c) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{BA})$；(d) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

6. 如果 $\boldsymbol{A}=(5\quad -6\quad 7)$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{AB}$；(b) $\boldsymbol{BA}$；(c) $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}$；(d) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

7. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4\\8\\-10\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=(2\quad 4\quad 5)$，求出(a) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$；(b) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

8. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&3\\5&7\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；(b) $2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；(c) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

9. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\8&1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&10\\-2&-5\end{pmatrix}$，求出(a) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$；(b) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

10. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&9\\-4&6\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&11\\-7&2\end{pmatrix}$，求出(a) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；(b) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$.

在习题 11～14 中，将所给的和写成单个列矩阵的形式.

11. $4\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

12. $3t\begin{pmatrix}2\\t\\-1\end{pmatrix}+(t-1)\begin{pmatrix}-1\\-t\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3t\\4\\-5t\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&6\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&5&-1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\2t-1\\-t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t\\1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\\-6\end{pmatrix}$

在习题 15～22 中，判断所给的矩阵是奇异的还是非奇异的. 如果是非奇异的，利用定理 B.2 求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

15. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

16. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

17. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ -3 & -5\end{pmatrix}$

18. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

19. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

20. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$

21. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$

22. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 6 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$

在习题 23 和 24 中，证明所给的矩阵对任意实数 t 总是非奇异的. 利用定理 B.2 求出 $\boldsymbol{A}^{-1}(t)$.

23. $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{4t}\\ 4\mathrm{e}^{-t} & 3\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}$

24. $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{t}\sin t & -2\mathrm{e}^{t}\cos t\\ \mathrm{e}^{t}\cos t & \mathrm{e}^{t}\sin t\end{pmatrix}$

在习题 25～28 中，求出 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}/\mathrm{d}t$.

25. $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}5\mathrm{e}^{-t}\\ 2\mathrm{e}^{-t}\\ -7\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$

26. $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin 2t-4\cos 2t\\ -3\sin 2t+5\cos 2t\end{pmatrix}$

27. $\boldsymbol{X}=2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}+4\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-3t}$

28. $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}5t\mathrm{e}^{2t}\\ t\sin 3t\end{pmatrix}$

29. 令 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{4t} & \cos\pi t\\ 2t & 3t^2-1\end{pmatrix}$. 求出 (a) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$；(b) $\int_0^2\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$；(c) $\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$.

30. 令 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2+1} & 3t\\ t^2 & t\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}(t)=\begin{pmatrix}6t & 2\\ 1/t & 4t\end{pmatrix}$. 求出

(a) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ (b) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$ (c) $\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$ (d) $\int_1^2\boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t$

(e) $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)$ (f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)$ (g) $\int_1^t\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{B}(s)\mathrm{d}s$

B.2 高斯消元法和高斯–若尔当消元法

在习题 31～38 中，利用高斯消元法或高斯–若尔当消元法求解所给的方程组.

31. $x+y-2z=14$
$2x-y+z=0$
$6x+3y+4z=1$

32. $5x-2y+4z=10$
$x+y+z=9$
$4x-3y+3z=1$

33. $y+z=-5$
$5x+4y-16z=-10$
$x-y-5z=7$

34. $3x+y+z=4$
$4x+2y-z=7$
$x+y-3z=6$

35. $2x+y+z=4$
$10x-2y+2z=-1$
$6x-2y+4z=8$

36. $x+2z=8$
$x+2y-2z=4$
$2x+5y-6z=6$

37. $x_1+x_2-x_3-x_4=-1$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$

$x_1-x_2+x_3-x_4=3$

$4x_1+x_2-2x_3+x_4=0$

38. $2x_1+x_2+x_3=0$

$x_1+3x_2+x_3=0$

$7x_1+x_2+3x_3=0$

在习题 39 和 40 中，利用高斯-若尔当消元法证明所给的方程组无解.

39. $x+2y+4z=2$

$2x+4y+3z=1$

$x+2y-z=7$

40. $x_1+x_2-x_3+3x_4=1$

$x_2-x_3-4x_4=0$

$x_1+2x_2-2x_3-x_4=6$

$4x_1+7x_2-7x_3=9$

在习题 41～46 中，利用定理 B. 3 求出所给矩阵的 $\mathbf{A}^{-1}$ 或证明没有逆存在.

41. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

42. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 4 & 2 & -2\\ 8 & 10 & -6\end{pmatrix}$

43. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

44. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$

45. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

46. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

B.3 特征值问题

在习题 47～54 中，求出所给矩阵的特征值和特征向量.

47. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -7 & 8\end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix}-8 & -1\\ 16 & 0\end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 9\\ 5 & -1 & 0\end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ -1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix}1 & 6 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

在习题 55 和 56 中，证明所给矩阵有复数特征值. 求出矩阵的特征向量.

55. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 1\end{pmatrix}$

56. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

混合问题

57. 如果 $\mathbf{A}(t)$ 是 2×2 可导函数矩阵，$\mathbf{X}(t)$ 是 2×1 可导函数列矩阵，证明乘积法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)]=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}'(t)+\mathbf{A}'(t)\mathbf{X}(t).$$

58. 推导公式(3). [提示：求出使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. 求出 b_{11}、b_{12}、b_{21} 和 b_{22}. 然后证明 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$.]

59. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

60. 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异的，证明 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

61. 令 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 矩阵. 一般的，是否有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2?$$

62. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对角矩阵(diagonal matrix)，如果其所有非主对角线元素为零——即，$a_{ij}=0$，$i\neq j$. 主对角线上的元素可能是零也可能不是零. 乘法单位阵 $\boldsymbol{I}$ 就是对角矩阵的一个例子.

(a)求出 2×2 对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

的逆，其中 $a_{11}\neq 0$，$a_{22}\neq 0$.

(b)求出主对角线元素均为零的 3×3 对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆.

(c)一般地，主对角线元素均非零的 $n\times n$ 对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆是什么?

附录C　拉普拉斯变换表

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. t	$\frac{1}{s^2}$
3. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$，n 为正整数
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$，$\alpha>-1$
7. $\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
8. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
9. $\sin^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
12. $\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
13. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
14. $\sinh^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\frac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
16. te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
17. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$，n 为正整数
18. $e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
19. $e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
20. $e^{at}\sinh kt$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$
21. $e^{at}\cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
22. $t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

（续）

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$
23. $t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
24. $\sin kt+kt\cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
25. $\sin kt-kt\cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
26. $t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
27. $t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
28. $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
29. $\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
30. $1-\cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
31. $kt-\sin kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
32. $\dfrac{a\sin bt-b\sin at}{ab(a^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
33. $\dfrac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
34. $\sin kt\sinh kt$	$\dfrac{2k^2s}{s^4+4k^4}$
35. $\sin kt\cosh kt$	$\dfrac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
36. $\cos kt\sinh kt$	$\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$
37. $\cos kt\cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4+4k^4}$
38. $J_0(kt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+k^2}}$
39. $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$
40. $\dfrac{2(1-\cos kt)}{t}$	$\ln\dfrac{s^2+k^2}{s^2}$
41. $\dfrac{2(1-\cosh kt)}{t}$	$\ln\dfrac{s^2-k^2}{s^2}$
42. $\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$
43. $\dfrac{\sin at\cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a+b}{s}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a-b}{s}$
44. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
45. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

（续）

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$
46. $\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
47. $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-a^2/4t}-a\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
48. $e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$
49. $-e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ $+\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{be^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+b)}$
50. $\delta(t)$	1
51. $\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
52. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
53. $f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
54. $\mathscr{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
55. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{(n-1)}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
56. $t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
57. $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

附录D　奇数题号的练习答案

练习1.1

1. 二阶线性
3. 一阶，关于x是线性的但关于y不是线性的
5. 四阶线性　**7.** 二阶非线性
9. 三阶线性
15. $X=\dfrac{e^t-1}{e^t-2}$ 定义在 $(-\infty,\ln 2)$ 或 $(\ln 2,\infty)$ 上
23. **(a)** $-3\leq x<\infty$　**(b)** $-3<x<\infty$
25. **(a)** $m=-2$　**(b)** $m=2, m=3$

练习1.2

1. $y=1/(1-4e^{-x})$　**3.** $x=-\cos t+8\sin t$
5. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos t+\dfrac{1}{4}\sin t$　**7.** $y=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$
9. $y=5e^{-x-1}$　**11.** $y=0, y=x^3$
13. $y>0$或$y<0$定义的半平面
15. $x>0$或$x<0$定义的半平面
17. $y>2, y<-2$, 或$-2<y<2$定义的区域
19. 任何不包含（0，0）的区域
21. 是　**23.** 否
25. **(a)** $y=cx$
(b) 任何不与y轴相交的区域
(c) 否，函数在$x=0$点不可微
27. **(b)** $y=1/(1-x)$在$(-\infty,1)$上；$y=-1/(x+1)$在$(-1,\infty)$上
(c) $y=y_0/(1-y_0x), y_0\neq 0$. 考虑 $y_0<0$ 和 $y_0>0$.

练习1.3

1. $\dfrac{dP}{dt}=kP+r; \dfrac{dP}{dt}=kP-r$　**3.** $\dfrac{dP}{dt}=k_1P-k_2P^2$
7. $\dfrac{dx}{dt}=kx(1000-x)$　**9.** $\dfrac{dA}{dt}=-\dfrac{A}{100}$
11. $\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{c\pi}{450}\sqrt{h}$　**13.** $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E(t)$
15. $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv^2$　**17.** $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$
19. $x\dfrac{d^2x}{dt^2}+\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+32x=160$　**21.** $\dfrac{d^2r}{dt^2}+\dfrac{gR^2}{r^2}=0$
23. $\dfrac{dA}{dt}=k(M-A), k>0$　**25.** $\dfrac{dx}{dt}+kx=r, k>0$
27. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

第1章复习题

1. $\dfrac{dy}{dx}=ky$　**3.** $y''+k^2y=0$　**5.** $y''-2y'+y=0$
7. **(a), (d)**　**9.** **(b)**　**11.** **(b)**
13. $y=c_1$和$y=c_2e^x$; c_1和c_2是常数.　**15.** $y'=x^2+y^2$
17. **(a)** 定义域是所有实数
(b) $(-\infty, 0)$或$(0, \infty)$
19. **(c)** $y=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$　**21.** $(0,\infty)$
25. $\dfrac{dv}{dt}=16(1-\sqrt{3}\mu)$

练习2.1

17. 0是渐近稳定的(吸引子)；3是不稳定的(排斥子)
19. 2是半稳定的
21. -2是不稳定的(排斥子)；0是半稳定的；2是渐近稳定的(吸引子)
23. -1是渐近稳定的(吸引子)；0是不稳定的(排斥子)
25. **(a)** mg/k　**(b)** $\sqrt{mg/k}$

练习2.2

1. $y=-\frac{1}{5}\cos 5x+c$　**3.** $y=\frac{1}{3}e^{-3x}+c$
5. $y=cx^4$　**7.** $-3e^{-2y}=2e^{3x}+c$
9. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3=\frac{1}{2}y^2+2y+\ln|y|+c$
11. $4\cos y=2x+\sin 2x+c$
13. $(e^x+1)^{-2}+2(e^y+1)^{-1}=c$
15. $S=ce^{kr}$　**17.** $P=\dfrac{ce^t}{1+ce^t}$
19. $(y+3)^5e^x=c(x+4)^5e^y$　**21.** $y=\sin(\frac{1}{2}x^2+c)$
23. $x=\tan\left(4y-\dfrac{3\pi}{4}\right)$　**25.** $xy=e^{-(1+1/x)}$
27. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x$
29. **(a)** $y=2, y=-2, y=2\dfrac{3-e^{4x-1}}{3+e^{4x-1}}$
33. $y=1$　**35.** $y=1+\dfrac{1}{10}\tan\dfrac{x}{10}$
39. **(a)** $y=-\sqrt{x^2+x-1}$　**(c)** $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

练习2.3

1. $y=ce^{5x}, -\infty<x<\infty$
3. $y=\frac{1}{4}e^{3x}+ce^{-x}, -\infty<x<\infty$
5. $y=\frac{1}{3}+ce^{-x^3}, -\infty<x<\infty$
7. $y=x^{-1}\ln x+cx^{-1}, x>0$
9. $y=cx-x\cos x, x>0$
11. $y=\frac{1}{7}x^3-\frac{1}{5}x+cx^{-4}, x>0$
13. $y=\dfrac{1}{2x^2}e^x+\dfrac{c}{x^2}e^{-x}, x>0$
15. $x=2y^6+cy^4, y>0$
17. $y=\sin x+c\cos x, -\pi/2<x<\pi/2$

⊖ 本附录中的公式与英文原版书一致. ——编辑注

19. $(x+1)e^x y = x^2 + c, x > -1$
21. $(\sec\theta + \tan\theta)r = \theta - \cos\theta + c, -\pi/2 < \theta < \pi/2$
23. $y = e^{-3x} + \frac{c}{x}e^{-3x}, 0 < x < \infty$
25. $y = \frac{e^x}{x} + \frac{2-e}{x}, x > 0$
27. $i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}, -\infty < t < \infty$
29. $(x+1)y = x\ln x - x + 21, x > 0$
31. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-e^{-2x}), & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{1}{2}(e^6-1)e^{-2x}, & x > 3 \end{cases}$
33. $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \leqslant x < 1 \\ (\frac{1}{2}e + \frac{3}{2})e^{-x^2}, & x \geqslant 1 \end{cases}$
35. $y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4x^2\ln x + (1+4e^{-2})x^2, & x > 1 \end{cases}$
37. $y = e^{-e^x}\int_0^x e^{e^t}dt + e^{1-e^x}; y = e^{1-e^x}; y = 1$

练习2.4

1. $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$ 3. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$
5. $x^2y^2 - 3x + 4y = c$ 7. 不恰当
9. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$ 11. 不恰当
13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$ 15. $x^3y^3 - \tan^{-1}3x = c$
17. $-\ln|\cos x| + \cos x\sin y = c$
19. $t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = c$ 21. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$
23. $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$
25. $y^2\sin x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$
27. $k = 10$ 29. $x^2y^2\cos x = c$
31. $x^2y^2 + x^3 = c$ 33. $3x^2y^3 + y^4 = c$
35. $-2ye^{3x} + \frac{10}{3}e^{3x} + x = c$ 37. $e^{y^2}(x^2+4) = 20$
39. (c) $y_1(x) = -x^2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$,
$y_2(x) = -x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$

练习2.5

1. $x\ln|x| + y = cx$
3. $(x-y)\ln|x-y| = y + c(x-y)$
5. $x + y\ln|x| = cy$ 7. $\ln(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$
9. $4x = y(\ln|y| - c)^2$ 11. $y^3 + 3x^3\ln|x| = 8x^3$
13. $\ln|x| = e^{y/x} - 1$ 15. $y^3 = 1 + cx^{-3}$
17. $y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$
19. $e^{t/y} = ct$
21. $y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + \frac{49}{5}x^{-6}$
23. $y = -x - 1 + \tan(x+c)$
25. $2y - 2x + \sin 2(x+y) = c$
27. $4(y - 2x + 3) = (x+c)^2$
29. $-\cot(x+y) + \csc(x+y) = x + \sqrt{2} - 1$

练习2.6

1. $y_2 = 2.980\,0, y_4 = 3.115\,1$
3. $y_{10} = 2.593\,7, y_{20} = 2.653\,3; y = e^x$
5. $y_5 = 0.419\,8, y_{10} = 0.412\,4$
7. $y_5 = 0.563\,9, y_{10} = 0.556\,5$
9. $y_5 = 1.219\,4, y_{10} = 1.269\,6$

第2章复习题

1. $-A/k$,排斥子，吸引子
3. $\frac{dy}{dx} = (y-1)^2(y-3)^3$
5. 当n是偶数时是半稳定的，当n是奇数时是不稳定的；当n是偶数时是半稳定的，当n是奇数时是渐近稳定的
9. $2x + \sin 2x = 2\ln(y^2+1) + c$
11. $(6x+1)y^3 = -3x^3 + c$
13. $Q = \frac{c}{t} + \frac{t^4}{25}(-1 + 5\ln t)$ 15. $y = \frac{1}{4} + c(x^2+4)^{-4}$
17. $y = \csc x, \pi < x < 2\pi$
19. (b) $y = \frac{1}{4}(x + 2\sqrt{y_0} - x_0)^2, x \geqslant x_0 - 2\sqrt{y_0}$

练习3.1

1. 7.9 yr; 10 yr 3. 760
5. $I(15) = 0.00098I_0$ 约为 I_0 为 0.1%
7. 11 h 9. 136.5 h
11. 15,600 yr 13. $T(1) = 36.76$°F; 约为 3.06 min
15. 约为 82.1 s; 约为 145.7 s
17. $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$
19. $A(t) = 1000 - 1000e^{-t/100}$; 0.0975 lb/gal
21. 64.38 lb 23. $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$; $i \to \frac{3}{5}$ 当 $t \to \infty$
25. $q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$; $i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$
27. $i(t) = \begin{cases} 60 - 60e^{-t/10}, & 0 \leqslant t \leqslant 20 \\ 60(e^2-1)e^{-t/10}, & t > 20 \end{cases}$
29. (a) $v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$
(b) $v \to \frac{mg}{k}$ 当 $t \to \infty$
(c) $s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) + s_0$
33. (a) $v(t) = \frac{\rho g}{4k}\left(\frac{k}{\rho}t + r_0\right) - \frac{\rho g r_0}{4k}\left(\frac{r_0}{\frac{k}{\rho}t + r_0}\right)^3$
(b) $33\frac{1}{3}$ min
35. (a) $P(t) = P_0e^{(k_1-k_2)t}$
37. (a) 当 $t \to \infty, A \to \frac{k_1M}{k_1+k_2}$. 观察到当 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 0$, 则 $\frac{k_1M}{k_1+k_2} < M$.
(b) $A(t) = \frac{k_1M}{k_1+k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t})$

练习3.2

1. (a) $N = 2000$
(b) $N(t) = \frac{1.000\,5e^t}{1 + 0.005e^t}$; $N(10) = 1\,834$
3. 1 000 000; 5.29 mo
7. 29.3 g; $X \to 60$ 当 $t \to \infty$; A 为 0 g, B 为 30 g
9. (a) $h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{4A_h}{A_w}t\right)^2$; I is $0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{H}A_w}{4A_h}$
(b) $576\sqrt{10}$ s 或 30.36 min
11. (a) 约为 856.65 s 或 14.31 min
(b) 243 s 或 4.05 min

13. **(a)** $v(t)=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t+c_1\right)$,

其中 $c_1=\tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{k}{mg}}v_0\right)$

(b) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

(c) $s(t)=\dfrac{m}{k}\ln\cosh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t+c_1\right)+c_2$,

其中 $c_2=-\left(\dfrac{m}{k}\right)\ln\cosh c_1$

15. **(a)** $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv^2-\rho V$,

其中 ρ 是水的密度

(b) $v(t)=\sqrt{\dfrac{mg-\rho V}{k}}\tanh\left(\dfrac{\sqrt{kmg-k\rho V}}{m}t+c_1\right)$

(c) $\sqrt{\dfrac{mg-\rho V}{k}}$

17. **(a)** $W=0$ 和 $W=2$

(b) $W(x)=2\,\mathrm{sech}^2(x-c_1)$

(c) $W(x)=2\,\mathrm{sech}^2x$

练习3.3

1. $x(t)=x_0e^{-\lambda_1 t}$

$y(t)=\dfrac{x_0\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})$

$z(t)=x_0\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\right)$

3. 5，20，147天。当$y(t)$和$z(t)$相等时，时间才有意义，因为A和大部分和B的一半都已经耗掉，因此，应该生成C的一半．

5. $\dfrac{dx_1}{dt}=6-\dfrac{2}{25}x_1+\dfrac{1}{50}x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{2}{25}x_1-\dfrac{2}{25}x_2$

7. **(a)** $\dfrac{dx_1}{dt}=3\dfrac{x_2}{100-t}-2\dfrac{x_1}{100+t}$

$\dfrac{dx_2}{dt}=2\dfrac{x_1}{100+t}-3\dfrac{x_2}{100-t}$

(b) $x_1(t)+x_2(t)=150$; $x_2(30)\approx 47.4$ lb

13. $L_1\dfrac{di_2}{dt}+(R_1+R_2)i_2+R_1i_3=E(t)$

$L_2\dfrac{di_3}{dt}+R_1i_2+(R_1+R_3)i_3=E(t)$

15. $i(0)=i_0, s(0)=n-i_0, r(0)=0$

第3章复习题

1. $P(45)=8.99$ billion

3. **(a)** $E(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<4\\ 12e^{-(t-4)/RC}, & 4\leqslant t<6\\ 0, & 6\leqslant t<10\\ 12e^{-(t-10)/RC}, & 10\leqslant t<12\\ 0, & 12\leqslant t<16\\ 12e^{-(t-16)/RC} & 16\leqslant t<18\end{cases}$

5. **(a)** $T(t)=\dfrac{T_2+BT_1}{1+B}+\dfrac{T_1-T_2}{1+B}e^{k(1+B)t}$

(b) $\dfrac{T_2+BT_1}{1+B}$

(c) $\dfrac{T_2+BT_1}{1+B}$

7. $x(\theta)=k\theta-\dfrac{k}{2}\sin 2\theta+c, y(\theta)=k\sin^2\theta$

9. $x(t)=\dfrac{\alpha c_1e^{\alpha k_1 t}}{1+c_1e^{\alpha k_1 t}}, y(t)=c_2(1+c_1e^{\alpha k_1 t})^{k_2/k_1}$

练习4.1

1. $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$ **3.** $y=3x-4x\ln x$

9. $(-\infty,2)$ **11.** $y=\dfrac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})$

13. **(a)** $y=e^x\cos x-e^x\sin x$

(b) 无解

(c) $y=e^x\cos x+e^{-\pi/2}e^x\sin x$

(d) $y=c_2e^x\sin x$，其中 c_2 是任意常数

15. 相关 **17.** 相关

19. 相关 **21.** 无关

23. 这些函数满足微分方程，并且在区间上是线性无关的，因为 $W(e^{-3x},e^{4x})=7e^x\neq 0$; $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{4x}$.

25. 这些函数满足微分方程，并且在区间上是线性无关的，因为 $W(e^x\cos 2x, e^x\sin 2x)=2e^{2x}\neq 0$; $y=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\sin 2x$.

27. 这些函数满足微分方程，并且在区间上是线性无关的，因为 $W(x^3,x^4)=x^6\neq 0$; $y=c_1x^3+c_2x^4$.

29. 这些函数满足微分方程，并且在区间上是线性无关的，因为 $W(x,x^{-2},x^{-2}\ln x)=9x^{-6}\neq 0$; $y=c_1x+c_2x^{-2}+c_3x^{-2}\ln x$.

35. **(b)** $y_p=x^2+3x+3e^{2x}$; $y_p=-2x^2-6x-\frac{1}{3}e^{2x}$

练习4.2

1. $y_2=xe^{2x}$ **3.** $y_2=\sin 4x$

5. $y_2=\sinh x$ **7.** $y_2=xe^{2x/3}$

9. $y_2=x^4\ln|x|$ **11.** $y_2=1$

13. $y_2=x\cos(\ln x)$ **15.** $y_2=x^2+x+2$

17. $y_2=e^{2x}, y_p=-\frac{1}{2}$ **19.** $y_2=e^{2x}, y_p=\frac{5}{2}e^{3x}$

练习4.3

1. $y=c_1+c_2e^{-x/4}$ **3.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$

5. $y=c_1e^{-4x}+c_2xe^{-4x}$ **7.** $y=c_1e^{2x/3}+c_2xe^{-x/4}$

9. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$ **11.** $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

13. $y=e^{-x/3}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{2}}{3}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{2}}{3}x\right)$

15. $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{5x}$ **17.** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+c_3xe^{3x}$

19. $u=c_1e^t+e^{-t}(c_2\cos t+c_3\sin t)$

21. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3x^2e^{-x}$

23. $y=c_1+c_2x+e^{-x/2}\left(c_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

25. $y = c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 x \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 x \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

27. $u = c_1 e^r + c_2 r e^r + c_3 e^{-r} + c_4 r e^{-r} + c_5 e^{-5r}$

29. $y = 2 \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x$ **31.** $y = -\frac{1}{6} e^{-(t-1)} + \frac{1}{6} e^{5(t-1)}$

33. $y = 0$ **35.** $y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} e^{-6x} + \frac{1}{6} x e^{-6x}$

37. $y = e^{5x} - x e^{5x}$ **39.** $y = -2 \cos x$

41. $y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) e^{-\sqrt{3}x}$;
$y = \cosh \sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}} \sinh \sqrt{3}x$

49. **(a)** $x(t) = c_1 \cosh \frac{8}{\sqrt{L}} t + c_2 \sinh \frac{8}{\sqrt{L}} t$
(b) $x(t) = x_0 \cosh \frac{8}{\sqrt{L}} t$ **(c)** 17.69 ft/s

练习4.4

1. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3$
3. $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} + \frac{6}{5} x + \frac{3}{5}$
5. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$
7. $y = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x + (-4x^2 + 4x - \frac{4}{3}) e^{3x}$
9. $y = c_1 + c_2 e^x + 3x$
11. $y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2} + 12 + \frac{1}{2} x^2 e^{x/2}$
13. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x$
15. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x$
17. $y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{4} x e^x \sin 2x$
19. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{12}{25} \sin 2x - \frac{9}{25} \cos 2x$
21. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{6x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{6}{37} \cos x + \frac{1}{37} \sin x$
23. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - x - 3 - \frac{2}{3} x^3 e^x$
25. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + x^2 - 2x - 3$
27. $y = \sqrt{2} \sin 2x - \frac{1}{2}$
29. $y = -200 + 200 e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$
31. $y = -10 e^{-2x} \cos x + 9 e^{-2x} \sin x + 7 e^{-4x}$
33. $x = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$
35. $y = 11 - 11 e^x + 9 x e^x + 2x - 12 x^2 e^x + \frac{1}{2} e^{5x}$
37. $y = 6 \cos x - 6(\cot 1) \sin x + x^2 - 1$
39. $y = \begin{cases} \cos 2x + \frac{5}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{5}{6} \sin 2x, & x > \pi/2 \end{cases}$

练习4.5

1. $(3D - 2)(3D + 2)y = \sin x$
3. $(D - 6)(D + 2)y = x - 6$ **5.** $D(D + 5)^2 y = e^x$
7. $(D - 1)(D - 2)(D + 5)y = x e^{-x}$
9. $D(D + 2)(D^2 - 2D + 4)y = 4$ **15.** D^4 **17.** $D(D - 2)$
19. $D^2 + 4$ **21.** $D^3(D^2 + 16)$ **23.** $(D + 1)(D - 1)^3$
25. $D(D^2 - 2D + 5)$ **27.** $1, x, x^2, x^3, x^4$ **29.** $e^{6x}, e^{-3x/2}$
31. $\cos \sqrt{5}x, \sin \sqrt{5}x$ **33.** $1, e^{5x}, x e^{5x}$
35. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - 6$ **37.** $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 3x$
39. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2} x + 1$
41. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{2}{3} x^4 - \frac{8}{3} x^3 + 8x^2$
43. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{7} x e^{4x}$
45. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - e^x + 3$
47. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{1}{4} \sin x$
49. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} - \frac{1}{49} x e^{4x} + \frac{2}{343} e^{4x}$
51. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x - \frac{1}{4} x^2 e^x + \frac{1}{4} x e^x - 5$
53. $y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{3} e^x \sin x$
55. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x - 2x \cos 5x$
57. $y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \sin x + 2 \cos x - x \cos x$
59. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-8x} + \frac{11}{256} x^2 + \frac{7}{32} x^3 - \frac{1}{16} x^4$
61. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x + x - 13$
63. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2$
65. $y = \frac{5}{8} e^{-8x} + \frac{5}{8} e^{8x} - \frac{1}{4}$
67. $y = -\frac{41}{125} + \frac{41}{125} e^{5x} - \frac{1}{10} x^2 + \frac{9}{25} x$
69. $y = -\pi \cos x - \frac{11}{3} \sin x - \frac{8}{3} \cos 2x + 2x \cos x$
71. $y = 2 e^{2x} \cos 2x - \frac{3}{64} e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{8} x^3 + \frac{3}{16} x^2 + \frac{3}{32} x$

练习4.6

1. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|$
3. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$
5. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x$
7. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x \sinh x$
9. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x} \ln|x| - e^{-2x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{4t}}{t} dt\right), x_0 > 0$
11. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x)$
13. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} - e^{-2x} \sin e^x$
15. $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \ln t - \frac{3}{4} t^2 e^{-t}$
17. $y = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x + \frac{1}{3} x e^x \sin x + \frac{1}{3} e^x \cos x \ln|\cos x|$
19. $y = \frac{1}{4} e^{-x/2} + \frac{3}{4} e^{x/2} + \frac{1}{8} x^2 e^{x/2} - \frac{1}{4} x e^{x/2}$
21. $y = \frac{4}{9} e^{-4x} + \frac{25}{36} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{9} e^{-x}$
23. $y = c_1 x^{-1/2} \cos x + c_2 x^{-1/2} \sin x + x^{-1/2}$
25. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \ln|\sec x + \tan x|$

练习4.7

1. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$ **3.** $y = c_1 + c_2 \ln x$
5. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)$
7. $y = c_1 x^{(2-\sqrt{6})} + c_2 x^{(2+\sqrt{6})}$
9. $y = c_1 \cos(\frac{1}{5} \ln x) + c_2 \sin(\frac{1}{5} \ln x)$
11. $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x$
13. $y = x^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \ln x\right)\right]$
15. $y = c_1 x^3 + c_2 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_3 \sin(\sqrt{2} \ln x)$
17. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^{-3}$
19. $y = c_1 + c_2 x^5 + \frac{1}{5} x^5 \ln x$
21. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + x(\ln x)^2$ **23.** $y = 2 - 2x^{-2}$
25. $y = \cos(\ln x) + 2 \sin(\ln x)$ **27.** $y = \frac{3}{4} - \ln x + \frac{1}{4} x^2$
29. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-8} + \frac{1}{30} x^2$
31. $y = x^2[c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \sin(3 \ln x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10} x$
39. $y = 2(-x)^{1/2} - 5(-x)^{1/2} \ln(-x), x < 0$

练习4.8

1. $x = c_1 e^t + c_2 t e^t$
$y = (c_1 - c_2) e^t + c_2 t e^t$
3. $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t + 1$
$y = c_1 \sin t - c_2 \cos t + t - 1$

5. $x = \frac{1}{5}c_1 \sin t + \frac{1}{5}c_2 \cos t - 2c_3 \sin \sqrt{6}t - 2c_4 \cos \sqrt{6}t$
   $y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin \sqrt{6}t + c_4 \cos \sqrt{6}t$
7. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t$
   $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3 \sin 2t - c_4 \cos 2t - \frac{1}{5}e^t$
9. $x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{17}{15}e^{3t}$
   $y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{4}{15}e^{3t}$
11. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$
   $y = \left(-\frac{3}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{3}{2}c_3\right)e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$
13. $x = c_1e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$
   $y = -\frac{3}{4}c_1e^{4t} + c_2 + 5e^t$
15. $x = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
   $y = (c_1 - c_2 + 2) + (c_2 + 1)t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
17. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$
   $y = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$
   $z = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$
19. $x = -6c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t}$
   $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
   $z = 5c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
21. $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3}$
   $y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3}$
23. $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$
   $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$
   $x = c_1t + c_2$
   $y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3t + c_4$

练习4.9

3. $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$
5. $y = \frac{1}{c_1^2} \ln|c_1x + 1| - \frac{1}{c_1}x + c_2$
7. $\frac{1}{3}y^3 - c_1y = x + c_2$
9. $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
11. $y = -\frac{1}{c_1}\sqrt{1 - c_1^2x^2} + c_2$
13. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$
15. $y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \cdots$
17. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

第4章复习题

1. $y = 0$　3. 错
5. $(-\infty, 0)$; $(0, \infty)$
7. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x} + c_4e^x + c_5xe^x + c_6x^2e^x$;
   $y = c_1x^3 + c_2x^{-5} + c_3x^{-5} \ln x + c_4x + c_5x \ln x + c_6x(\ln x)^2$
9. $y = c_1e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2e^{(1-\sqrt{3})x}$　11. $y = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x}$
13. $y = c_1e^{-x/3} + e^{-3x/2}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$
15. $y = e^{3x/2}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$
17. $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{4}{3}x$
19. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - e^x \cos x \ln|\sec x + \tan x|$
21. $y = c_1x^{-1/3} + c_2x^{1/2}$　23. $y = c_1x^2 + c_2x^3 + x^4 - x^2 \ln x$
25. (a) $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$, $\omega \neq \alpha$;
   $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + Ax \cos \omega x + Bx \sin \omega x$, $\omega = \alpha$
   (b) $y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Ae^{\alpha x}$, $\omega \neq \alpha$;
   $y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Axe^{\omega x}$, $\omega = \alpha$
27. (a) $y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x + c_3x \cosh x + c_4x \sinh x$
   (b) $y_p = Ax^2 \cosh x + Bx^2 \sinh x$
29. $y = e^{x-\pi} \cos x$　31. $y = \frac{13}{4}e^x - \frac{5}{4}e^{-x} - x - \frac{1}{2} \sin x$
33. $y = x^2 + 4$
37. $x = -c_1e^t - \frac{3}{2}c_2e^{2t} + \frac{5}{2}$
   $y = c_1e^t + c_2e^{2t} - 3$
39. $x = c_1e^t + c_2e^{5t} + te^t$
   $y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t} - te^t + 2e^t$

练习5.1

1. $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$　3. $x(t) = -\frac{1}{4} \cos 4\sqrt{6}t$
5. (a) $x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}$; $x\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}$; $x\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$; $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $x\left(\frac{9\pi}{32}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$
   (b) 4 ft/s; 向下
   (c) $t = \frac{(2n+1)\pi}{16}, n = 0, 1, 2, \ldots$
7. (a) 20公斤的物体
   (b) 20公斤的物体；50公斤的物体
   (c) $t=n\pi$,n=0,1,2,⋯;在平衡位置；50公斤的物体向上运动，但是20公斤的物体在n为偶数时向上运动，n为奇数时向下运动
9. $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\sin 2t = \frac{\sqrt{13}}{4}\sin(2t + 0.5880)$
11. (a) $x(t) = -\frac{2}{3}\cos 10t + \frac{1}{2}\sin 10t = \frac{5}{6}\sin(10t - 0.927)$
   (b) $\frac{5}{6}$ ft; $\frac{\pi}{5}$
   (c) 15 周
   (d) 0.721 s
   (e) $\frac{(2n+1)\pi}{20} + 0.0927, n = 0, 1, 2, \ldots$
   (f) $x(3) = -0.597$ ft
   (g) $x'(3) = -5.814$ ft/s
   (h) $x''(3) = 59.702$ ft/s^2
   (i) $\pm 8\frac{1}{3}$ ft/s
   (j) $0.1451 + \frac{n\pi}{5}$; $0.3545 + \frac{n\pi}{5}, n = 0, 1, 2, \ldots$
   (k) $0.3545 + \frac{n\pi}{5}, n = 0, 1, 2, \ldots$

13. 120 lb/ft; $x(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\sin 8\sqrt{3}\,t$

17. (a) 上方 (b) 向上运动

19. (a) 下方 (b) 向上运动

21. $\frac{1}{4}$ s; $\frac{1}{2}$ s, $x(\frac{1}{2})=e^{-2}$; 重物在平衡位置下方大约0.14ft处

23. **(a)** $x(t)=\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-8t}$
(b) $x(t)=-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{5}{3}e^{-8t}$

25. **(a)** $x(t)=e^{-2t}(-\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t)$
(b) $x(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t}\sin(4t+4.249)$
(c) $t=1.294$ s

27. **(a)** $\beta>\frac{5}{2}$ **(b)** $\beta=\frac{5}{2}$ **(c)** $0<\beta<\frac{5}{2}$

29. $x(t)=e^{-t/2}\left(-\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\sqrt{47}}{2}t-\dfrac{64}{3\sqrt{47}}\sin\dfrac{\sqrt{47}}{2}t\right)+\dfrac{10}{3}(\cos 3t+\sin 3t)$

31. $x(t)=\frac{1}{4}e^{-4t}+te^{-4t}-\frac{1}{4}\cos 4t$

33. $x(t)=-\frac{1}{2}\cos 4t+\frac{9}{4}\sin 4t+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t-2e^{-2t}\sin 4t$

35. **(a)** $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k(x-h)-\beta\dfrac{dx}{dt}$ or
$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\dfrac{dx}{dt}+\omega^2x=\omega^2h(t)$,
其中 $2\lambda=\beta/m$ and $\omega^2=k/m$
(b) $x(t)=e^{-2t}(-\frac{56}{13}\cos 2t-\frac{72}{13}\sin 2t)+\frac{56}{13}\cos t+\frac{32}{13}\sin t$

37. $x(t)=-\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{3}{4}t\sin 2t+\frac{5}{4}t\cos 2t$

39. **(b)** $\dfrac{F_0}{2\omega}t\sin\omega t$

45. 4.568 C; 0.0509 s

47. $q(t)=10-10e^{-3t}(\cos 3t+\sin 3t)$
$i(t)=60e^{-3t}\sin 3t$; 10.432 C

49. $q_p=\frac{100}{13}\sin t+\frac{150}{13}\cos t$
$i_p=\frac{100}{13}\cos t-\frac{150}{13}\sin t$

53. $q(t)=-\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t+\sin 10t)+\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$ C

57. $q(t)=\left(q_0-\dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\right)\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}+\sqrt{LC}\,i_0\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}+\dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\cos\gamma t$

$i(t)=i_0\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}-\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\left(q_0-\dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\right)\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}-\dfrac{E_0C\gamma}{1-\gamma^2LC}\sin\gamma t$

练习5.2

1. **(a)** $y(x)=\dfrac{w_0}{24EI}(6L^2x^2-4Lx^3+x^4)$

3. **(a)** $y(x)=\dfrac{w_0}{48EI}(3L^2x^2-5Lx^3+2x^4)$

5. **(a)** $y(x)=\dfrac{w_0}{360EI}(7L^4x-10L^2x^3+3x^5)$
(c) $x\approx 0.51933$, $y_{max}\approx 0.234799$

7. $y(x)=-\dfrac{w_0EI}{P^2}\cosh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x+\left(\dfrac{w_0EI}{P^2}\sinh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L-\dfrac{w_0L\sqrt{EI}}{P\sqrt{P}}\right)\dfrac{\sinh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x}{\cosh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L}+\dfrac{w_0}{2P}x^2+\dfrac{w_0EI}{P^2}$

9. $\lambda=n^2$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=\sin nx$

11. $\lambda=\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$

13. $\lambda=n^2$, $n=0,1,2,\ldots$; $y=\cos nx$

15. $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{25}$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=e^{-x}\sin\dfrac{n\pi x}{5}$

17. $\lambda=\dfrac{n\pi}{L}$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$

19. $\lambda=n^2$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=\sin(n\ln x)$

21. $\lambda=0$; $y=1$
$\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{4}$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\ln x\right)$

23. $x=L/4$, $x=L/2$, $x=3L/4$

25. $\omega_n=\dfrac{n\pi\sqrt{T}}{L\sqrt{\rho}}$, $n=1,2,3,\ldots$; $y=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$

27. $u(r)=\left(\dfrac{u_0-u_1}{b-a}\right)\dfrac{ab}{r}+\dfrac{u_1b-u_0a}{b-a}$

练习5.3

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$

15. **(a)** 5 ft
(b) $4\sqrt{10}$ ft/s
(c) $0\leqslant t\leqslant 15/4\sqrt{10}$; 7.5 ft

17. **(a)** $xv\dfrac{dv}{dx}+v^2=32x$
(b) $\frac{1}{2}v^2x^2-\frac{32}{3}x^3=-288$ **(c)** 约为0.66 s

19. **(a)** $xy''=r\sqrt{1+(y')^2}$.
当 $t=0$, $x=a$, $y=0$, $dy/dx=0$.
(b) 当 $r\neq 1$,

$$y(x)=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{1+r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+r}-\frac{1}{1-r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-r}\right]+\frac{ar}{1-r^2}.$$

当 $r=1$,

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2a}(x^2-a^2)+\frac{1}{a}\ln\frac{a}{x}\right].$$

(c) 当 $r<1$时，轨迹相交.

第5章复习题

1. 8 ft **3.** $\frac{5}{4}$ m

5. 错；系统将受到外力作用

7. 过阻尼 **9.** 14.4 lb

11. $x(t)=-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-4t}$ **13.** $0<m\leqslant 2$

15. $\gamma = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

17. $x(t) = e^{-4t}\left(\dfrac{26}{17}\cos 2\sqrt{2}t + \dfrac{28\sqrt{2}}{17}\sin 2\sqrt{2}t\right) + \dfrac{8}{17}e^{-t}$

19. **(a)** $q(t) = -\frac{1}{150}\sin 100t + \frac{1}{75}\sin 50t$
(b) $i(t) = -\frac{2}{3}\cos 100t + \frac{2}{3}\cos 50t$
(c) $t = \dfrac{n\pi}{50}, n = 0, 1, 2, \ldots$

练习6.1

1. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **3.** $(-5, 15)$

5. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots$

7. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots, (-\pi/2, \pi/2)$

9. $2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k$

13. $$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$$

15. $$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \cdots\right]$$

17. $$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4^2}{6!}x^6 - \frac{7^2\cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{5^2\cdot 2^2}{7!}x^7 - \frac{8^2\cdot 5^2\cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$$

19. $y_1(x) = c_0$; $y_2(x) = c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

21. $y_1(x) = c_0[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots]$
$y_2(x) = c_1[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots]$

23. $$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4\cdot 4!}x^4 + \frac{23\cdot 7}{8\cdot 6!}x^6 - \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{14}{2\cdot 5!}x^5 - \frac{34\cdot 14}{4\cdot 7!}x^7 - \cdots\right]$$

25. $$y(x) = -2\left[1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right] + 6x = 8x - 2e^x$$

27. $y(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4$

29. $y_1(x) = c_0[1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots]$
$y_2(x) = c_1[x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots]$

练习6.2

1. $x=0$，不规则奇点

3. $x=-3$，规则奇点；$x=3$，不规则奇点

5. x–$0, 2i, -2i$,规则奇点

7. $x=-3, 2$,规则奇点

9. $x=0$,不规则奇点；$x=-5, 5, 2$,规则奇点

11. 当 $x = 1$: $p(x) = 5$, $q(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{x+1}$
当 $x = -1$: $p(x) = \dfrac{5(x+1)}{x-1}$, $q(x) = x^2 + x$

13. $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = -1$

15. $r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = 0$
$$y(x) = C_1x^{3/2}\left[1 - \frac{2}{5}x + \frac{2^2}{7\cdot 5\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + 2x - 2x^2 + \frac{2^3}{3\cdot 3!}x^3 - \cdots\right]$$

17. $r_1 = \frac{7}{8}, r_2 = 0$
$$y(x) = C_1x^{7/8}\left[1 - \frac{2}{15}x + \frac{2^2}{23\cdot 15\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{31\cdot 23\cdot 15\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 - 2x + \frac{2^2}{9\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{17\cdot 9\cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$$

19. $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = 0$
$$y(x) = C_1x^{1/3}\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2\cdot 2}x^2 + \frac{1}{3^3\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5\cdot 2}x^2 + \frac{1}{8\cdot 5\cdot 2}x^3 + \cdots\right]$$

21. $r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = 0$
$$y(x) = C_1x^{5/2}\left[1 + \frac{2\cdot 2}{7}x + \frac{2^2\cdot 3}{9\cdot 7}x^2 + \frac{2^3\cdot 4}{11\cdot 9\cdot 7}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \cdots\right]$$

23. $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{1}{3}$
$y(x) = C_1x^{2/3}[1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \cdots]$
$+ c_2x^{1/3}[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + \cdots]$

25. $r_1 = 0, r_2 = -1$
$$y(x) = C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n} + C_2x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$
$$= C_1x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + C_2x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$
$$= \frac{1}{x}[C_1\sinh x + C_2\cosh x]$$

27. $r_1 = 1, r_2 = 0$
$y(x) = C_1x + C_2[x\ln x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{72}x^4 + \cdots]$

29. $r_1 = r_2 = 0$
$$y(x) = C_1y(x) + C_2\left[y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4\cdot 4!}x^4 - \cdots\right)\right],$$
其中 $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x$

33. (b) $y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{\lambda}t)^{2n}=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}t}$

$y_2(t)=t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{\lambda}t)^{2n}=\frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)}{t}$

(c) $y=c_1x\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{x}\right)+c_2x\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{x}\right)$

练习6.3

1. $y=c_1J_{1/3}(x)+c_2J_{-1/3}(x)$ **3.** $y=c_1J_{5/2}(x)+c_2J_{-5/2}(x)$
5. $y=c_1J_0(x)+c_2Y_0(x)$ **7.** $y=c_1J_2(3x)+c_2Y_2(3x)$
9. $y=c_1x^{-1/2}J_{1/2}(\lambda x)+c_2x^{-1/2}J_{-1/2}(\lambda x)$
13. 由习题10得 ，$y=x^{1/2}J_{1/2}(x)$; 由习题11得，$y=x^{1/2}J_{-1/2}(x)$.
15. 由习题10得，$y=x^{-1}J_{-1}(x)$; 由习题11得 $y=x^{-1}J_1(x)$. 因为 $J_{-1}(x)=-J_1(x)$，所以没有新的解。
17. 由习题12和 $\lambda=1$ 以及 $\nu=\pm\frac{3}{2}$，得 $y=\sqrt{x}J_{3/2}(x)$ $y=\sqrt{x}J_{-3/2}(x)$.
23. $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$
27. $y=c_1x^{1/2}J_{1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})+c_2x^{1/2}J_{-1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})$
29. (a) $P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
(b) $P_6(x)$ 满足 $(1-x^2)y''-2xy'+42y=0.$
$P_7(x)$ 满足 $(1-x^2)y''-2xy'+56y=0.$

第6章复习题

3. $R=\sqrt{10}$
7. $r_1=\frac{1}{2}, r_2=0$
$y_1(x)=C_1x^{1/2}[1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^2-\frac{1}{630}x^3+\cdots]$
$y_2(x)=C_2[1-x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{90}x^3+\cdots]$
9. $y_1(x)=c_0[1+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{8}x^4+\cdots]$
$y_2(x)=c_1[x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots]$
11. $r_1=3, r_2=0$
$y_1(x)=C_1x^3[1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}x^2+\frac{1}{120}x^3+\cdots]$
$y_2(x)=C_2[1+x+\frac{1}{2}x^2]$
13. $y(x)=3[1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{15}x^6+\cdots]$
$-2[x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{48}x^7+\cdots]$
15. $x=0$ 是平凡点
17. $y(x)=c_0\left[1-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3^2\cdot 2!}x^6-\frac{1}{3^3\cdot 3!}x^9+\cdots\right]$
$+c_1\left[x-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4\cdot 7}x^7-\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}x^{10}+\cdots\right]$
$+\left[\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3^2\cdot 2!}x^6-\frac{1}{3^3\cdot 3!}x^9+\cdots\right]$

练习7.1

1. $\frac{2}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}$ **3.** $\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$ **5.** $\frac{1+e^{-s\pi}}{s^2+1}$
7. $\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}$ **9.** $\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2}$ **11.** $\frac{e^7}{s-1}$
13. $\frac{1}{(s-4)^2}$ **15.** $\frac{1}{s^2+2s+2}$ **17.** $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
19. $\frac{48}{s^5}$ **21.** $\frac{4}{s^2}-\frac{10}{s}$ **23.** $\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}-\frac{3}{s}$
25. $\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}$ **27.** $\frac{1}{s}+\frac{1}{s-4}$
29. $\frac{1}{s}+\frac{2}{s-2}+\frac{1}{s-4}$ **31.** $\frac{8}{s^3}-\frac{15}{s^2+9}$
33. 用 $\sinh kt=\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}$ 证明
$\mathscr{L}\{\sinh kt\}=\frac{k}{s^2-k^2}$.
35. $\frac{1}{2(s-2)}-\frac{1}{2s}$ **37.** $\frac{2}{s^2+16}$

练习7.2

1. $\frac{1}{2}t^2$ **3.** $t-2t^4$ **5.** $1+3t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3$
7. $t-1+e^{2t}$ **9.** $\frac{1}{4}e^{-t/4}$ **11.** $\frac{5}{7}\sin 7t$
13. $\cos\frac{t}{2}$ **15.** $2\cos 3t-2\sin 3t$ **17.** $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t}$
19. $\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{1}{4}e^{t}$ **21.** $0.3e^{0.1t}+0.6e^{-0.2t}$
23. $\frac{1}{2}e^{2t}-e^{3t}+\frac{1}{2}e^{6t}$ **25.** $\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cos\sqrt{5}t$
27. $-4+3e^{-t}+\cos t+3\sin t$
29. $\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$ **31.** $y=-1+e^t$ **33.** $y=\frac{1}{10}e^{4t}+\frac{19}{10}e^{-6t}$
35. $y=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}$
37. $y=10\cos t+2\sin t-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$
39. $y=-\frac{8}{9}e^{-t/2}+\frac{1}{9}e^{-2t}+\frac{5}{18}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}$

练习7.3

1. $\frac{1}{(s-10)^2}$ **3.** $\frac{6}{(s+2)^4}$
5. $\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-4)^2}$ **7.** $\frac{3}{(s-1)^2+9}$
9. $\frac{s}{s^2+25}-\frac{s-1}{(s-1)^2+25}+3\frac{s+4}{(s+4)^2+25}$ **11.** $\frac{1}{2}t^2e^{-2t}$
13. $e^{3t}\sin t$ **15.** $e^{-2t}\cos t-2e^{-2t}\sin t$
17. $e^{-t}-te^{-t}$ **19.** $5-t-5e^{-t}-4te^{-t}-\frac{3}{2}t^2e^{-t}$
21. $y=te^{-4t}+2e^{-4t}$ **23.** $y=e^{-t}+2te^{-t}$
25. $y=\frac{1}{9}t+\frac{2}{27}-\frac{2}{27}e^{3t}+\frac{10}{9}te^{3t}$ **27.** $y=-\frac{3}{2}e^{3t}\sin 2t$
29. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{t}\cos t+\frac{1}{2}e^{t}\sin t$
31. $y=(e+1)te^{-t}+(e-1)e^{-t}$
33. $x(t)=-\frac{3}{2}e^{-7t/2}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t-\frac{7\sqrt{15}}{10}e^{-7t/2}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t$
37. $\frac{e^{-s}}{s^2}$ **39.** $\frac{e^{-2s}}{s^2}+2\frac{e^{-2s}}{s}$ **41.** $\frac{s}{s^2+4}e^{-\pi s}$
43. $\frac{1}{2}(t-2)^2\mathscr{U}(t-2)$ **45.** $-\sin t\,\mathscr{U}(t-\pi)$
47. $\mathscr{U}(t-1)-e^{-(t-1)}\mathscr{U}(t-1)$ **49. (c)**
51. (f) **53. (a)**
55. $f(t)=2-4\mathscr{U}(t-3)$; $\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{2}{s}-\frac{4}{s}e^{-3s}$
57. $f(t)=t^2\mathscr{U}(t-1)$; $\mathscr{L}\{f(t)\}=2\frac{e^{-s}}{s^3}+2\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}$
59. $f(t)=t-t\mathscr{U}(t-2)$; $\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-2\frac{e^{-2s}}{s}$
61. $f(t)=\mathscr{U}(t-a)-\mathscr{U}(t-b)$; $\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{e^{-as}}{s}-\frac{e^{-bs}}{s}$
63. $y=[5-5e^{-(t-1)}]\mathscr{U}(t-1)$

65. $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\mathscr{U}(t-1) - \frac{1}{2}(t-1)\mathscr{U}(t-1)$
$\quad + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\mathscr{U}(t-1)$

67. $y = \cos 2t - \frac{1}{6}\sin 2(t-2\pi)\mathscr{U}(t-2\pi)$
$\quad + \frac{1}{3}\sin(t-2\pi)\mathscr{U}(t-2\pi)$

69. $y = \sin t + [1-\cos(t-\pi)]\mathscr{U}(t-\pi)$
$\quad - [1-\cos(t-2\pi)]\mathscr{U}(t-2\pi)$

71. $x(t) = \frac{5}{4}t - \frac{5}{16}\sin 4t - \frac{5}{4}(t-5)\mathscr{U}(t-5)$
$\quad + \frac{5}{16}\sin 4(t-5)\mathscr{U}(t-5)$
$\quad - \frac{25}{4}\mathscr{U}(t-5) + \frac{25}{4}\cos 4(t-5)\mathscr{U}(t-5)$

73. $q(t) = \frac{2}{5}\mathscr{U}(t-3) - \frac{2}{5}e^{-5(t-3)}\mathscr{U}(t-3)$

75. **(a)** $i(t) = \frac{1}{101}e^{-10t} - \frac{1}{101}\cos t + \frac{10}{101}\sin t$
$$- \frac{10}{101}e^{-10(t-3\pi/2)}\mathscr{U}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{10}{101}\cos\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\mathscr{U}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{101}\sin\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$
(b) $i_{max} \approx 0.1$ at $t \approx 1.6$, $i_{min} \approx -0.1$ at $t \approx 4.7$

77. $y(x) = \frac{w_0L^2}{16EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$
$$- \frac{w_0}{24EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4\mathscr{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)$$

79. $y(x) = \frac{w_0L^2}{48EI}x^2 - \frac{w_0L}{24EI}x^3$
$$+ \frac{w_0}{60EI}\left[\frac{5L}{2}x^4 - x^5 + \left(x-\frac{L}{2}\right)^5\mathscr{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]$$

练习7.4

1. $\frac{s^4-4}{(s^2+4)^2}$ **3.** $\frac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$ **5.** $\frac{12s-24}{[(s-2)^2+36]^2}$

7. $\frac{6}{s^5}$ **9.** $\frac{s-1}{(s+1)[(s-1)^2+1]}$ **11.** $\frac{1}{s(s-1)}$

13. $\frac{s+1}{s[(s+1)^2+1]}$ **15.** $\frac{1}{s^2(s-1)}$ **17.** $\frac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$

19. **(a)** $e^t - 1$ **(b)** $e^t - t - 1$ **(c)** $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1$

21. $\frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}$ **23.** $\frac{a}{s}\left(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs}-1}\right)$

25. $\frac{\coth(\pi s/2)}{s^2+1}$

27. $y = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}t\sin t$

29. $y = 2\cos 3t + \frac{5}{3}\sin 3t + \frac{1}{6}t\sin 3t$

31. $y = \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8}t\sin 4t - \frac{1}{8}(t-\pi)\sin 4(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)$

33. $y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}t\sin t - \frac{1}{4}t^2\cos t$

35. $f(t) = \sin t$ **37.** $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$

39. $f(t) = e^{-t}$ **41.** $f(t) = \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$

43. $y = \sin t - \frac{1}{2}t\sin t$

45. $i(t) = 100[e^{-10(t-1)} - e^{-20(t-1)}]\mathscr{U}(t-1)$
$\quad - 100[e^{-10(t-2)} - e^{-20(t-2)}]\mathscr{U}(t-2)$

47. $i(t) = \frac{1}{R}(1-e^{-Rt/L})$
$$+ \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-e^{-R(t-n)/L})\mathscr{U}(t-n)$$

49. $x(t) = 2(1 - e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t)$
$$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[1 - e^{-(t-n\pi)}\cos 3(t-n\pi)$$
$$- \frac{1}{3}e^{-(t-n\pi)}\sin 3(t-n\pi)]\mathscr{U}(t-n\pi)$$

练习7.5

1. $y = e^{3(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$ **3.** $y = \sin t + \sin t\,\mathscr{U}(t-2\pi)$

5. $y = -\cos t\,\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \cos t\,\mathscr{U}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$

7. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}]\mathscr{U}(t-1)$

9. $y = e^{-2(t-2\pi)}\sin t\,\mathscr{U}(t-2\pi)$

11. $y = e^{-2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t$
$\quad + \frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\sin 3(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)$
$\quad + \frac{1}{3}e^{-2(t-3\pi)}\sin 3(t-3\pi)\mathscr{U}(t-3\pi)$

13. $y(x) = \begin{cases} \frac{P_0}{EI}\left(\frac{L}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right), & 0 \leqslant x < \frac{L}{2} \\ \frac{P_0L^2}{4EI}\left(\frac{1}{2}x - \frac{L}{12}\right), & \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \end{cases}$

练习7.6

1. $x = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$ **3.** $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t$
$\quad y = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t \qquad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t$

5. $x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$ **7.** $x = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$
$\quad y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6} \qquad y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$

9. $x = 8 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4$
$\quad y = -\frac{2}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4$

11. $x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 - e^{-t}$
$\quad y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

13. $x_1 = \frac{1}{5}\sin t + \frac{2\sqrt{6}}{15}\sin\sqrt{6}t + \frac{2}{5}\cos t - \frac{2}{5}\cos\sqrt{6}t$
$\quad x_2 = \frac{2}{5}\sin t - \frac{\sqrt{6}}{15}\sin\sqrt{6}t + \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}\cos\sqrt{6}t$

15. **(b)** $i_2 = \frac{100}{9} - \frac{100}{9}e^{-900t}$
$\quad i_3 = \frac{80}{9} - \frac{80}{9}e^{-900t}$
(c) $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

17. $i_2 = -\frac{20}{13}e^{-2t} + \frac{375}{1469}e^{-15t} + \frac{145}{113}\cos t + \frac{85}{113}\sin t$
$\quad i_3 = \frac{30}{13}e^{-2t} + \frac{250}{1469}e^{-15t} - \frac{280}{113}\cos t + \frac{810}{113}\sin t$

19. $i_1 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}t - \frac{9\sqrt{2}}{10}e^{-100t}\sinh 50\sqrt{2}t$
$\quad i_2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}t - \frac{6\sqrt{2}}{5}e^{-100t}\sinh 50\sqrt{2}t$

第7章复习题

1. $\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s}$ **3.** 错 **5.** 对 **7.** $\frac{1}{s+7}$

9. $\frac{2}{s^2+4}$ **11.** $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$ **13.** $\frac{1}{6}t^5$ **15.** $\frac{1}{2}t^2e^{5t}$

17. $e^{5t}\cos 2t + \frac{5}{2}e^{5t}\sin 2t$

19. $\cos\pi(t-1)\mathscr{U}(t-1) + \sin\pi(t-1)\mathscr{U}(t-1)$

21. -5 **23.** $e^{-k(s-a)}F(s-a)$

25. $f(t)\mathscr{U}(t-t_0)$ **27.** $f(t-t_0)\mathscr{U}(t-t_0)$

29. $f(t) = t - (t-1)\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-4)$;

$\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2}e^{-s} - \dfrac{1}{s}e^{-4s}$;

$\mathscr{L}\{e^t f(t)\} = \dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{(s-1)^2}e^{-(s-1)} - \dfrac{1}{s-1}e^{-4(s-1)}$

31. $f(t) = 2 + (t-2)\mathscr{U}(t-2)$;

$\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-2s}$;

$\mathscr{L}\{e^t f(t)\} = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2}e^{-2(s-1)}$

33. $y = 5te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$

35. $y = -\frac{6}{25} + \frac{1}{5}t^2 + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{13}{50}e^{-5t} - \frac{4}{25}\mathscr{U}(t-2)$
$\quad - \frac{1}{5}(t-2)^2\mathscr{U}(t-2) + \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$
$\quad - \frac{9}{100}e^{-5(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$

37. $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

39. $x = -\frac{1}{4} + \frac{9}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t}$
$y = t + \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$

41. $i(t) = -9 + 2t + 9e^{-t/5}$

43. $y(x) = \dfrac{w_0}{12EIL}\left[-\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{L}{2}x^4 - \dfrac{L^2}{2}x^3 + \dfrac{L^3}{4}x^2 + \dfrac{1}{5}\left(x - \dfrac{L}{2}\right)^5\mathscr{U}\left(x - \dfrac{L}{2}\right)\right]$

练习8.1

1. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}3 & -5\\ 4 & 8\end{pmatrix}\mathbf{X}$, 其中 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}-3 & 4 & -9\\ 6 & -1 & 0\\ 10 & 4 & 3\end{pmatrix}\mathbf{X}$, 其中 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{X}$, 其中 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y + e^t$

$\dfrac{dy}{dt} = -x + 3y - e^t$

9. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + 2z + e^{-t} - 3t$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y + z + 2e^{-t} + t$

$\dfrac{dz}{dt} = -2x + 5y + 6z + 2e^{-t} - t$

17. 是; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = -2e^{-8t} \neq 0$ 意味着 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上线性无关

19. 不是；$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0$ 对每一个 t 成立.解向量在 $(-\infty, \infty)$ 上线性相关.注意 $\mathbf{X}_3 = 2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$

练习8.2

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{5t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-t}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}e^{t}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}e^{8t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}e^{-10t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}e^{-t}$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}e^{-2t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-12\\ 6\\ 5\end{pmatrix}e^{-t/2} + c_3\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -1\end{pmatrix}e^{-3t/2}$

13. $\mathbf{X} = 3\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{t/2} + 2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{-t/2}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\right]$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 0\end{pmatrix}e^{2t}\right]$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-4\\ -5\\ 2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}e^{5t} + c_3\left[\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}te^{5t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}e^{5t}\right]$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^{t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}e^{t} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{t}\right]$

29. $\mathbf{X} = -7\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}e^{4t} + 13\begin{pmatrix}2t+1\\ t+1\end{pmatrix}e^{4t}$

31. 相应于五重特征值 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量是

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

33. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t + \sin t\end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ 2\sin t - \cos t\end{pmatrix}e^{4t}$

35. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix}e^{4t}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ -\sin t+\cos t\end{pmatrix}e^{4t}$

37. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}5\cos 3t\\ 4\cos 3t+3\sin 3t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\sin 3t\\ 4\sin 3t-3\cos 3t\end{pmatrix}$

39. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\cos t\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\sin t\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

41. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}e^{t}+c_3\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^{t}$

43. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}28\\-5\\25\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}5\cos 3t\\ -4\cos 3t-3\sin 3t\\ 0\end{pmatrix}e^{-2t}$
$+c_3\begin{pmatrix}5\sin 3t\\ -4\sin 3t+3\cos 3t\\ 0\end{pmatrix}e^{-2t}$

45. $\mathbf{X}=-\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}e^{t}-\begin{pmatrix}\cos 5t-5\sin 5t\\ \cos 5t\\ \cos 5t\end{pmatrix}$
$+6\begin{pmatrix}5\cos 5t+\sin 5t\\ \sin 5t\\ \sin 5t\end{pmatrix}$

练习8.3

1. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{t}-\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}t-\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t/2}+c_2\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}e^{3t/2}-\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\ \frac{13}{4}\end{pmatrix}te^{t/2}-\begin{pmatrix}\frac{15}{2}\\ \frac{9}{4}\end{pmatrix}e^{t/2}$

5. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}te^{t}$

7. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+\begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix}t-\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}-t\\ \frac{1}{2}-t\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$

11. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}$
$+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

13. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}te^{t}$

15. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}t$
$+\begin{pmatrix}-\sin t\\ \sin t\tan t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

17. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}2\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}3\sin t\\ \frac{3}{2}\cos t\end{pmatrix}te^{t}$
$+\begin{pmatrix}\cos t\\ -\frac{1}{2}\sin t\end{pmatrix}e^{t}\ln|\sin t|+\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^{t}\ln|\cos t|$

19. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t}$
$+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{2}te^{2t}\\ -e^{t}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{2}te^{2t}\\ \frac{1}{2}t^2e^{3t}\end{pmatrix}$

21. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{2t}+\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}te^{4t}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^{4t}$

23. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

25. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}e^{7t}+\begin{pmatrix}\frac{55}{36}\\ -\frac{19}{4}\end{pmatrix}e^{t}$

27. $\begin{pmatrix}i_1\\i_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-2t}+\frac{6}{29}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{-12t}$
$-\frac{4}{29}\begin{pmatrix}19\\42\end{pmatrix}\cos t+\frac{4}{29}\begin{pmatrix}83\\69\end{pmatrix}\sin t$

练习8.4

1. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}e^{t}&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix}$; $e^{-\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{-2t}\end{pmatrix}$

3. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}t+1&t&t\\t&t+1&t\\-2t&-2t&-2t+1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

7. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}t+1\\t\\-2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}t\\t+1\\-2t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}t\\t\\-2t+1\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X}=c_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t}+c_4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{2t}+\begin{pmatrix}-3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}t+1\\t\\-2t\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}t\\t+1\\-2t\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}t\\t\\-2t+1\end{pmatrix}$

15. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}&\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}\\ -e^{2t}+e^{-2t}&-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$;
$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ -e^{2t}+e^{-2t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$ or
$\mathbf{X}=c_3\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}e^{2t}+c_4\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}$

17. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}e^{2t}+3te^{2t}&-9te^{2t}\\ te^{2t}&e^{2t}-3te^{2t}\end{pmatrix}$;
$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1+3t\\t\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}-9t\\1-3t\end{pmatrix}e^{2t}$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{5t} \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{5t} \end{pmatrix}$ or

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + c_4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{5t}$

第8章复习题

1. $k = \frac{1}{3}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}\right]$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}e^{t}$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_1\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix}e^{-3t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}\ln|\csc t - \cot t|$

15. (b) $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$

练习9.1

1. $h = 0.1$

x_n	y_n
1.00	5.000 0
1.10	3.990 0
1.20	3.254 5
1.30	2.723 6
1.40	2.345 1
1.50	2.080 1

$h = 0.05$

x_n	y_n
1.00	5.000 0
1.05	4.447 5
1.10	3.976 3
1.15	3.575 1
1.20	3.234 2
1.25	2.945 2
1.30	2.700 9
1.35	2.495 2
1.40	2.322 6
1.45	2.178 6
1.50	2.059 2

3. $h = 0.1$

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.10	0.100 5
0.20	0.203 0
0.30	0.309 8
0.40	0.423 4
0.50	0.547 0

$h = 0.05$

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.05	0.050 1
0.10	0.100 4
0.15	0.151 2
0.20	0.202 8
0.25	0.255 4
0.30	0.309 5
0.35	0.365 2
0.40	0.423 0
0.45	0.483 2
0.50	0.546 5

5. $h = 0.1$

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.10	0.095 2
0.20	0.182 2
0.30	0.262 2
0.40	0.336 3
0.50	0.405 3

$h = 0.05$

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.05	0.048 8
0.10	0.095 3
0.15	0.139 7
0.20	0.182 3
0.25	0.223 1
0.30	0.262 3
0.35	0.300 1
0.40	0.336 4
0.45	0.371 5
0.50	0.405 4

7. $h = 0.1$

x_n	y_n
0.00	5.000 0
0.10	0.521 5
0.20	0.536 2
0.30	0.544 9
0.40	0.549 0
0.50	0.550 3

$h = 0.05$

x_n	y_n
0.00	0.500 0
0.05	0.511 6
0.10	0.521 4
0.15	0.529 4
0.20	0.535 9
0.25	0.540 8
0.30	0.544 4
0.35	0.546 9
0.40	0.548 4
0.45	0.549 2
0.50	0.549 5

9. $h = 0.1$

x_n	y_n
1.00	1.000 0
1.10	1.009 5
1.20	1.040 4
1.30	1.096 7
1.40	1.186 6
1.50	1.326 0

$h = 0.05$

x_n	y_n
1.00	1.000 0
1.05	1.002 4
1.10	1.010 0
1.15	1.022 8
1.20	1.041 4
1.25	1.066 3
1.30	1.098 4
1.35	1.138 9
1.40	1.189 5
1.45	1.252 6
1.50	1.331 5

11. $h = 0.1$

x_n	y_n	Exact
0.00	2.000 0	2.000 0
0.10	2.122 0	2.123 0
0.20	2.304 9	2.308 5
0.30	2.585 8	2.595 8
0.40	3.037 8	3.065 0
0.50	3.825 4	3.908 2

$h = 0.5$

x_n	y_n	Exact
0.00	2.000 0	2.000 0
0.05	2.055 3	2.055 4
0.10	2.122 8	2.123 0
0.15	2.205 6	2.206 1
0.20	2.307 5	2.308 5
0.25	2.434 2	2.435 8
0.30	2.593 1	2.595 8
0.35	2.795 3	2.799 7
0.40	3.057 4	3.065 0
0.45	3.405 7	3.418 9
0.50	3.884 0	3.908 2

13. (a) $y_1 = 1.2$

(b) $y''(c)\dfrac{h^2}{2} = 4e^{2c}\dfrac{(0.1)^2}{2} = 0.02e^{2c} \leqslant 0.02e^{0.2} = 0.024\,4$

(c) 精确值为 $y(0.1) = 1.221\,4$. 误差为 0.021 4.

(d) 如果 $h = 0.05$, 那么 $y_2 = 1.21$.

(e) h=0.1时的误差为0.021 4，h=0.05时的误差为0.011 4.

15. (a) $y_1 = 0.8$

(b) $y''(c)\dfrac{h^2}{2} = 5e^{-2c}\dfrac{(0.1)^2}{2} = 0.025e^{-2c} \leqslant 0.025$ for $0 \leqslant c \leqslant 0.1$.

(c) 精确值为 $y(0.1) = 0.823\,4$. 误差为 0.023 4.

(d) 如果 $h = 0.05$, 那么 $y_2 = 0.812\,5$.

(e) h=0.1时误差为0.023 4。h=0.05时的误差为0.010 9.

17. (a) 误差为 $19h^2e^{-3(c-1)}$.

(b) $y''(c)\dfrac{h^2}{2} \leqslant 19(0.1)^2(1) = 0.19$

(c) 如果 $h = 0.1$, 那么 $y_5 = 1.820\,7$. 如果 $h = 0.05$, 那么 $y_{10} = 1.942\,4$.

(d) h=0.1时的误差为0.232 5 . h=0.05时的误差为0.110 9 .

19. (a) 误差为 $\dfrac{1}{(c+1)^2}\dfrac{h^2}{2}$.

(b) $\left|y''(c)\dfrac{h^2}{2}\right| \leqslant (1)\dfrac{(0.1)^2}{2} = 0.005$

(c) 如果 $h = 0.1$、那么 $y_5 = 0.419\,8$. 如果 $h = 0.05$, 那么 $y_{10} = 0.412\,4$.

(d) h=0.1时的误差为0.014 3 . h=0.05时的误差为0.006 9 .

练习9. 2

1.

x_n	y_n	Exact
0.00	2.000 0	2.000 0
0.10	2.123 0	2.123 0
0.20	2.308 5	2.308 5
0.30	2.595 8	2.595 8
0.40	3.064 9	3.065 0
0.50	3.907 8	3.908 2

3.

x_n	y_n
1.00	5.000 0
1.10	3.972 4
1.20	3.228 4
1.30	2.694 5
1.40	2.316 3
1.50	2.053 3

5.

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.10	0.100 3
0.20	0.202 7
0.30	0.309 3
0.40	0.422 8
0.50	0.546 3

7.

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.10	0.095 3
0.20	0.182 3
0.30	0.262 4
0.40	0.336 5
0.50	0.405 5

9.

x_n	y_n
0.00	0.500 0
0.10	0.521 3
0.20	0.535 8
0.30	0.544 3
0.40	0.548 2
0.50	0.549 3

11.

x_n	y_n
1.00	1.000 0
1.10	1.010 1
1.20	1.041 7
1.30	1.098 9
1.40	1.190 5
1.50	1.333 3

13. (a) $v(5) = 35.767\,8$

(c) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\sqrt{\dfrac{kg}{m}}\,t$; $v(5) = 35.767\,8$

15. (a) $h = 0.1$

x_n	y_n
1.00	1.000 0
1.10	1.251 1
1.20	1.693 4
1.30	2.942 5
1.40	903.028 2

$h = 0.05$

x_n	y_n
1.00	1.000 0
1.05	1.111 2
1.10	1.251 1
1.15	1.434 8
1.20	1.693 4
1.25	2.104 7
1.30	2.956 0
1.35	7.898 1
1.40	1.1E + 15

17. (a) $y_1 = 0.823\,416\,67$

(b) $y^{(5)}(c)\dfrac{h^5}{5!} = 40e^{-2c}\dfrac{h^5}{5!} \leqslant 40e^{2(0)}\dfrac{(0.1)^5}{5!} = 3.333 \times 10^{-6}$

(c) 精确值为 $y(0.1) = 0.823\,413\,441\,3$. 误差为 $3.225 \times 10^{-6} \leqslant 3.333 \times 10^{-6}$.

(d) If $h = 0.05$, $y_2 = 0.823\,413\,63$.

(e) 当 $h = 0.1$ 误差为 3.225×10^{-6}. 当 $h = 0.05$ 误差为 1.854×10^{-7}.

19. (a) $y^{(5)}(c)\dfrac{h^5}{5!} = \dfrac{24}{(c+1)^5}\dfrac{h^5}{5!}$

(b) $\dfrac{24}{(c+1)^5}\dfrac{h^5}{5!} \leqslant 24\dfrac{(0.1)^5}{5!} = 2.000\,0 \times 10^{-6}$

(c) $h = 0.1$, $y_5 = 0.405\,465\,17$.
$h = 0.05$, $y_{10} = 0.405\,465\,11$.

练习9.3

1. $y(x) = -x + e^x$; $y(0.2) = 1.021\,4$, $y(0.4) = 1.091\,8$, $y(0.6) = 1.222\,1$, $y(0.8) = 1.425\,5$

3.

x_n	y_n
0.00	1.000 0
0.20	0.732 8
0.40	0.646 1
0.60	0.658 5
0.80	0.723 2

5.

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.20	0.202 7
0.40	0.422 8
0.60	0.684 1
0.80	1.029 7
1.00	1.556 9

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.10	0.100 3
0.20	0.202 7
0.30	0.309 3
0.40	0.422 8
0.50	0.546 3
0.60	0.684 2
0.70	0.842 3
0.80	1.029 7
0.90	1.260 3
1.00	1.557 6

7.

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.20	0.002 6
0.40	0.020 1
0.60	0.063 0
0.80	0.136 0
1.00	0.238 5

x_n	y_n
0.00	0.000 0
0.10	0.000 3
0.20	0.002 6
0.30	0.008 7
0.40	0.020 0
0.50	0.037 9
0.60	0.062 9
0.70	0.095 6
0.80	0.136 0
0.90	0.183 7
1.00	0.238 4

练习9.4

1. $y(x) = -2e^{2x} + 5xe^{2x}$; $y(0.2) = -1.491\,8$, $y_2 = -1.680\,0$

3. $y_1 = -1.492\,8$, $y_2 = -1.491\,9$

5. $y_1 = 1.464\,0$, $y_2 = 1.464\,0$

7. $x_1 = 8.305\,5$, $y_1 = 3.419\,9$; $x_2 = 8.305\,5$, $y_2 = 3.419\,9$

9. $x_1 = -3.912\,3$, $y_1 = 4.285\,7$; $x_2 = -3.912\,3$, $y_2 = 4.285\,7$

11. $x_1 = 0.417\,9$, $y_1 = -2.182\,4$; $x_2 = 0.417\,3$, $y_2 = -2.182\,1$

练习9.5

1. $y_1 = -5.677\,4$, $y_2 = -2.580\,7$, $y_3 = 6.322\,6$

3. $y_1 = -0.225\,9$, $y_2 = -0.335\,6$, $y_3 = -0.330\,8$, $y_4 = -0.216\,7$

5. $y_1 = 3.375\,1$, $y_2 = 3.630\,6$, $y_3 = 3.644\,8$, $y_4 = 3.235\,5$, $y_5 = 2.141\,1$

7. $y_1 = 3.884\,2$, $y_2 = 2.964\,0$, $y_3 = 2.206\,4$, $y_4 = 1.582\,6$, $y_5 = 1.068\,1$, $y_6 = 0.643\,0$, $y_7 = 0.291\,3$

9. $y_1 = 0.266\,0$, $y_2 = 0.509\,7$, $y_3 = 0.735\,7$, $y_4 = 0.947\,1$, $y_5 = 1.146\,5$, $y_6 = 1.335\,3$, $y_7 = 1.514\,9$, $y_8 = 1.685\,5$, $y_9 = 1.847\,4$

11. $y_1 = 0.349\,2$, $y_2 = 0.720\,2$, $y_3 = 1.136\,3$, $y_4 = 1.623\,3$, $y_5 = 2.211\,8$, $y_6 = 2.938\,6$, $y_7 = 3.849\,0$

13. (c) $y_0 = -2.275\,5$, $y_1 = -2.075\,5$, $y_2 = -1.858\,9$, $y_3 = -1.612\,6$, $y_4 = -1.327\,5$

第9章复习题

1. $h = 0.1$时的数值方法比较

x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格-库塔法
1.00	2.000 0	2.000 0	2.000 0
1.10	2.138 6	2.154 9	2.155 6
1.20	2.309 7	2.343 9	2.345 4
1.30	2.513 6	2.567 2	2.569 5
1.40	2.750 4	2.824 6	2.827 8
1.50	3.020 1	3.115 7	3.119 7

$h = 0.05$ 时的数值方法比较

x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格-库塔法
1.00	2.000 0	2.000 0	2.000 0
1.05	2.069 3	2.073 5	2.073 6
1.10	2.146 9	2.155 4	2.155 6
1.15	2.232 9	2.245 9	2.246 2
1.20	2.327 2	2.345 0	2.345 4
1.25	2.429 9	3.452 7	2.453 2
1.30	2.541 0	2.568 9	2.569 5
1.35	2.660 4	2.693 7	2.694 4
1.40	2.788 3	2.826 9	2.827 8
1.45	2.924 5	2.968 6	2.969 6
1.50	3.069 0	3.118 7	3.119 7

3. $h = 0.1$ 时的数值方法比较

x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格-库塔法
0.50	0.500 0	0.500 0	0.500 0
0.60	0.600 0	0.604 8	0.604 9
0.70	0.709 5	0.719 1	0.719 4
0.80	0.828 3	0.842 7	0.843 1
0.90	0.955 9	0.975 2	0.975 7
1.00	1.092 1	1.116 3	1.116 9

$h = 0.05$ 时的数值方法比较

x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格-库塔法
0.50	0.500 0	0.500 0	0.500 0
0.55	0.550 0	0.551 2	0.551 2
0.60	0.602 4	0.604 9	0.604 9
0.65	0.657 3	0.661 0	0.661 0
0.70	0.714 4	0.719 4	0.719 4
0.75	0.773 9	0.780 2	0.780 1
0.80	0.835 6	0.843 1	0.843 1
0.85	0.899 6	0.908 3	0.908 3
0.90	0.965 7	0.975 7	0.975 7
0.95	1.034 0	1.045 3	1.045 2
1.00	1.104 4	1.117 0	1.116 9

5. $h = 0.2$: $y(0.2) \approx 3.2$; $h = 0.1$: $y(0.2) \approx 3.23$

7. $x(0.2) \approx 1.62$, $y(0.2) \approx 1.84$

练习10.1

1. $x' = y$
$y' = -9\sin x$; 临界点在$(\pm n\pi, 0)$

3. $x' = y$
$y' = x^2 + y(x^3 - 1)$;临界点在 $(0, 0)$

5. $x' = y$
$y' = \epsilon x^3 - x$;
临界点在 $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right)$

7. $(0, 0)$ 与 $(-1, -1)$

9. $(0, 0)$ 与 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

11. $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 16)$, 与 $(4, 12)$

13. $(0, y)$, y 取任意值

15. $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$

17. **(a)** $x = c_1e^{5t} - c_2e^{-t}$ **(b)** $x = -2e^{-t}$
$y = 2c_1e^{5t} + c_2e^{-t}$ $y = 2e^{-t}$

19. **(a)** $x = c_1(4\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2(4\sin 3t + 3\cos 3t)$
$y = c_1(5\cos 3t) + c_2(5\sin 3t)$
(b) $x = 4\cos 3t - 3\sin 3t$
$y = 5\cos 3t$

21. **(a)** $x = c_1(\sin t - \cos t)e^{4t} + c_2(-\sin t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2c_1(\cos t)e^{4t} + 2c_2(\sin t)e^{4t}$
(b) $x = (\sin t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2(\cos t)e^{4t}$

23. $r = \frac{1}{\sqrt[4]{4t + c_1}}$, $\theta = t + c_2$; $r = 4\frac{1}{\sqrt[4]{1\,024t + 1}}$, $\theta = t$;
解随着t的增加以螺旋的方式接近原点.

25. $r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_1e^{-2t}}}$, $\theta = t + c_2$; $r = 1$, $\theta = t$（或$x = \cos t$ 和 $y = \sin t$) 时满足 $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$ 的解 $r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2t}}}$, $\theta = t$ 是满足 $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$ 的解.这个解随着t的增加以螺旋的方式接近半径 $r=1$的圆.

27. 不存在临界点，因此也没有周期解.

29. 存在一个包含临界点（0，0）的周期解.

练习10.2

1. **(a)** 如果$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$在直线$y=2x$上，那么$\mathbf{X}(t)$沿着这条直线接近（0，0）.对所有其他的初始条件，$\mathbf{X}(t)$从直线$y=-x/2$的方向接近（0，0）点.

3. **(a)** 所有的解都是不稳定螺旋点，随着t的增加趋向无界.

5. **(a)** 所有的解从直线$y=x$的方向接近（0，0）点.

7. **(a)** 如果$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$在直线$y=3x$上，那么$\mathbf{X}(t)$沿着这条直线接近（0，0）点.对所有的其他初始条件，$\mathbf{X}(t)$是无界的，$y=x$是它们的渐近线.

9. 鞍点 **11.** 鞍点

13. 退化稳定点 **15.** 稳定螺旋点 **17.** $|\mu| < 1$

19. 为鞍点时，$\mu < -1$；为不稳定螺旋点时，$-1 < \mu < 3$.

23. **(a)** $(-3, 4)$
(b) 不稳定点或鞍点
(c) $(0, 0)$是鞍点

25. **(a)** $(\frac{1}{2}, 2)$
(b) 不稳定螺旋点
(c) $(0, 0)$是不稳定螺旋点

练习10.3

1. $r = r_0 e^{\alpha t}$
3. $x=0$是不稳定的；$x=n+1$是渐近稳定的.
5. $T = T_0$ 不稳定的.
7. $x = \alpha$是不稳定的；$x = \beta$是渐近稳定的.
9. $P = a/b$ 是渐近稳定的；$P = c$ 是不稳定的.
11. $(\frac{1}{2}, 1)$是稳定螺旋点
13. $(\sqrt{2}, 0)$ 和 $(-\sqrt{2}, 0)$ 是鞍点；$(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ 是稳定螺旋点.
15. $(1, 1)$ 是稳定点；$(1, -1)$ 是鞍点；$(2, 2)$是鞍点；$(2, -2)$ 是不稳定螺旋点.
17. $(0, -1)$是鞍点；$(0, 0)$是不可分类的；$(0, 1)$是稳定的，但是不能进一步对它分类.
19. $(0, 0)$ 是不稳定点；$(10, 0)$ 是鞍点；$(0, 16)$是鞍点；$(4, 12)$ 是稳定点.
21. $\theta = 0$ 是鞍点. 无法对$\theta = \pi/3$ 或 $\theta = -\pi/3$.进行分类.
23. 无法对$x = 0$进行分类.
25. 无法对$x = 0$进行分类，但是$x = 1/\sqrt{\epsilon}$ 和 $x = -1/\sqrt{\epsilon}$ 都是鞍点.
29. **(a)** $(0, 0)$是稳定螺旋点.
33. **(a)** $(1, 0), (-1, 0)$
35. $|v_0| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$
37. 如果 $\beta > 0$, $(0, 0)$ 是唯一的临界点，并且是稳定的. 如果$\beta < 0$, $(0, 0)$, $(\hat{x}, 0)$ 和 $(-\hat{x}, 0)$ 是临界点，其中$\hat{x}^2 = -\alpha/\beta$. $(0, 0)$是稳定点，但 $(\hat{x}, 0)$ 和$(-\hat{x}, 0)$ 都是鞍点.
39. **(b)** $(5\pi/6, 0)$是鞍点.
(c) $(\pi/6, 0)$是中心点.

练习10.4

1. $|\omega_0| < \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$

5. **(a)** 首先证明 $y^2 = v_0^2 + g\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x_0^2}\right)$.

9. **(a)** 新的临界点是$(d/c - \epsilon_2/c, a/b + \epsilon_1/b)$.
(b) 是
11. (0，0)是不稳定点，(0，100)是稳定点，(50，0)是稳定点，(20，40)是鞍点.
17. **(a)** (0，0)是唯一的临界点.

第10章复习题

1. 对 **3.** 中心或鞍点 **5.** 错
7. 错 **9.** $\alpha = -1$
11. $r = 1/\sqrt[3]{3t+1}$, $\theta = t$. 解曲线以螺旋的方式接近原点
13. **(a)** 中心 **(b)** 退化稳定点
15. 当$\alpha \leqslant 0$时，(0，0)是稳定临界点.
17. $x=1$是不稳定点；$x=-1$是渐近稳定点.
19. 当$\beta^2 > 12\text{kms}^2$时，系统是过阻尼的，当$\beta^2 < 12\text{kms}^2$时，系统是欠阻尼的.

练习11.1

7. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ **9.** $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ **11.** $\|1\| = \sqrt{p}$; $\left\|\cos\dfrac{n\pi}{p}x\right\| = \sqrt{\dfrac{p}{2}}$

21. **(a)** $T = 1$ **(b)** $T = \pi L/2$
(c) $T = 2\pi$ **(d)** $T = \pi$
(e) $T = 2\pi$ **(f)** $T = 2p$

练习11.2

1. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$

3. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right\}$

5. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left(\dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \dfrac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\right)\sin nx\right\}$

7. $f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}\cos nx$

11. $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi}{2}x + \dfrac{3}{n}\left(1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}x\right\}$

13. $f(x) = \dfrac{9}{4} + 5\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi}{5}x + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{5}x\right\}$

15. $f(x) = \dfrac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$

19. Set $x = \pi/2$.

练习11.3

1. 奇函数 **3.** 既不是偶函数也不是奇函数 **5.** 偶函数
7. 奇函数 **9.** 既不是偶函数也不是奇函数

11. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$

13. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

15. $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$

17. $f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$

19. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n(1+\pi)}{n}\sin nx$

21. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi}{2}x$

23. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos nx$

25. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n}\cos n\pi x$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}\sin n\pi x$

27. $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos 2nx$

$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$

29. $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin nx$

31. $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n\right\}\sin\frac{n\pi}{2}x$

33. $f(x) = \frac{5}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x$

$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3}\right\}\sin n\pi x$

35. $f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right\}$

37. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x$

39. $x_p(t) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n(10-n^2)}\sin nt$

41. $x_p(t) = \frac{\pi^2}{18} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-48)}\cos nt$

43. $x(t) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{10-n^2}\left[\frac{1}{n}\sin nt - \frac{1}{\sqrt{10}}\sin\sqrt{10}t\right]$

45. (b) $y_p(x) = \frac{2w_0L^4}{EI\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}\sin\frac{n\pi}{L}x$

47. $y_p(x) = \frac{w_0}{2k} + \frac{2w_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n(EIn^4+k)}\cos nx$

练习11.4

1. $y = \cos\sqrt{\lambda_n}\,x$; $\cot\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$; 0.740 2, 11.734 9, 41.438 8, 90.808 2; $\cos 0.860\,3x$, $\cos 3.425\,6x$, $\cos 6.437\,3x$, $\cos 9.529\,3x$

5. $\frac{1}{2}(1 + \sin^2\sqrt{\lambda_n})$

7. (a) $\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ln 5}\right)^2$, $y = \sin\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) $\frac{d}{dx}[xy'] + \frac{\lambda}{x}y = 0$

(c) $\int_1^5 \frac{1}{x}\sin\left(\frac{m\pi}{\ln 5}\ln x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)dx = 0, m \neq n$

9. $\frac{d}{dx}[xe^{-x}y'] + ne^{-x}y = 0$; $\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx = 0$, $m \neq n$

11. (a) $\lambda = 16n^2$, $y = \sin(4n\tan^{-1}x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\sin(4m\tan^{-1}x)\sin(4n\tan^{-1}x)\,dx = 0$, $m \neq n$

练习11.5

1. 1.277, 2.339, 3.391, 4.441

3. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i J_1(2\lambda_i)}J_0(\lambda_i x)$

5. $f(x) = 4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i J_1(2\lambda_i)}{(4\lambda_i^2+1)J_0^2(2\lambda_i)}J_0(\lambda_i x)$

7. $f(x) = 20\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i J_2(4\lambda_i)}{(2\lambda_i^2+1)J_1^2(4\lambda_i)}J_1(\lambda_i x)$

9. $f(x) = \frac{9}{2} - 4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_2(3\lambda_i)}{\lambda_i^2 J_0^2(3\lambda_i)}J_0(\lambda_i x)$

13. $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \cdots$

19. $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \cdots$,
$f(x) = |x|$ on $(-1, 1)$

第11章复习题

1. 对 **3.** cosine **5.** 错 **7.** 5.5, 1, 0

9. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)\,dx = 0$, $m \neq n$

13. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos n\pi x + \frac{2}{n}(-1)^n\sin n\pi x\right\}$

15. $f(x) = 1 - e^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$,

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi[1-(-1)^n e^{-1}]}{1+n^2\pi^2}\sin n\pi x$

17. $\lambda = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{36}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$y = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\ln x\right)$

19. $f(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(2\lambda_i)}{\lambda_i J_1^2(4\lambda_i)}J_0(\lambda_i x)$

练习12.1

1. 可能的情形都概括在 $u = c_1e^{c_2(x+y)}$ 中，其中 c_1 和 c_2 是常数.

3. $u = c_1e^{y+c_2(x-y)}$ **5.** $u = c_1(xy)^{c_2}$

7. 不可分离

9. $u = e^{-t}(A_1e^{k\lambda^2t}\cosh\lambda x + B_1e^{k\lambda^2t}\sinh\lambda x)$
$u = e^{-t}(A_2e^{-k\lambda^2t}\cos\lambda x + B_2e^{-k\lambda^2t}\sin\lambda x)$
$u = (c_7x + c_8)c_9e^{-t}$

11. $u = (c_1\cosh\lambda x + c_2\sinh\lambda x) \times (c_3\cosh\lambda at + c_4\sinh\lambda at)$
$u = (c_5\cos\lambda x + c_6\sin\lambda x)(c_7\cos\lambda at + c_8\sin\lambda at)$
$u = (c_9x + c_{10})(c_{11}t + c_{12})$

13. $u = (c_1\cosh\lambda x + c_2\sinh\lambda x)(c_3\cos\lambda y + c_4\sin\lambda y)$
$u = (c_5\cos\lambda x + c_6\sin\lambda x)(c_7\cosh\lambda y + c_8\sinh\lambda y)$
$u = (c_9x + c_{10})(c_{11}y + c_{12})$

15. 当 $\lambda^2 > 0$ 时有三种可能的情形：
$u = (c_1\cosh\lambda x + c_2\sinh\lambda x) \times (c_3\cosh\sqrt{1-\lambda^2}y + c_4\sinh\sqrt{1-\lambda^2}y)$,
$\lambda^2 < 1$

$$u=(c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x)\times(c_3\cos\sqrt{\lambda^2-1}y+c_4\sin\sqrt{\lambda^2-1}y),$$
$\lambda^2>1$
$$u=(c_1\cosh x+c_2\sinh x)(c_3y+c_4),$$
$\lambda^2=1$

对于 $-\lambda^2<0$ 时的情况类似.对 $\lambda^2=0$, 我们有
$$u=(c_1x+c_2)(c_3\cosh y+c_4\sinh y).$$

17. 椭圆型 **19.** 抛物型 **21.** 双曲型
23. 抛物型 **25.** 双曲型

练习12.2

1. $k\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t},0<x<L,t>0$

$u(0,t)=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0,t>0$

$u(x,0)=f(x),0<x<L$

3. $k\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t},0<x<L,t>0$

$u(0,t)=100,\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=-hu(L,t),t>0$

$u(x,0)=f(x),0<x<L$

5. $a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2},0<x<L,t>0$

$u(0,t)=0,u(L,t)=0,t>0$

$u(x,0)=x(L-x),\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<x<L$

7. $a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\beta\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2},0<x<L,t>0$

$u(0,t)=0,u(L,t)=\sin\pi t,t>0$

$u(x,0)=f(x),\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,0<x<L$

9. $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,0<x<4,0<y<2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,u(4,y)=f(y),0<y<2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,u(x,2)=0,0<x<4$

练习12.3

1. $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-\cos\frac{n\pi}{2}+1}{n}\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

3. $u(x,t)=\dfrac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx+\dfrac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\dfrac{n\pi}{L}x$

5. $u(x,t)=e^{-ht}\left[\dfrac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx+\dfrac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\dfrac{n\pi}{L}x\right]$

练习12.4

1. $u(x,t)=\dfrac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\cos\dfrac{n\pi a}{L}t\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

3. $u(x,t)=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi a}{L}t\sin\dfrac{\pi}{L}x-\dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi a}{L}t\sin\dfrac{5\pi}{L}x+\dfrac{1}{7^2}\cos\dfrac{7\pi a}{L}t\sin\dfrac{7\pi}{L}x-\cdots\right)$

5. $u(x,t)=\dfrac{1}{a}\sin at\sin x$

7. $u(x,t)=\dfrac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\dfrac{n\pi a}{L}t\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

9. $u(x,t)=e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\cos q_nt+\dfrac{\beta}{q_n}\sin q_nt\right\}\sin nx,$

其中 $A_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ and $q_n=\sqrt{n^2-\beta^2}$

11. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}at+B_n\sin\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}at\right)\times\sin\dfrac{n\pi}{L}x,$

其中 $A_n=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi}{L}x\,dx$

$B_n=\dfrac{2L}{n^2\pi^2a}\int_0^L g(x)\sin\dfrac{n\pi}{L}x\,dx$

15. $u(x,t)=\sin x\cos 2at+t$

17. $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\sin 2x\sin 2at$

练习12.5

1. $u(x,y)=\dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,dx\right)\times\sinh\dfrac{n\pi}{a}y\sin\dfrac{n\pi}{a}x$

3. $u(x,y)=\dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,dx\right)\times\sinh\dfrac{n\pi}{a}(b-y)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$

5. $u(x,y)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\sinh n\pi}\sinh n\pi x\cos n\pi y$

7. $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{[1-(-1)^n]}{n}\times\dfrac{n\cosh nx+\sinh nx}{n\cosh n\pi+\sinh n\pi}\sin ny$

9. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh n\pi y+B_n\sinh n\pi y)\sin n\pi x,$

其中 $A_n=200\dfrac{[1-(-1)^n]}{n\pi}$

$B_n=200\dfrac{[1-(-1)^n]}{n\pi}\dfrac{[2-\cosh n\pi]}{\sinh n\pi}$

11. $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right)e^{-ny}\sin nx$

13. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x,$

其中 $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$

$B_n=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\left(\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx-A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b\right)$

15. $u=u_1+u_2$, 其中

$u_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\sinh n\pi}\sinh ny\sin nx$

$u_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n}\times\frac{\sinh nx+\sinh n(\pi-x)}{\sinh n\pi}\sin ny$

练习12.6

1. $u(x,t)=100+\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}e^{-kn^2\pi^2t}\sin n\pi x$

3. $u(x,t)=u_0-\frac{r}{2k}x(x-1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{u_0}{n\pi}+\frac{r}{kn^3\pi^3}\right]\times[(-1)^n-1]e^{-kn^2\pi^2t}\sin n\pi x$

5. $u(x,t)=\psi(x)+\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-kn^2\pi^2t}\sin n\pi x,$

其中 $\psi(x)=\frac{A}{k\beta^2}[-e^{-\beta x}+(e^{-\beta}-1)x+1]$

且 $A_n=2\int_0^1[f(x)-\psi(x)]\sin n\pi x\,dx$

7. $\psi(x)=u_0\left(1-\frac{\sinh\sqrt{h/k}\,x}{\sinh\sqrt{h/k}}\right)$

9. $u(x,t)=\frac{A}{6a^2}(x-x^3)+\frac{2A}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cos n\pi at\sin n\pi x$

11. $u(x,y)=(u_0-u_1)y+u_1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_0(-1)^n-u_1}{n}e^{-n\pi x}\sin n\pi y$

练习12.7

1. $u(x,t)=2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n[h+\sin^2\lambda_n]}e^{-k\lambda_n^2t}\cos\lambda_nx,$

其中 λ_n 是$\cot\lambda=\lambda/h$的连续正根.

3. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\lambda_ny\sin\lambda_nx,$

其中 $A_n=\frac{2h}{\sinh\lambda_nb[ah+\cos^2\lambda_na]}\int_0^a f(x)\sin\lambda_nx\,dx$,

λ_n 是 $\lambda a=-\lambda/h$的连续正根.

5. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-k(2n-1)^2\pi^2t/4L^2}\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x,$

其中 $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x\,dx.$

7. $u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi}\times\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi y$

9. (b) 1.875 1, 4.694 1

练习12.8

1. $u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-k(m^2+n^2)t}\sin mx\sin ny,$

其中 $A_{mn}=\frac{4u_0}{mn\pi^2}[1-(-1)^m][1-(-1)^n]$

3. $u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin mx\sin ny\cos a\sqrt{m^2+n^2}t,$

其中 $A_{mn}=\frac{16}{m^3n^3\pi^2}[(-1)^m-1][(-1)^n-1]$

5. $u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sinh\omega_{mn}z\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y,$

其中 $\omega_{mn}=\sqrt{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}$

$A_{mn}=\frac{4}{ab\sinh(c\omega_{mn})}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\times\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$

第12章复习题

1. $u=c_1e^{(c_2x+y/c_2)}$ **3.** $\psi(x)=u_0+\frac{(u_1-u_0)}{1+\pi}x$

5. $u(x,t)=\frac{2h}{\pi^2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\sin n\pi at\sin n\pi x$

7. $u(x,y)=\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\sinh n\pi}\sinh nx\sin ny$

9. $u(x,y)=\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{-nx}\sin ny$

11. $u(x,t)=e^{-t}\sin x$

13. $u(x,t)=e^{-(x+t)}\sum_{n=1}^{\infty}A_n[\sqrt{n^2+1}\cos\sqrt{n^2+1}t+\sin\sqrt{n^2+1}t]\sin nx$

练习13.1

1. $u(r,\theta)=\frac{u_0}{2}+\frac{u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}r^n\sin n\theta$

3. $u(r,\theta)=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^2}\cos n\theta$

5. $u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),$

其中 $A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta$

$A_n=\frac{c^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$

$B_n=\frac{c^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$

7. $u(r,\theta)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n}\cos 2n\theta$

9. $u(r,\theta)=A_0\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{b}{r}\right)^n-\left(\frac{r}{b}\right)^n\right]$
$\times[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta]$,

其中 $A_0\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta$

$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$

$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$

11. $u(r,\theta)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\frac{r^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}-b^{2n}}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sin n\theta$

13. $u(r,\theta)=\frac{u_0}{2}+\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\frac{r}{2}\right)^n\cos n\theta$

练习13.2

1. $u(r,t)=\frac{2}{ac}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n at\,J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n c)}$

3. $u(r,z)=u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\lambda_n(4-z)\,J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n\sinh 4\lambda_n\,J_1(2\lambda_n)}$

5. $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r)e^{-k\lambda_n^2 t}$,

其中 $A_n=\frac{2}{c^2J_1^2(\lambda_n c)}\int_0^c rJ_0(\lambda_n r)f(r)\,dr$

7. $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r)e^{-k\lambda_n^2 t}$,

其中 $A_n=\frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2+h^2)J_0^2(\lambda_n)}\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)f(r)\,dr$

9. $u(r,t)=100+50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n)J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1^2(2\lambda_n)}e^{-\lambda_n^2 t}$

11. (b) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\lambda_n\sqrt{g}t)J_0(2\lambda_n\sqrt{x})$,

其中 $A_n=\frac{2}{LJ_1^2(2\lambda_n\sqrt{L})}\int_0^{\sqrt{L}}vJ_0(2\lambda_n v)f(v^2)\,dv$

练习13.3

1. $u(r,\theta)=50\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\theta)+\frac{3}{4}\left(\frac{r}{c}\right)P_1(\cos\theta)\right.$
$\left.-\frac{7}{16}\left(\frac{r}{c}\right)^3P_3(\cos\theta)+\frac{11}{32}\left(\frac{r}{c}\right)^5P_5(\cos\theta)+\cdots\right]$

3. $u(r,\theta)=\frac{r}{c}\cos\theta$

5. $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{b^{2n+1}-r^{2n+1}}{b^{2n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$, 其中
$\frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{2n+1}a^{n+1}}A_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$

7. $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^{2n}P_{2n}(\cos\theta)$,

其中 $A_n=\frac{(4n+1)}{c^{2n}}\int_0^{\pi/2}f(\theta)P_{2n}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$

9. $u(r,t)=100+\frac{200}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi r$

11. $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{c}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{c}t\right)\sin\frac{n\pi}{c}r$,

其中 $A_n=\frac{2}{c}\int_0^c rf(r)\sin\frac{n\pi}{c}r\,dr$

$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^c rg(r)\sin\frac{n\pi}{c}r\,dr$

第13章复习题

1. $u(r,\theta)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n\sin n\theta$

3. $u(r,\theta)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin n\theta$

5. $u(r,\theta)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{4n}+r^{-4n}}{2^{4n}+2^{-4n}}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin 4n\theta$

7. $u(r,t)=2e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}e^{-\lambda_n^2 t}$

9. $u(r,z)=50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\lambda_n z\,J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n\cosh 4\lambda_n\,J_1(2\lambda_n)}$

11. $u(r,\theta)=100\left[\frac{3}{2}rP_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}r^3P_3(\cos\theta)\right.$
$\left.+\frac{11}{16}r^5P_5(\cos\theta)+\cdots\right]$

练习14.1

1. (a) 令积分 $\operatorname{erf}(\sqrt{t})$ 中的 $\tau=u^2$
7. $y(t)=e^{\pi t}\operatorname{erfc}(\sqrt{\pi t})$
9. 利用性质 $\int_0^b-\int_0^a=\int_0^b+\int_a^0$.

练习14.2

1. $u(x,t)=A\cos\frac{a\pi t}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$

3. $u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{a}\right)\mathscr{U}\left(t-\frac{x}{a}\right)$

5. $u(x,t)=\left[\frac{1}{2}g\left(t-\frac{x}{a}\right)^2+A\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]$
$\times\mathscr{U}\left(t-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}gt^2$

7. $u(x,t)=a\frac{F_0}{E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\left(t-\frac{2nL+L-x}{a}\right)\right.$
$\times\mathscr{U}\left(t-\frac{2nL+L-x}{a}\right)$
$-\left(t-\frac{2nL+L+x}{a}\right)$
$\left.\times\mathscr{U}\left(t-\frac{2nL+L+x}{a}\right)\right\}$

9. $u(x,t)=(t-x)\sinh(t-x)\mathscr{U}(t-x)$
$+xe^{-x}\cosh t-e^{-x}t\sinh t$

11. (a) $u(x,t)=u_0\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)$

13. $u(x, t) = u_1 + (u_0 - u_1)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

15. $u(x, t) = u_0\left[1 - \left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{x+t}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]$

17. $u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/4\tau}\, d\tau$

19. $u(x, t) = 60 + 40\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-2}}\right)\mathcal{U}(t-2)$

21. $u(x, t) = 100\left[-e^{1-x+t}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$

23. $u(x, t) = u_0 + u_0 e^{-(\pi^2/L^2)t}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

25. $u(x, t) = u_0 - u_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$

27. $u(x, t) = u_0 e^{-Gt/C}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)$

29. (a) $c(x, t) = A\sqrt{\frac{k}{\pi t}}\, e^{-x^2/(4kt)}$

练习14.3

1. $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\cos\alpha x + 3(1-\cos\alpha)\sin\alpha x}{\alpha}\, d\alpha$

3. $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]\, d\alpha$,

 其中 $A(\alpha) = \frac{3\alpha\sin 3\alpha + \cos 3\alpha - 1}{\alpha^2}$

 $B(\alpha) = \frac{\sin 3\alpha - 3\alpha\cos 3\alpha}{\alpha^2}$

5. $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha$

7. $f(x) = \frac{10}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-\cos\alpha)\sin\alpha x}{\alpha}\, d\alpha$

9. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\pi\alpha\sin\pi\alpha + \cos\pi\alpha - 1)\cos\alpha x}{\alpha^2}\, d\alpha$

11. $f(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{4+\alpha^4}\, d\alpha$

13. $f(x) = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{k^2+\alpha^2}\, d\alpha$

 $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{k^2+\alpha^2}\, d\alpha$

15. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(4-\alpha^2)\cos\alpha x}{(4+\alpha^2)^2}\, d\alpha$

 $f(x) = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{(4+\alpha^2)^2}\, d\alpha$

17. $f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0$

19. 令(7)中的$x=2$. 利用三角恒等式，并用x代替 α. 在(b)中使用变量替换$2x=kt$.

练习14.4

1. $u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha^2 t}}{1+\alpha^2} e^{-i\alpha x}\, d\alpha$
 $= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$

3. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4kt}}\, e^{-x^2/(1+4kt)}$

7. $u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\sin\alpha x\, d\alpha$

9. $u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\cos\alpha x\, d\alpha$

11. (a) $u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(\alpha)\cos\alpha at + G(\alpha)\frac{\sin\alpha at}{\alpha a}\right)e^{-i\alpha x}\, d\alpha$

13. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh\alpha(\pi - x)}{(1+\alpha^2)\sinh\alpha\pi}\cos\alpha y\, d\alpha$

15. $u(x, y) = \frac{100}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-\alpha y}\cos\alpha x\, d\alpha$

17. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\frac{\sinh\alpha(2-y)}{\sinh 2\alpha}\sin\alpha x\, d\alpha$

19. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{1+\alpha^2}[e^{-\alpha x}\sin\alpha y + e^{-\alpha y}\sin\alpha x]\, d\alpha$

21. $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha} e^{-i\alpha x}\, d\alpha$
 $= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha$

第14章复习题

1. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh\alpha y}{\alpha(1+\alpha^2)\cosh\alpha\pi}\cos\alpha x\, d\alpha$

3. $u(x, t) = u_0 e^{-ht}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

5. $u(x, t) = \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau$

7. $u(x, t) = \frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha(\pi - x) + \sin\alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$

9. $u(x, y) = \frac{100}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right) \times [e^{-\alpha x}\sin\alpha y + 2e^{-\alpha y}\sin\alpha x]\, d\alpha$

11. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{B\cosh\alpha y}{(1+\alpha^2)\sinh\alpha\pi} + \frac{A}{\alpha}\right)\sin\alpha x\, d\alpha$

13. $u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$

练习15.1

1. $u_{11} = \frac{11}{16}, u_{21} = \frac{11}{16}$
3. $u_{11} = u_{21} = \sqrt{3}/16, u_{22} = u_{12} = 3\sqrt{3}/16$
5. $u_{21} = u_{12} = 12.50, u_{31} = u_{13} = 18.75, u_{32} = u_{23} = 37.50, u_{11} = 6.25, u_{22} = 25.00, u_{33} = 56.25$
7. (b) $u_{14} = u_{41} = 0.5427, u_{24} = u_{42} = 0.6707, u_{34} = u_{43} = 0.6402, u_{33} = 0.4451, u_{44} = 0.9451$

练习15.2

1.

时间	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.025	0.600 0	1.000 0	1.000 0	0.600 0	0.400 0	0.000 0	0.000 0
0.050	0.520 0	0.840 0	0.840 0	0.680 0	0.320 0	0.160 0	0.000 0
0.075	0.440 0	0.712 0	0.776 0	0.600 0	0.400 0	0.160 0	0.064 0
0.100	0.372 8	0.628 8	0.680 0	0.590 4	0.384 0	0.217 6	0.076 8
0.125	0.326 1	0.546 9	0.623 7	0.543 7	0.400 0	0.227 8	0.102 4
0.150	0.284 0	0.489 3	0.561 0	0.518 2	0.388 6	0.246 5	0.111 6
0.175	0.252 5	0.435 8	0.515 2	0.483 5	0.383 6	0.249 4	0.120 9
0.200	0.224 8	0.394 2	0.470 8	0.456 2	0.369 9	0.251 7	0.123 9
0.225	0.202 7	0.357 1	0.434 3	0.427 5	0.357 1	0.247 9	0.125 5
0.250	0.183 4	0.326 2	0.400 7	0.402 1	0.341 6	0.242 6	0.124 2
0.275	0.167 2	0.298 9	0.371 5	0.377 3	0.326 2	0.234 8	0.121 9
0.300	0.153 0	0.275 2	0.344 8	0.354 5	0.310 1	0.226 2	0.118 3
0.325	0.140 7	0.254 1	0.320 9	0.332 9	0.294 3	0.216 6	0.114 1
0.350	0.129 8	0.235 4	0.299 0	0.312 6	0.278 7	0.206 7	0.109 5
0.375	0.120 1	0.218 6	0.279 0	0.293 6	0.263 5	0.196 6	0.104 6
0.400	0.111 5	0.203 4	0.260 7	0.275 7	0.248 8	0.186 5	0.099 6
0.425	0.103 6	0.189 5	0.243 8	0.258 9	0.234 7	0.176 6	0.094 5
0.450	0.096 5	0.176 9	0.228 1	0.243 2	0.221 1	0.167 0	0.089 6
0.475	0.090 1	0.165 2	0.213 6	0.228 3	0.208 3	0.157 7	0.084 7
0.500	0.084 1	0.154 5	0.200 2	0.214 4	0.196 1	0.148 7	0.080 0
0.525	0.078 6	0.144 6	0.187 6	0.201 4	0.184 5	0.140 2	0.075 5
0.550	0.073 6	0.135 4	0.175 9	0.189 1	0.173 5	0.132 0	0.071 2
0.575	0.068 9	0.126 9	0.165 0	0.177 6	0.163 2	0.124 3	0.067 0
0.600	0.064 5	0.118 9	0.154 8	0.166 8	0.153 4	0.116 9	0.063 1
0.625	0.060 5	0.111 5	0.145 2	0.156 6	0.144 2	0.110 0	0.059 4
0.650	0.056 7	0.104 6	0.136 3	0.147 1	0.135 5	0.103 4	0.055 9
0.675	0.053 2	0.098 1	0.127 9	0.138 1	0.127 3	0.097 2	0.052 5
0.700	0.049 9	0.092 1	0.120 1	0.129 7	0.119 6	0.091 4	0.049 4
0.725	0.046 8	0.086 4	0.112 7	0.121 8	0.112 4	0.085 9	0.046 4
0.750	0.043 9	0.081 1	0.105 8	0.114 4	0.105 6	0.080 7	0.043 6
0.775	0.041 2	0.076 1	0.099 4	0.107 4	0.099 2	0.075 8	0.041 0
0.800	0.038 7	0.071 5	0.093 3	0.100 9	0.093 1	0.071 2	0.038 5
0.825	0.036 3	0.067 1	0.087 6	0.094 8	0.087 5	0.066 9	0.036 2
0.850	0.034 1	0.063 0	0.082 3	0.089 0	0.082 2	0.062 8	0.034 0
0.875	0.032 0	0.059 1	0.077 2	0.083 6	0.077 2	0.059 0	0.031 9
0.900	0.030 1	0.055 5	0.072 5	0.078 5	0.072 5	0.055 4	0.030 0
0.925	0.028 2	0.052 1	0.068 1	0.073 7	0.068 1	0.052 1	0.028 2
0.950	0.026 5	0.049 0	0.064 0	0.069 2	0.063 9	0.048 9	0.026 5
0.975	0.024 9	0.046 0	0.060 1	0.065 0	0.060 0	0.045 9	0.024 9
1.000	0.023 4	0.043 2	0.056 4	0.061 0	0.056 4	0.043 1	0.023 3

3.

时间	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.025	0.707 4	0.952 0	0.956 6	0.744 4	0.254 5	0.037 1	0.005 3
0.050	0.560 6	0.849 9	0.868 5	0.663 3	0.330 3	0.103 4	0.022 3
0.075	0.468 4	0.747 3	0.783 6	0.619 1	0.361 4	0.152 9	0.046 2
0.100	0.401 5	0.657 7	0.708 4	0.583 7	0.375 3	0.187 1	0.068 4
0.125	0.349 2	0.582 1	0.642 8	0.551 0	0.379 7	0.210 1	0.086 1
0.150	0.306 9	0.518 7	0.585 7	0.519 9	0.377 8	0.224 7	0.099 0
0.175	0.272 1	0.465 2	0.535 9	0.490 1	0.371 6	0.232 9	0.107 8
0.200	0.243 0	0.419 8	0.492 1	0.461 7	0.362 2	0.236 2	0.113 2
0.225	0.218 6	0.380 9	0.453 3	0.434 8	0.350 7	0.235 8	0.116 0
0.250	0.197 7	0.347 3	0.418 9	0.409 3	0.337 8	0.232 7	0.116 6
0.275	0.179 8	0.318 1	0.388 1	0.385 3	0.324 0	0.227 5	0.115 7
0.300	0.164 3	0.292 4	0.360 4	0.362 6	0.309 7	0.220 8	0.113 6
0.325	0.150 7	0.269 7	0.335 3	0.341 2	0.295 3	0.213 1	0.110 7
0.350	0.138 7	0.249 5	0.312 5	0.321 1	0.280 8	0.204 7	0.107 1
0.375	0.128 1	0.231 3	0.291 6	0.302 1	0.266 6	0.196 0	0.103 2
0.400	0.118 7	0.215 0	0.272 5	0.284 3	0.252 8	0.187 1	0.098 9
0.425	0.110 2	0.200 2	0.254 9	0.267 5	0.239 3	0.178 1	0.094 6
0.450	0.102 5	0.186 7	0.238 7	0.251 7	0.226 3	0.169 2	0.090 2
0.475	0.095 5	0.174 3	0.223 6	0.236 8	0.213 9	0.160 6	0.085 8
0.500	0.089 1	0.163 0	0.209 7	0.222 8	0.202 0	0.152 1	0.081 4
0.525	0.083 3	0.152 5	0.196 7	0.209 6	0.190 6	0.143 9	0.077 2
0.550	0.077 9	0.142 9	0.184 6	0.197 3	0.179 8	0.136 1	0.073 1
0.575	0.072 9	0.133 9	0.173 4	0.185 6	0.169 6	0.128 5	0.069 1
0.600	0.068 3	0.125 6	0.162 8	0.174 6	0.159 8	0.121 4	0.065 3
0.625	0.064 1	0.117 9	0.153 0	0.164 3	0.150 6	0.114 5	0.061 7
0.650	0.060 1	0.110 6	0.143 8	0.154 6	0.141 9	0.108 0	0.058 2
0.675	0.056 4	0.103 9	0.135 1	0.145 5	0.133 6	0.101 8	0.054 9
0.700	0.053 0	0.097 6	0.127 0	0.136 9	0.125 9	0.095 9	0.051 8
0.725	0.049 7	0.091 7	0.119 4	0.128 8	0.118 5	0.090 4	0.048 8
0.750	0.046 7	0.086 2	0.112 3	0.121 2	0.111 6	0.085 2	0.046 0
0.775	0.043 9	0.081 0	0.105 6	0.114 0	0.105 0	0.080 2	0.043 3
0.800	0.041 3	0.076 2	0.099 3	0.107 3	0.098 9	0.075 5	0.040 8
0.825	0.038 8	0.071 6	0.093 4	0.100 9	0.093 1	0.071 1	0.038 4
0.850	0.036 5	0.067 4	0.087 9	0.095 0	0.087 6	0.066 9	0.036 2
0.875	0.034 3	0.063 3	0.082 7	0.089 4	0.082 4	0.063 0	0.034 1
0.900	0.032 3	0.059 6	0.077 8	0.084 1	0.077 6	0.059 3	0.032 1
0.925	0.030 3	0.056 0	0.073 2	0.079 1	0.073 0	0.055 8	0.030 2
0.950	0.028 5	0.052 7	0.068 8	0.074 4	0.068 7	0.052 6	0.028 4
0.975	0.026 8	0.049 6	0.064 7	0.070 0	0.064 7	0.049 5	0.026 8
1.000	0.025 3	0.046 6	0.060 9	0.065 9	0.060 8	0.046 5	0.025 2

注：绝对误差近似为 2.2×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

5. 时间	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.05	0.526 5	0.869 3	0.885 2	0.614 1	0.378 3	0.088 4	0.019 7
0.10	0.397 2	0.655 1	0.704 3	0.588 3	0.372 3	0.195 5	0.065 3
0.15	0.304 2	0.515 0	0.584 4	0.519 2	0.381 2	0.226 1	0.101 0
0.20	0.240 9	0.417 1	0.490 1	0.462 0	0.363 6	0.238 5	0.114 5
0.25	0.196 2	0.345 2	0.417 4	0.409 2	0.339 1	0.234 3	0.117 8
0.30	0.163 1	0.290 8	0.359 2	0.362 4	0.310 5	0.222 0	0.114 5
0.35	0.137 9	0.248 2	0.311 5	0.320 8	0.281 3	0.205 6	0.107 7
0.40	0.118 1	0.214 1	0.271 8	0.284 0	0.253 0	0.187 6	0.099 3
0.45	0.102 0	0.186 0	0.238 1	0.251 4	0.226 5	0.169 6	0.090 4
0.50	0.088 8	0.162 5	0.209 2	0.222 6	0.202 0	0.152 3	0.081 6
0.55	0.077 6	0.142 5	0.184 2	0.197 0	0.179 8	0.136 1	0.073 2
0.60	0.068 1	0.125 3	0.162 5	0.174 4	0.159 7	0.121 4	0.065 4
0.65	0.059 9	0.110 4	0.143 5	0.154 4	0.141 8	0.107 9	0.058 2
0.70	0.052 8	0.097 4	0.126 8	0.136 6	0.125 7	0.095 9	0.051 8
0.75	0.046 6	0.086 0	0.112 1	0.121 0	0.111 4	0.085 1	0.046 0
0.80	0.041 2	0.076 0	0.099 1	0.107 1	0.098 7	0.075 4	0.040 8
0.85	0.036 4	0.067 2	0.087 7	0.094 8	0.087 4	0.066 8	0.036 1
0.90	0.032 2	0.059 4	0.077 6	0.083 9	0.077 4	0.059 2	0.032 0
0.95	0.028 5	0.052 6	0.068 7	0.074 3	0.068 6	0.052 4	0.028 4
1.00	0.025 2	0.046 5	0.060 8	0.065 7	0.060 7	0.046 4	0.025 1

注：绝对误差近似为1.8×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

7. (a) 时间	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0
1.00	28.773 3	29.974 9	29.999 5	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 5	29.974 9	28.773 3
2.00	27.645 0	29.903 7	29.997 0	29.999 9	30.000 0	29.999 9	29.997 0	29.903 7	27.645 0
3.00	26.605 1	29.793 8	29.991 1	29.999 7	30.000 0	29.999 7	29.991 1	29.793 8	26.605 1
4.00	25.645 2	29.651 7	29.980 5	29.999 1	29.999 9	29.999 1	29.980 5	29.651 7	25.645 2
5.00	24.757 3	29.482 9	29.964 3	29.998 1	29.999 8	29.998 1	29.964 3	29.482 9	24.757 3
6.00	23.934 7	29.292 2	29.942 1	29.996 3	29.999 6	29.996 3	29.942 1	29.292 2	23.934 7
7.00	23.171 1	29.083 6	29.913 4	29.993 6	29.999 2	29.993 6	29.913 4	29.083 6	23.171 1
8.00	22.461 2	28.860 6	29.878 2	29.989 8	29.998 6	29.989 8	29.878 2	28.860 6	22.461 2
9.00	21.799 9	28.626 3	29.836 2	29.984 8	29.997 7	29.984 8	29.836 2	28.626 3	21.799 9
10.00	21.182 9	28.383 1	29.787 8	29.978 2	29.996 4	29.978 2	29.787 8	28.383 1	21.182 9

(b) 时间	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0
1.00	29.796 8	29.999 3	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 3	29.796 8
2.00	29.596 4	29.997 3	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.997 3	29.596 4
3.00	29.398 7	29.993 9	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.993 9	29.398 7
4.00	29.203 6	29.989 3	29.999 9	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 9	29.989 3	29.203 6
5.00	29.011 2	29.983 4	29.999 8	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 8	29.983 4	29.011 2
6.00	28.821 2	29.976 2	29.999 7	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 7	29.976 2	28.821 3
7.00	28.633 9	29.967 9	29.999 5	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 5	29.967 9	28.633 9
8.00	28.449 0	29.958 5	29.999 2	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 3	29.958 5	28.449 0
9.00	28.266 5	29.947 9	29.998 9	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.998 9	29.947 9	28.266 5
10.00	28.086 4	29.936 3	29.998 6	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.998 6	29.936 3	28.086 4

(c)

时间	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.000 0	32.000 0	42.000 0	48.000 0	50.000 0	48.000 0	42.000 0	32.000 0	18.000 0
1.00	16.448 9	30.197 0	40.156 1	46.149 5	48.148 6	46.149 5	40.156 1	30.197 0	16.448 9
2.00	15.331 2	28.534 8	38.346 5	44.306 7	46.300 1	44.306 7	38.346 5	28.534 8	15.331 2
3.00	14.421 6	27.041 6	36.603 1	42.484 7	44.461 9	42.484 7	36.603 1	27.041 6	14.421 6
4.00	13.637 1	25.686 7	34.941 6	40.698 8	42.645 3	40.698 8	34.941 6	25.686 7	13.637 1
5.00	12.937 8	24.441 9	33.362 8	38.961 1	40.863 4	38.961 1	33.362 8	24.441 9	12.937 8
6.00	12.301 2	23.286 3	31.862 4	37.279 4	39.127 3	37.279 4	31.862 4	23.286 3	12.301 2
7.00	11.713 7	22.205 1	30.435 0	35.657 8	37.444 6	35.657 8	30.435 0	22.205 1	11.713 7
8.00	11.165 9	21.187 7	29.075 7	34.098 4	35.820 2	34.098 4	29.075 7	21.187 7	11.165 9
9.00	10.651 7	20.226 1	27.779 9	32.601 4	34.256 7	32.601 4	27.779 9	20.226 1	10.651 7
10.00	10.166 5	19.314 3	26.543 9	31.166 2	32.754 9	31.166 2	26.543 9	19.314 3	10.166 5

(d)

时间	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.000 0	16.000 0	24.000 0	32.000 0	40.000 0	32.000 0	24.000 0	16.000 0	8.000 0
1.00	8.000 0	16.000 0	24.000 0	31.997 9	39.742 5	31.997 9	24.000 0	16.000 0	8.000 0
2.00	8.000 0	16.000 0	23.999 9	31.991 8	39.493 2	31.991 8	23.999 9	16.000 0	8.000 0
3.00	8.000 0	16.000 0	23.999 7	31.982 0	39.251 7	31.982 0	23.999 7	16.000 0	8.000 0
4.00	8.000 0	16.000 0	23.999 3	31.968 6	39.017 5	31.968 6	23.999 3	16.000 0	8.000 0
5.00	8.000 0	16.000 0	23.998 7	31.952 0	38.790 5	31.952 0	23.998 7	16.000 0	8.000 0
6.00	8.000 0	15.999 9	23.997 8	31.932 3	38.570 1	31.932 3	23.997 8	15.999 9	8.000 0
7.00	8.000 0	15.999 9	23.996 6	31.909 7	38.356 1	31.909 7	23.996 6	15.999 9	8.000 0
8.00	8.000 0	15.999 8	23.995 0	31.884 4	38.148 3	31.884 4	23.995 0	15.999 8	8.000 0
9.00	8.000 0	15.999 7	23.993 1	31.856 6	37.946 3	31.856 6	23.993 1	15.999 7	8.000 0
10.00	8.000 0	15.999 6	23.990 8	31.826 5	37.749 8	31.826 5	23.990 8	15.999 6	8.000 0

9. (a)

时间	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0
1.00	28.773 3	29.974 9	29.999 5	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 8	29.991 6	29.591 1
2.00	27.645 0	29.903 7	29.997 0	29.999 9	30.000 0	30.000 0	29.999 0	29.967 9	29.215 0
3.00	26.605 1	29.793 8	29.991 1	29.999 7	30.000 0	29.999 9	29.997 0	29.931 3	28.868 4
4.00	25.645 2	29.651 7	29.980 5	29.999 1	30.000 0	29.999 7	29.993 5	29.883 9	28.548 4
5.00	24.757 3	29.482 9	29.964 3	29.998 1	29.999 9	29.999 4	29.988 1	29.827 6	28.252 4
6.00	23.934 7	29.292 2	29.942 1	29.996 3	29.999 7	29.998 8	29.980 7	29.764 1	27.978 2
7.00	23.171 1	29.083 6	29.913 4	29.993 6	29.999 5	29.997 9	29.971 1	29.694 5	27.723 7
8.00	22.461 2	28.860 6	29.878 2	29.989 9	29.999 1	29.996 6	29.959 4	29.620 2	27.487 0
9.00	21.799 9	28.626 3	29.836 2	29.984 8	29.998 5	29.994 9	29.945 4	29.542 1	27.266 6
10.00	21.182 9	28.383 1	29.787 8	29.978 3	29.997 6	29.992 7	29.929 3	29.461 0	27.061 0

(b)

时间	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0
1.00	29.796 8	29.999 3	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 8	29.932 3
2.00	29.596 4	29.997 3	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 1	29.865 5
3.00	29.398 7	29.993 9	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.998 0	29.799 6
4.00	29.203 6	29.989 3	29.999 9	30.000 0	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.996 4	29.734 5
5.00	29.011 2	29.983 4	29.999 8	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 9	29.994 5	29.670 4
6.00	28.821 2	29.976 2	29.999 7	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 9	29.992 1	29.607 1
7.00	28.633 9	29.967 9	29.999 5	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 8	29.989 3	29.544 6
8.00	28.449 0	29.958 5	29.999 2	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 7	29.986 2	29.483 0
9.00	28.266 5	29.947 9	29.998 9	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 6	29.982 7	29.422 2
10.00	28.086 4	29.936 3	29.998 6	30.000 0	30.000 0	30.000 0	29.999 5	29.978 8	29.362 1

(c)

时间	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.000 0	32.000 0	42.000 0	48.000 0	50.000 0	48.000 0	42.000 0	32.000 0	18.000 0
1.00	16.448 9	30.197 0	40.156 2	46.150 2	48.153 1	46.177 3	40.327 4	31.252 0	22.944 9
2.00	15.331 2	28.535 0	38.347 7	44.313 0	46.332 7	44.467 1	39.087 2	31.575 5	24.693 0
3.00	14.421 9	27.042 9	36.609 0	42.511 3	44.575 9	42.936 2	38.197 6	31.747 8	25.413 1
4.00	13.638 1	25.691 3	34.960 6	40.772 8	42.912 7	41.571 6	37.434 0	31.708 6	25.698 6
5.00	12.940 9	24.454 5	33.409 1	39.118 2	41.351 9	40.324 0	36.703 3	31.513 6	25.766 3
6.00	12.308 8	23.314 6	31.954 6	37.556 6	39.888 0	39.156 5	35.974 5	31.213 4	25.712 8
7.00	11.729 4	22.258 9	30.593 9	36.088 4	38.510 9	38.047 0	35.240 7	30.843 4	25.587 1
8.00	11.194 6	21.278 5	29.321 7	34.709 2	37.210 9	36.983 4	34.503 2	30.427 9	25.416 7
9.00	10.698 7	20.366 0	28.131 8	33.413 0	35.980 1	35.959 1	33.766 0	29.983 6	25.218 1
10.00	10.237 7	19.515 0	27.017 8	32.192 9	34.811 7	34.971 0	33.033 8	29.522 4	25.001 9

(d)

时间	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.000 0	16.000 0	24.000 0	32.000 0	40.000 0	32.000 0	24.000 0	16.000 0	8.000 0
1.00	8.000 0	16.000 0	24.000 0	31.997 9	39.742 5	31.997 9	24.000 0	16.002 6	8.321 8
2.00	8.000 0	16.000 0	23.999 9	31.991 8	39.493 2	31.991 8	24.000 0	16.010 2	8.633 3
3.00	8.000 0	16.000 0	23.999 7	31.982 0	39.251 7	31.982 0	24.000 1	16.022 5	8.935 0
4.00	8.000 0	16.000 0	23.999 3	31.968 6	39.017 5	31.968 7	24.000 2	16.039 1	9.227 2
5.00	8.000 0	16.000 0	23.998 7	31.952 0	38.790 5	31.952 0	24.000 3	16.059 9	9.510 3
6.00	8.000 0	15.999 9	23.997 8	31.932 3	38.570 1	31.932 4	24.000 5	16.084 5	9.784 6
7.00	8.000 0	15.999 9	23.996 6	31.909 7	38.356 1	31.909 8	24.000 8	16.112 6	10.050 6
8.00	8.000 0	15.999 8	23.995 0	31.884 4	38.148 3	31.884 6	24.001 2	16.144 1	10.308 4
9.00	8.000 0	15.999 7	23.993 1	31.856 6	37.946 3	31.856 9	24.001 7	16.178 6	10.558 5
10.00	8.000 0	15.999 6	23.990 8	31.826 5	37.749 9	31.826 9	24.002 3	16.216 0	10.801 2

11. (a) $\psi(x) = \frac{1}{2}x + 20$

(b)

时间	$x = 4.00$	$x = 8.00$	$x = 12.00$	$x = 16.00$
0.00	50.000 0	50.000 0	50.000 0	50.000 0
10.00	32.743 3	44.267 9	45.422 8	38.297 1
20.00	29.994 6	36.235 4	38.314 8	35.816 0
30.00	26.948 7	32.140 9	34.087 4	32.964 4
40.00	25.269 1	29.256 2	31.270 4	31.258 0
50.00	24.117 8	27.434 8	29.429 6	30.120 7
60.00	23.382 1	26.233 9	28.235 6	29.381 0
70.00	22.899 5	25.456 0	27.455 4	28.899 8
80.00	22.586 1	24.948 1	26.948 2	28.585 9
90.00	22.381 7	24.617 6	26.617 5	28.381 7
100.00	22.248 6	24.402 2	26.402 3	28.248 6
110.00	22.161 9	24.262 0	26.262 0	28.161 9
120.00	22.105 5	24.170 7	26.170 7	28.105 5
130.00	22.068 7	24.111 2	26.111 2	28.068 7
140.00	22.044 7	24.072 4	26.072 4	28.044 7
150.00	22.029 1	24.047 2	26.047 2	28.029 1
160.00	22.019 0	24.030 7	26.030 7	28.019 0
170.00	22.012 4	24.020 0	26.020 0	28.012 4
180.00	22.008 1	24.013 0	26.013 0	28.008 1
190.00	22.005 2	24.008 5	26.008 5	28.005 2
200.00	22.003 4	24.005 5	26.005 5	28.003 4
210.00	22.002 2	24.003 6	26.003 6	28.002 2
220.00	22.001 5	24.002 3	26.002 3	28.001 5
230.00	22.000 9	24.001 5	26.001 5	28.000 9
240.00	22.000 6	24.001 0	26.001 0	28.000 6
250.00	22.000 4	24.000 7	26.000 7	28.000 4
260.00	22.000 3	24.000 4	26.000 4	28.000 3
270.00	22.000 2	24.000 3	26.000 3	28.000 2
280.00	22.000 1	24.000 2	26.000 2	28.000 1
290.00	22.000 1	24.000 1	26.000 1	28.000 1
300.00	22.000 0	24.000 1	26.000 1	28.000 0
310.00	22.000 0	24.000 1	26.000 1	28.000 0
320.00	22.000 0	24.000 0	26.000 0	28.000 0
330.00	22.000 0	24.000 0	26.000 0	28.000 0
340.00	22.000 0	24.000 0	26.000 0	28.000 0
350.00	22.000 0	24.000 0	26.000 0	28.000 0

练习15.3

1. (a)

时间	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$
0.00	0.187 5	0.250 0	0.187 5
0.10	0.177 5	0.240 0	0.177 5
0.20	0.149 1	0.210 0	0.149 1
0.30	0.106 6	0.160 5	0.106 6
0.40	0.055 6	0.093 8	0.055 6
0.50	0.001 9	0.014 8	0.001 9
0.60	−0.050 1	−0.068 2	−0.050 1
0.70	−0.097 0	−0.145 5	−0.097 0
0.80	−0.136 1	−0.207 2	−0.136 1
0.90	−0.164 8	−0.246 2	−0.164 8
1.00	−0.180 2	−0.259 1	−0.180 2

(b)

时间	$x = 0.4$	$x = 0.8$	$x = 1.2$	$x = 1.6$
0.00	0.003 2	0.527 3	0.527 3	0.003 2
0.10	0.019 4	0.510 9	0.510 9	0.019 4
0.20	0.065 2	0.463 8	0.463 8	0.065 2
0.30	0.131 8	0.391 8	0.391 8	0.131 8
0.40	0.206 5	0.303 5	0.303 5	0.206 5
0.50	0.274 3	0.209 2	0.209 2	0.274 3
0.60	0.320 8	0.119 0	0.119 0	0.320 8
0.70	0.334 8	0.041 3	0.041 3	0.334 8
0.80	0.309 4	−0.018 0	−0.018 0	0.309 4
0.90	0.244 3	−0.056 8	−0.056 8	0.244 3
1.00	0.145 0	−0.076 8	−0.076 8	0.145 0

(c)

时间	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$
0.00	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.500 0	0.500 0	0.500 0	0.500 0
0.04	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.080 0	0.420 0	0.500 0	0.500 0	0.420 0
0.08	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.025 6	0.243 2	0.256 8	0.474 4	0.474 4	0.231 2
0.12	0.000 0	0.000 0	0.008 2	0.112 6	0.341 1	0.158 9	0.379 2	0.371 0	0.046 2
0.16	0.000 0	0.002 6	0.047 2	0.239 4	0.307 6	0.189 8	0.210 8	0.166 3	−0.049 6
0.20	0.000 8	0.018 7	0.133 4	0.326 4	0.214 6	0.265 1	0.021 5	−0.093 3	−0.060 5
0.24	0.007 1	0.065 7	0.244 7	0.315 9	0.173 5	0.246 3	−0.126 6	−0.305 6	−0.062 5
0.28	0.029 9	0.151 3	0.321 5	0.237 1	0.201 3	0.084 9	−0.212 7	−0.382 9	−0.122 3
0.32	0.081 9	0.252 5	0.316 8	0.173 7	0.203 3	−0.134 5	−0.258 0	−0.322 3	−0.226 4
0.36	0.162 3	0.319 7	0.245 8	0.165 7	0.087 7	−0.285 3	−0.284 3	−0.210 4	−0.288 7
0.40	0.241 2	0.312 9	0.172 7	0.158 3	−0.122 3	−0.316 4	−0.287 4	−0.147 3	−0.233 6
0.44	0.265 7	0.238 3	0.139 9	0.065 8	−0.304 6	−0.276 1	−0.254 9	−0.156 5	−0.076 1
0.48	0.196 5	0.141 0	0.114 9	−0.121 6	−0.359 3	−0.238 1	−0.197 7	−0.171 5	0.080 0
0.52	0.046 6	0.053 1	0.022 5	−0.309 3	−0.299 2	−0.226 0	−0.145 1	−0.114 4	0.130 0
0.56	−0.116 1	−0.046 6	−0.166 2	−0.387 6	−0.218 8	−0.211 4	−0.108 5	0.011 1	0.060 2
0.60	−0.219 4	−0.206 9	−0.387 5	−0.341 1	−0.190 1	−0.166 2	−0.066 6	0.114 0	−0.044 6
0.64	−0.248 5	−0.429 0	−0.536 2	−0.261 1	−0.202 1	−0.096 9	0.001 2	0.108 4	−0.084 3
0.68	−0.255 9	−0.627 6	−0.562 5	−0.250 3	−0.199 3	−0.029 8	0.072 0	0.006 8	−0.035 4
0.72	−0.300 3	−0.686 5	−0.509 7	−0.323 0	−0.158 5	0.015 6	0.089 3	−0.087 4	0.038 4
0.76	−0.372 2	−0.565 2	−0.453 8	−0.402 9	−0.114 7	0.028 9	0.026 5	−0.084 9	0.059 6
0.80	−0.386 7	−0.346 4	−0.417 2	−0.406 8	−0.117 2	−0.004 6	−0.071 2	−0.000 5	0.015 5
0.84	−0.264 7	−0.163 3	−0.354 6	−0.321 4	−0.176 3	−0.095 4	−0.124 9	0.066 5	−0.038 6
0.88	−0.025 4	−0.073 8	−0.220 2	−0.200 2	−0.255 9	−0.221 5	−0.107 9	0.038 5	−0.046 8
0.92	0.206 4	−0.015 7	−0.032 5	−0.103 2	−0.306 7	−0.322 3	−0.080 4	−0.063 6	−0.012 7
0.96	0.301 2	0.108 1	0.138 0	−0.048 7	−0.297 4	−0.340 7	−0.125 0	−0.154 8	0.009 2
1.00	0.237 8	0.303 2	0.239 2	−0.014 1	−0.222 3	−0.276 2	−0.248 1	−0.184 0	−0.024 4

3. (a)

时间	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.00	0.587 8	0.951 1	0.951 1	0.587 8
0.05	0.580 8	0.939 7	0.939 7	0.580 8
0.10	0.559 9	0.905 9	0.905 9	0.559 9
0.15	0.525 6	0.850 5	0.850 5	0.525 6
0.20	0.478 8	0.774 8	0.774 8	0.478 8
0.25	0.420 6	0.680 6	0.680 6	0.420 6
0.30	0.352 4	0.570 1	0.570 1	0.352 4
0.35	0.275 7	0.446 0	0.446 0	0.275 7
0.40	0.192 4	0.311 3	0.311 3	0.192 4
0.45	0.104 6	0.169 2	0.169 2	0.104 6
0.50	0.014 2	0.023 0	0.023 0	0.014 2

(b)

时间	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.00	0.587 8	0.951 1	0.951 1	0.587 8
0.03	0.586 0	0.948 2	0.948 2	0.586 0
0.05	0.580 8	0.939 7	0.939 7	0.580 8
0.08	0.572 1	0.925 6	0.925 6	0.572 1
0.10	0.559 9	0.906 0	0.906 0	0.559 9
0.13	0.544 5	0.880 9	0.880 9	0.544 5
0.15	0.525 7	0.850 7	0.850 7	0.525 7
0.18	0.503 9	0.815 3	0.815 3	0.503 9
0.20	0.479 0	0.775 0	0.775 0	0.479 0
0.23	0.451 3	0.730 2	0.730 2	0.451 3
0.25	0.420 9	0.681 0	0.681 0	0.420 9
0.28	0.387 9	0.627 7	0.627 7	0.387 9
0.30	0.352 7	0.570 6	0.570 6	0.352 7
0.33	0.315 3	0.510 2	0.510 2	0.315 3
0.35	0.276 1	0.446 7	0.446 7	0.276 1
0.38	0.235 2	0.380 6	0.380 6	0.235 2
0.40	0.192 9	0.312 2	0.312 2	0.192 9
0.43	0.149 5	0.241 9	0.241 9	0.149 5
0.45	0.105 2	0.170 1	0.170 1	0.105 2
0.48	0.060 2	0.097 4	0.097 4	0.060 2
0.50	0.014 9	0.024 1	0.024 1	0.014 9

5.

时间	$x=10$	$x=20$	$x=30$	$x=40$	$x=50$
0.000 00	0.100 0	0.200 0	0.300 0	0.200 0	0.100 0
0.200 45	0.100 0	0.200 0	0.275 0	0.200 0	0.100 0
0.400 89	0.100 0	0.193 8	0.212 5	0.193 8	0.100 0
0.601 34	0.098 4	0.168 8	0.140 6	0.168 8	0.098 4
0.801 78	0.089 8	0.119 1	0.082 8	0.119 1	0.089 8
1.002 23	0.066 1	0.053 1	0.043 2	0.053 1	0.066 1
1.202 68	0.022 6	−0.012 1	0.008 5	−0.012 1	0.022 6
1.403 12	−0.035 2	−0.063 5	−0.036 5	−0.063 5	−0.035 2
1.603 57	−0.091 3	−0.101 1	−0.095 0	−0.101 1	−0.091 3
1.804 01	−0.127 1	−0.134 7	−0.156 6	−0.134 7	−0.127 1
2.004 46	−0.132 9	−0.171 9	−0.207 2	−0.171 9	−0.132 9
2.204 91	−0.115 3	−0.208 1	−0.240 2	−0.208 1	−0.115 3
2.405 35	−0.092 0	−0.229 2	−0.257 1	−0.229 2	−0.092 0
2.605 80	−0.080 1	−0.223 0	−0.260 1	−0.223 0	−0.080 1
2.806 24	−0.083 8	−0.190 3	−0.244 5	−0.190 3	−0.083 8
3.006 69	−0.093 2	−0.144 5	−0.201 8	−0.144 5	−0.093 2
3.207 13	−0.092 1	−0.100 3	−0.130 5	−0.100 3	−0.092 1
3.407 58	−0.070 1	−0.061 5	−0.044 0	−0.061 5	−0.070 1
3.608 03	−0.028 4	−0.020 5	0.033 6	−0.020 5	−0.028 4
3.808 47	0.022 4	0.032 1	0.084 2	0.032 1	0.022 4
4.008 92	0.070 0	0.095 3	0.108 7	0.095 3	0.070 0
4.209 36	0.106 4	0.155 5	0.126 5	0.155 5	0.106 4
4.409 81	0.128 5	0.196 2	0.158 8	0.196 2	0.128 5
4.610 26	0.135 4	0.210 6	0.209 8	0.210 6	0.135 4
4.810 70	0.127 3	0.206 0	0.261 2	0.206 0	0.127 3
5.011 15	0.107 0	0.195 5	0.285 1	0.195 5	0.107 0
5.211 59	0.082 1	0.185 3	0.264 1	0.185 3	0.082 1
5.412 04	0.062 5	0.168 9	0.203 8	0.168 9	0.062 5
5.612 49	0.053 9	0.134 7	0.126 0	0.134 7	0.053 9
5.812 93	0.052 0	0.078 1	0.052 6	0.078 1	0.052 0
6.013 38	0.043 6	0.008 6	−0.008 0	0.008 6	0.043 6
6.213 82	0.015 6	−0.056 4	−0.060 4	−0.056 4	0.015 6
6.414 27	−0.034 3	−0.104 3	−0.110 7	−0.104 3	−0.034 3
6.614 72	−0.093 1	−0.136 4	−0.157 8	−0.136 4	−0.093 1
6.815 16	−0.139 5	−0.163 0	−0.194 2	−0.163 0	−0.139 5
7.015 61	−0.156 8	−0.191 5	−0.215 0	−0.191 5	−0.156 8
7.216 05	−0.143 6	−0.217 3	−0.224 0	−0.217 3	−0.143 6
7.416 50	−0.112 9	−0.226 3	−0.229 7	−0.226 3	−0.112 9
7.616 95	−0.082 4	−0.207 8	−0.233 6	−0.207 8	−0.082 4
7.817 39	−0.062 5	−0.164 4	−0.224 7	−0.164 4	−0.062 5
8.017 84	−0.052 6	−0.110 6	−0.185 6	−0.110 6	−0.052 6
8.218 28	−0.044 0	−0.061 1	−0.109 1	−0.061 1	−0.044 0
8.418 73	−0.028 7	−0.019 2	−0.008 5	−0.019 2	−0.028 7
8.619 18	−0.003 8	0.022 9	0.086 7	0.022 9	−0.003 8
8.819 62	0.028 7	0.074 3	0.150 0	0.074 3	0.028 7
9.020 07	0.065 4	0.133 2	0.175 5	0.133 2	0.065 4
9.220 51	0.102 7	0.185 8	0.179 9	0.185 8	0.102 7
9.420 96	0.135 2	0.216 0	0.187 2	0.216 0	0.135 2
9.621 40	0.154 0	0.218 9	0.208 9	0.218 9	0.154 0
9.821 85	0.150 6	0.203 0	0.235 6	0.203 0	0.150 6
10.022 30	0.122 6	0.182 2	0.246 1	0.182 2	0.122 6

注：时间的单位为ms.

第15章复习题

1. $u_{11} = 0.8929$, $u_{21} = 3.5714$, $u_{31} = 13.3929$

3. (a)

时间	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.800 0	0.000 0
0.01	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.550 0	0.000 0
0.02	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.537 5	0.425 0	0.000 0
0.03	0.000 0	0.200 0	0.384 4	0.475 0	0.346 9	0.000 0
0.04	0.000 0	0.196 1	0.360 9	0.420 3	0.292 2	0.000 0
0.05	0.000 0	0.188 3	0.334 6	0.373 4	0.251 2	0.000 0

(b)

时间	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.800 0	1.000 0
0.01	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.800 0	0.000 0
0.02	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.550 0	0.000 0
0.03	0.000 0	0.200 0	0.400 0	0.537 5	0.425 0	0.000 0
0.04	0.000 0	0.200 0	0.384 4	0.475 0	0.346 9	0.000 0
0.05	0.000 0	0.196 1	0.360 9	0.420 3	0.292 2	0.000 0

(c) 是;(b)中的表可由(a)中的表向下移动得到。

附录A练习

1. (a) 24 **(b)** 720 **(c)** $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$ **(d)** $-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$

3. 0.297

附录B练习

1. (a) $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 14 & -19 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 28 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 17 & -22 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -32 & 27 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$

5. (a) $\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

7. (a) 180 **(b)** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 20 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

9. (a) $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} -38 \\ -2 \end{pmatrix}$ **15.** 奇异的

17. 非奇异的;$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

19. 非奇异的;$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

21. 非奇异的;$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -13 & 5 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{A}^{-1}(t) = \frac{1}{2e^{3t}}\begin{pmatrix} 3e^{4t} & -e^{4t} \\ -4e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$

25. $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -5e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{pmatrix}$

27. $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} - 12\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$

29. (a) $\begin{pmatrix} 4e^{4t} & -\pi\sin\pi t \\ 2 & 6t \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{8} - \frac{1}{4} & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4} & (1/\pi)\sin\pi t \\ t^2 & t^3 - t \end{pmatrix}$

31. $x = 3, y = 1, z = -5$

33. $x = 2 + 4t, y = -5 - t, z = t$

35. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}, z = \frac{7}{2}$

37. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0$

41. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

43. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

45. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

47. $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1,\ \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

49. $\lambda_1 = \lambda_2 = -4,\ \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

51. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = -4,$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

53. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2,$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

55. $\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i,$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$

附录E 积 分 表

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

21. $\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$

22. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$

23. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

24. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

25. $\int \sin^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u)\cos u + C$

26. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\sin u + C$

27. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

28. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

29. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

30. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

31. $\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}u\,du$

32. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1}u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}u\,du$

33. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}u - \int \tan^{n-2}u\,du$

34. $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1}u - \int \cot^{n-2}u\,du$

35. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2}u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}u\,du$

36. $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2}u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}u\,du$

37. $\int \sin au \sin bu\,du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$

38. $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$

39. $\int \sin au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

40. $\int u \sin u\,du = \sin u - u\cos u + C$

41. $\int u \cos u\,du = \cos u + u \sin u + C$

42. $\int u^n \sin u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

43. $\int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$

44. $\int \sin^n u \cos^m u\,du = -\frac{\sin^{n-1}u \cos^{m+1}u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}u \cos^m u\,du = \frac{\sin^{n+1}u \cos^{m-1}u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n u \cos^{m-2}u\,du$

45. $\int \sin^{-1}u\,du = u\sin^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C$

46. $\int \cos^{-1}u\,du = u\cos^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C$

47. $\int \tan^{-1}u\,du = u\tan^{-1}u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

48. $\int u\sin^{-1}u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\sin^{-1}u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

49. $\int u\cos^{-1}u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1}u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

50. $\int u\tan^{-1}u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1}u - \frac{u}{2} + C$

51. $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

52. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

53. $\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$

54. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$

55. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

56. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

57. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

58. $\int u^m \ln^n u\,du = \frac{u^{m+1}\ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1}u\,du, \quad m \neq -1$

59. $\int \ln(u^2+a^2)\,du = u\ln(u^2+a^2) - 2u + 2a\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

60. $\int \ln|u^2-a^2|\,du = u\ln|u^2-a^2| - 2u + a\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

61. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$

62. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$

63. $\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

64. $\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + C$

65. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

66. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

67. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

68. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

69. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

70. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

72. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

73. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

74. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

75. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

76. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

77. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

78. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

79. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$

80. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

81. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

82. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

83. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

84. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

85. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

86. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$